MP*

Structures algébriques

récapitulatif

GROUPES

Définition — Groupe —
On appelle groupe tout couple $(G, *)$, où G est un ensemble, $*$ une loi interne sur G et qui jouit des propriétés suivantes :

1. *La loi $*$ est* **associative**.
2. *La loi $*$ possède un* **élément neutre**.
3. *Tout élément de G possède un* **symétrique**.

Si de plus la loi $*$ est commutative, on dit que le groupe est abélien.

Définition — Sous-groupe —
Soit $(G, *)$ un groupe. On appelle sous-groupe de $(G, *)$, tout couple $(H, \underset{H}{*})$ où :
— *H est une partie de G stable par la loi $*$;*
— *$\underset{H}{*}$ est la loi induite par $*$ sur H ;*
— *$(H, \underset{H}{*})$ est un groupe.*

Remarque — Abusivement on dit que H est un sous-groupe.

Proposition — Caractérisation des sous-groupes —
Soit $(G, *)$ un groupe. Soit H une partie de G. H est un sous-groupe de $(G, *)$ si et seulement si

1. *La partie H est non vide.*
2. *La partie H est stable par la loi $*$.*
3. *La partie H est stable par passage au symétrique.*

Proposition — Intersection de sous-groupes —
L'intersection d'une famille, finie ou non, de sous-groupes d'un groupe $(G, *)$ est un sous-groupe de $(G, *)$.

Définition — Morphisme de groupes —
Soient $(G_1, \underset{1}{*})$ et $(G_2, \underset{2}{*})$ des groupes. On appelle morphisme du groupe $(G_1, \underset{1}{*})$ dans le groupe $(G_2, \underset{2}{*})$, toute application φ de G_1 dans G_2 telle que pour tout x et tout y éléments de G, $\varphi(x \underset{1}{*} y) = \varphi(x) \underset{2}{*} \varphi(y)$.

Proposition — Propriétés des morphismes de groupes —
Soit φ un morphisme d'un groupe $(G_1, \underset{1}{*})$ dans une groupe $(G_2, \underset{2}{*})$. Alors,

1. *$\varphi(e_{G_1}) = e_{G_2}$.*
2. *Pour tout élément x de G_1, $\varphi(x^{-1}) = (\varphi(x))^{-1}$.*
3. *Si H_1 est un sous-groupe de $(G_1, \underset{1}{*})$, alors $\varphi(H_1)$, en est un de $(G_2, \underset{2}{*})$.*
4. *Si H_2 est un sous-groupe de $(G_2, \underset{2}{*})$, $\varphi^{-1}(H_2)$, en est un de $(G_1, \underset{1}{*})$*

Cas particulier — $\varphi^{-1}(\{e_{G_2}\})$ est un sous-groupe de $(G_1, \underset{1}{*})$; on l'appelle *noyau* de φ et on le note $\mathrm{Ker}(\varphi)$.

Proposition — *Soit φ un morphisme d'un groupe $(G_1, \underset{1}{*})$ dans un groupe $(G_2, \underset{2}{*})$. Alors φ est injectif si et seulement si* $\mathrm{Ker}(\varphi) = \{e_{G_1}\}$.

ANNEAUX

Définition — ANNEAU —
On appelle anneau tout triplet $(A, +, \times)$*, où* A *est un ensemble,* $+$ *et* $\times$ *des lois internes sur* G *tels que l'on ait :*

1. $(A, +)$ *est un* **groupe abélien**.
2. *La loi* $\times$ *est* **associative**.
3. *La loi* $\times$ *possède un* **élément neutre**.
4. *La loi* $\times$ *est* **distributive par rapport à la loi** $+$.

Si de plus la loi $\times$ *est commutative, on dit que l'anneau est commutatif.*

Définition — SOUS-ANNEAU —
Soit $(A, +, \times)$ *un anneau. On appelle sous-anneau de* $(A, +, \times)$*, tout triplet* $(B, \underset{B}{+}, \underset{B}{\times})$ *où :*
— B *est une partie de* A *stable par les lois* $+$ *et* $\times$;
— 1_A *est élément de* B ;
— $\underset{B}{+}$ *et* $\underset{B}{\times}$ *sont les lois induites respectivement par* $+$ *et* $\times$ *sur* B ;
— $(B, \underset{B}{+}, \underset{B}{\times})$ *est un anneau.*

Remarque — Par un abus on dit que B est un sous-anneau.

Proposition — CARACTÉRISATION DES SOUS ANNEAUX —
Soit $(A, +, \times)$ *un anneau. Une partie* B *de* A *est un sous-anneau de* $(A, +, \times)$ *si et seulement si*

1. 1_A *est élément de* B.
2. B *est stable par* $+$.
3. B *est stable par passage à l'opposé.*
4. B *est stable par* $\times$.

Définition — MORPHISMES D'ANNEAUX —
On appelle morphisme d'un anneau $(A_1, \underset{1}{+}, \underset{1}{\times})$ *dans un anneau* $(A_2, \underset{2}{+}, \underset{2}{\times})$*, toute application* φ *de* A_1 *dans* A_2 *telle que :*

1. $\varphi(1_{A_1}) = 1_{A_2}$.
2. *pour tout* x *et tout* y *éléments de* A_1*,* $\varphi(x \underset{1}{+} y) = \varphi(x) \underset{2}{+} \varphi(y)$.
3. *pour tout* x *et tout* y *éléments de* A_1*,* $\varphi(x \underset{1}{\times} y) = \varphi(x) \underset{2}{\times} \varphi(y)$.

Si de plus φ *est une bijection de* A_1 *sur* A_2*, on dit que* φ *est un isomorphisme d'anneaux.*

Proposition — PROPRIÉTÉS DES MORPHISMES D'ANNEAUX —
Soit φ *un morphisme de l'anneau* $(A_1, \underset{1}{+}, \underset{1}{\times})$ *dans l'anneau* $(A_2, \underset{2}{+}, \underset{2}{\times})$.

1. φ *est un morphisme du groupe* $(A_1, \underset{1}{+})$ *dans le groupe* $(A_2, \underset{2}{+})$.
2. *Pour tout élément* x_1 *de* A_1 *inversible,* $\varphi(x_1^{-1}) = (\varphi(x_1))^{-1}$.
3. *L'image direct d'un sous-anneau de* $(A_1, \underset{1}{+}, \underset{1}{\times})$ *par* φ *est un sous-anneau.*
4. *L'image réciproque d'un sous-anneau de* $(A_2, \underset{2}{+}, \underset{2}{\times})$ *par* φ *est un sous-anneau.*

ANNEAUX INTÈGRES, CORPS

Définition — Anneau intègre —
Un anneau $(A, +, \times)$ est dit intègre si par définition,

1. *L'anneau $(A, +, \times)$ est non trivial.*
2. *L'anneau $(A, +, \times)$ est commutatif.*
3. *Pour tout a et tout b éléments de A, si $a \times b = 0_A$ alors $a = 0_A$ ou $b = 0_A$.*

Définition — Corps —
On appelle corps, tout anneau $(K, +, \times)$ tel que l'on ait :

1. *L'anneau $(K, +, \times)$ est non trivial.*
2. *L'anneau $(K, +, \times)$ est commutatif.*
3. *Tout élément de K distinct de 0_K est inversible.*

Proposition — *Tout corps est un anneau intègre.*

Définition — Sous-corps —
On appelle sous-corps d'un corps $(K, +, \times)$ tout sous-anneau de $(K, +, \times)$ (considéré comme un anneau), qui est un corps.

Proposition — Caractérisation des sous-corps —
Soient un corps $(K, +, \times)$ et k une partie de K. k est un sous-corps de $(K, +, \times)$ si et seulement si

$$\left.\begin{array}{l} 1.\ 1_K \in k, (\text{ ou bien } k \text{ non nul}) \\ 2.\ k \text{ est stable par } +, \\ 3.\ k \text{ est stable par passage à l'opposé}, \\ 4.\ k \text{ est stable par } \times, \end{array}\right\} \text{(sous-anneau)}$$

5. *k est stable par passage à l'inverse.*

Définition — Morphismes de corps —
On appelle morphisme d'un corps $(K_1, \underset{1}{+}, \underset{1}{\times})$ dans un corps $(K_2, \underset{2}{+}, \underset{2}{\times})$, toute application φ de K_1 dans K_2 telle que :

1. *$\varphi(1_{A_1}) = 1_{A_2}$ (ou bien φ non nulle).*
2. *Pour tout x et tout y éléments de K_1, $\varphi(x \underset{1}{+} y) = \varphi(x) \underset{2}{+} \varphi(y)$.*
3. *Pour tout x et tout y éléments de K_1, $\varphi(x \underset{1}{\times} y) = \varphi(x) \underset{2}{\times} \varphi(y)$.*

Si de plus φ est une bijective, on dit que φ est un isomorphisme de corps.

Proposition — Propriétés des morphismes de corps —
Soit φ un morphisme d'un corps $(K_1, \underset{1}{+}, \underset{1}{\times})$ dans le corps $(K_2, \underset{2}{+}, \underset{2}{\times})$.

1. *Pour tout élément x_1 de K_1 non nul, $\varphi(x_1^{-1}) = (\varphi(x_1))^{-1}$.*
2. *L'image direct d'un sous-corps de $(K_1, \underset{1}{+}, \underset{1}{\times})$ par φ est un sous-corps.*
3. *L'image réciproque d'un sous-corps de $(K_2, \underset{2}{+}, \underset{2}{\times})$ par φ est un sous-corps.*

Définition — Idéal —
Soit $(A, +, \times)$ un anneau intègre, dans la pratique $(\mathbf{Z}, +, \times)$, $(\mathbf{K}[X], +, \times)$ etc. On appelle idéal de $(A, +, \times)$, toute partie $\Im_0$ de A telle que :

1. *$(\Im_0, +)$ soit un sous groupe de $(A, +)$.*
2. *Pour tout élément x_0 de $\Im_0$ et tout élément a de A, $a \times x_0 \in \Im_0$.*

Proposition — *Les noyaux des morphismes d'un anneau intègre dans un anneau sont des idéaux.*

ESPACES VECTORIELS

Définition — Espace vectoriel —
On appelle espace vectoriel sur un corps $(\mathbf{K}, +, \times)$ $(\mathbf{K} = \mathbf{R}, \mathbf{C}, \dots)$ *tout triplet* $(\mathbf{E}, \underset{\mathbf{E}}{+}, \cdot)$*, où* $\mathbf{E}$ *est un ensemble,* $\underset{\mathbf{E}}{+}$ *une loi interne sur* $\mathbf{E}$*,* $\cdot$ *une opération de l'ensemble* $\mathbf{K}$ *sur* $\mathbf{E}$*, (*$\mathbf{K} \times \mathbf{E} \to \mathbf{E}\,;\ (\alpha, \mathbf{x}) \mapsto \alpha \cdot \mathbf{x},$*), tel que* $(\mathbf{E}, \underset{\mathbf{E}}{+})$ *soit un groupe abélien et qui jouit des propriétés suivantes :*

1. *Pour tout élément* α *de* $\mathbf{K}$*, tout* $\mathbf{x}$ *et tout* $\mathbf{y}$ *éléments de* $\mathbf{E}$*.*
$$\alpha \cdot (\mathbf{x} \underset{\mathbf{E}}{+} \mathbf{y}) = (\alpha \cdot \mathbf{x}) \underset{\mathbf{E}}{+} (\alpha \cdot \mathbf{y}).$$
2. *Pour tout élément* $\mathbf{x}$ *de* $\mathbf{E}$*, tout* α *et tout* β *éléments de* $\mathbf{K}$*.*
$$(\alpha + \beta) \cdot \mathbf{x} = (\alpha \cdot \mathbf{x}) \underset{\mathbf{E}}{+} (\beta \cdot \mathbf{x}).$$
3. *Pour tout élément* $\mathbf{x}$ *de* $\mathbf{E}$*, tout* α *et tout* β *éléments de* $\mathbf{K}$*.*
$$(\alpha \times \beta) \cdot \mathbf{x} = \alpha \cdot (\beta \cdot \mathbf{x}).$$
4. *Pour tout élément* $\mathbf{x}$ *de* $\mathbf{E}$*,* $1 \cdot \mathbf{x} = \mathbf{x}$.

Conventions d'écriture — $\underset{\mathbf{E}}{+}$ noté $+$, omission de $\cdot$, priorité de $\cdot$ sur $\underset{\mathbf{E}}{+}$.

Définition — Sous-espace vectoriel —
Soit $(\mathbf{E}, +, .)$ *un e.v. sur* $\mathbf{K}$*. On appelle sous-espace vectoriels de* $(\mathbf{E}, +, \cdot)$*, tout triplet* $(\mathbf{H}, \underset{\mathbf{H}}{+}, \underset{\mathbf{H}}{\cdot},)$ *où :*

— $\mathbf{H}$ *est une partie de E stable par* $+$ *et par* $\cdot$*,* $(\mathbf{H} + \mathbf{H} \subset \mathbf{H},\ \mathbf{K} \cdot \mathbf{H} \subset \mathbf{H})$;
— $\underset{\mathbf{H}}{+}$ *la loi induite sur* $\mathbf{H}$ *par* $+$*,* $\underset{\mathbf{H}}{\cdot}$ *l'opération de* $\mathbf{K}$ *sur* $\mathbf{H}$ *induite par* $\cdot$;
— $(\mathbf{H}, \underset{\mathbf{H}}{+}, \underset{\mathbf{H}}{\cdot},)$ *est un espace vectoriel sur* $\mathbf{K}$*.*

Remarque — Abusivement on dit que $\mathbf{H}$ est un sous-espace vectoriel.

Proposition — Caractérisation des sous-espaces vectoriels —
Soit $(\mathbf{E}, +, .)$ *un e.v. sur* $\mathbf{K}$*. Soit* $\mathbf{H}$ *une partie de* $\mathbf{E}$*.* $\mathbf{H}$ *est un sous-e.v. de* $(\mathbf{E}, +, .)$ *si et seulement si*

1. $\mathbf{H}$ *est non vide.*
2. *La partie* $\mathbf{H}$ *est stable par combinaison linéaire.*

Définition — Applications linéaires —
On appelle application linéaire d'un $\mathbf{K}$*-e.v* $(\mathbf{E}, +, \cdot)$ *dans un* $\mathbf{K}$*-e.v.* $(\mathbf{F}, +, \cdot)$*, toute application* $\mathbf{f}$ *de* $\mathbf{E}$ *dans* $\mathbf{F}$ *telle que : pour tout* $(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \in \mathbf{E}^2$*, pour tout* $(\alpha, \beta) \in \mathbf{K}^2$*,* $\mathbf{f}(\alpha \cdot \mathbf{x} + \beta \cdot \mathbf{y}) = \alpha \cdot \mathbf{f}(\mathbf{x}) + \beta \cdot \mathbf{f}(\mathbf{y})$.

Proposition — Propriétés des applications linéaires —
Soit $\mathbf{f}$ *une application linéaire d'un e.v.* $(\mathbf{E}, +, \cdot)$ *dans un e.v.* $(\mathbf{F}, +, \cdot)$*.*

1. $\mathbf{f}(\mathbf{0_E}) = \mathbf{0_F}$.
2. *Si* $\mathbf{H}$ *est un sous-e.v.* $(\mathbf{E}, +, \cdot)$*, alors* $\mathbf{f}(\mathbf{H})$*, en est un de* $(\mathbf{F}, +, \cdot)$*.*
3. *Si* $\mathbf{H}'$ *est un sous-e.v. de* $(\mathbf{F}, +, \cdot)$*, alors* $\mathbf{f}^{-1}(\mathbf{H}')$*, en est un de* $(\mathbf{E}, +, \cdot)$*.*

Cas particulier — $\mathbf{f}^{-1}(\{\mathbf{0_F}\})$ *est un sous-e.v. de* $(\mathbf{E}, +, \cdot)$; *on l'appelle noyau de* $\mathbf{f}$ *et on le note* $\mathrm{Ker}(\mathbf{f})$*.* $\mathbf{f}$ *est injectif si et seulement si* $\mathrm{Ker}(\mathbf{f}) = \{\mathbf{0_E}\}$*.*

ALGÈBRES

Définition — ALGÈBRE —
On appelle algèbre sur un corps $(\mathbf{K},+,\times)$ $(\mathbf{K}=\mathbf{R},\mathbf{C},\dots)$ *tout quadruplet* $(\mathbf{E},+,\times,\cdot)$*, où* $\mathbf{E}$ *est un ensemble,* $+$ *et* $\times$ *des lois internes sur* $\mathbf{E}$*,* $\cdot$ *une opération de l'ensemble* $\mathbf{K}$ *sur* $\mathbf{E}$*, tel que :*

1. $(E,+,\times)$ *soit un anneau.*
2. $(E,+,\cdot)$ *soit un espace vectoriel sur* $\mathbf{K}$*.*
3. *Pour tout* α *élément* $\mathbf{K}$*, tout* $\mathbf{x}$ *et tout* $\mathbf{y}$ *éléments de* $\mathbf{E}$*.*

$$(\alpha\cdot\mathbf{x})\times\mathbf{y}=\mathbf{x}\times(\alpha\cdot\mathbf{y})=\alpha\cdot(\mathbf{x}\times\mathbf{y}).$$

Si de plus la loi $\times$ *est commutative on dit que l'algèbre est commutative.*

Définition — SOUS-ALGÈBRE —
Soit $(\mathbf{E},+,\times,\cdot)$ *une algèbre sur* $\mathbf{K}$*. On appelle sous-algèbre de* $(\mathbf{E},+,\times,\cdot)$*, tout quadruplet* $(\mathbf{H},\underset{\mathbf{H}}{+},\underset{\mathbf{H}}{\times},\underset{\mathbf{H}}{\cdot})$ *où :*
- $\mathbf{H}$ *est une partie de* E *stable par* $+$*, par* $\times$ *et par* $\cdot$ *et contenant l'unité de l'anneau* $(\mathbf{E},+,\times,)$;
- $\underset{\mathbf{H}}{+}$*,* $\underset{\mathbf{H}}{\times}$ *les lois induites sur* $\mathbf{H}$ *respectivement par* $+$ *et* $\times$*,* $\underset{\mathbf{H}}{\cdot}$ *l'opération de* $\mathbf{K}$ *sur* $\mathbf{H}$ *induite par* $\cdot$;
- $(\mathbf{H},\underset{\mathbf{H}}{+},\underset{\mathbf{H}}{\times},\underset{\mathbf{H}}{\cdot})$ *est une algèbre sur* $\mathbf{K}$*.*

Remarque — abusivement on dit que $\mathbf{H}$ est une sous-algèbre.

Proposition — *Soit* $(\mathbf{E},+,\times,\cdot)$ *un e.v. sur* $\mathbf{K}$*. Une partie* $\mathbf{H}$ *de* $\mathbf{E}$ *est une sous-algèbre de* $(\mathbf{E},+,\times,\cdot)$ *si et seulement si* $\mathbf{H}$ *est un sous-anneau de* $(\mathbf{E},+,\times)$ *et un sous-e.v.* $(\mathbf{E},+,\cdot)$*.*

Proposition — CARACTÉRISATION DES SOUS-ALGÈBRES —
Soit $(\mathbf{E},+,\times,\cdot)$ *un e.v. sur* $\mathbf{K}$*. Soit* $\mathbf{H}$ *une partie de* $\mathbf{E}$*.* $\mathbf{H}$ *est une sous-algèbre de* $(\mathbf{E},+,\times,\cdot)$ *si et seulement si*

1. $\mathbf{1}_E\in H$*.*
2. *La partie* $\mathbf{H}$ *est stable par combinaison linéaire.*
3. *La partie* $\mathbf{H}$ *est stable par* $\times$*.*

Définition —MORPHISME D'ALGÈBRES —
Soient $(\mathbf{E},+,\times,\cdot)$ *et* $(\mathbf{F},+,\times,\cdot)$ *des algèbres sur* $\mathbf{K}$*. On appelle morphisme de l'algèbre* $(\mathbf{E},+,\cdot)$ *dans l'algèbre* $(\mathbf{F},+,\cdot)$ *toute application* $\mathbf{f}$ *de* $\mathbf{E}$ *dans* $\mathbf{F}$ *qui soit un morphisme de l'anneau* $(\mathbf{E},+,\times)$ *dans l'anneau* $(\mathbf{F},+,\times)$ *et une application linéaire de l'e.v.* $(\mathbf{E},+,\cdot)$ *dans l'e.v.* $(\mathbf{F},+,\cdot)$; *c'est-à-dire qui vérifie :*
- $\mathbf{f}(1_{\mathbf{E}})=1_{\mathbf{F}}$*,*
- *Pour tout* $(\mathbf{x},\mathbf{y})\in\mathbf{E}^2$*, tout* $(\alpha,\beta)\in\mathbf{K}^2$*,* $\mathbf{f}(\alpha\cdot\mathbf{x}+\beta\cdot\mathbf{y})=\alpha\cdot\mathbf{f}(\mathbf{x})+\beta\cdot\mathbf{f}(\mathbf{y})$;
- *Pour tout* $(\mathbf{x},\mathbf{y})\in\mathbf{E}^2$*,* $\mathbf{f}(\mathbf{x}\times\mathbf{y})=\mathbf{f}(\mathbf{x})\times\mathbf{f}(\mathbf{y})$*.*

Proposition — PROPRIÉTÉS DES MORPHISMES D'ALGÈBRES —
Soit $\mathbf{f}$ *un morphisme d'une algèbre* $(\mathbf{E},+,\times,\cdot)$ *dans un algèbre* $(\mathbf{F},+,\times,\cdot)$*.*

1. *Si* $\mathbf{H}$ *est un sous-algèbre de* $(\mathbf{E},+,\times,\cdot)$*, alors* $\mathbf{f}(\mathbf{H})$*, en est une de* $(\mathbf{F},+,\times,\cdot)$*.*
2. *Si* $\mathbf{H}'$ *est un sous-algèbre de* $(\mathbf{F},+,\times,\cdot)$*, alors* $\mathbf{f}^{-1}(\mathbf{H}')$*, en est une de* $(\mathbf{E},+,\times,\cdot)$*.*