š

MP* Lycée Kérichen **2022-2023**

Interrogation de rentrée

Algèbre générale

1. Définition d'un anneau[1]. *On appelle anneau* ...

2. Caractérisation d'un sous-anneau . *Soit* $(A, +\times)$ *un anneau. Une partie* H *de* A *est un sous-anneau de* A *si et seulement si...*

3. Morphisme de groupes. *On appelle morphisme du groupe* $(G, *)$ *dans le groupe* $(H, \times)$ *toute application* ϕ *de* G *dans* H *telle que...*

4. Théorème de Bezout pour les polynômes. *Soient* A *et* B *des éléments de* $\mathbf{R}[X]$...

Algèbre linéaire

1. On définira complétement les propriétés

1. Définition d'un espace vectoriel[2]. Soit $(\mathbf{K}, +, \times)$ un corps. On appelle espace vectoriel sur le corps $\mathbf{K}$ tout triplet $(\mathbf{E}, \underset{\mathbf{E}}{+}, \cdot)$ où...

2. Définition de l'image et du noyau d'une application linéaire f d'un $\mathbf{K}$-espace vectoriel $\mathbf{E}$ dans un $\mathbf{K}$-espace vectoriel $\mathbf{F}$. Formule du rang.

3. Soit $A = (a_{i,j})_{\substack{i=1\dots n \\ j=1\dots p}}$ une matrice à n lignes p colonnes à coefficients dans $\mathbf{C}$, et $B = (b_{i,j})_{\substack{i=1\dots n' \\ j=1\dots p'}}$ une matrice à n' lignes et p' colonnes à coefficients dans $\mathbf{C}$ Une condition nécessaire et suffisante sur n, n', p, p' pour que soit défini le produit AB est......................... Lorsque cette condition est réalisée, AB est une matrice à........lignes et......... colonnes et son élément situé sur la ième ligne et jème colonne est

   $c_{i,j} = \dots$

4.) Soit $A = (a_{i,j})_{\substack{i=1\dots n \\ j=1\dots n}}$ une matrice à coefficient dans un corps $\mathbf{K}$. Alors

   $\mathrm{Det}(A) = \sum_{\cdot} \cdots$

Fonction d'une variable réelle

2. On notera toute les lois $\cdot$, $+$, $\underset{\mathbf{E}}{+}$, $\times$

1. Tacer les graphes des applications arccos et tan.

2. Développement limités au voisinage de 0 à l'ordre p.
   (a) $\ln(1+x) =$ ....

   (b) $\cos(x) =$ ....

   (c) $(1+x)^{\alpha} =$ ....
   où α est un réel.

3. Une famille $(u_i)_{i\in I}$ est dite sommable si.............................

   Théorème de sommation par paquets : si I est réunion disjointe des I_j pour $j \in J$ et si $(u_i)_{i\in I}$ est à valeurs dans $\mathbf{R}_+$ alors...

4. Formule de Taylor avec reste intégrale. *Soit f une application de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$ de classe........alors pour tout a et tout b réels,*

$$f(b) = f(a) + \sum_{\cdots\cdots}^{\cdots\cdots} \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots + \int_{\cdots}^{\cdots} \cdots\cdots\cdots$$

Calcul différentiel, équations différentielles

1. (a) $\frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}t^2} + \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} + y = 0$.
   $\mathbf{R} \to \mathbf{R}\,; t \mapsto$ ....
   (b) $\frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}t^2} + y = 0$.
   $\mathbf{R} \to \mathbf{R}\,; t \mapsto$ ....
   (c) $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} - 2y = e^t$.
   $\mathbf{R} \to \mathbf{R}\,; t \mapsto$ ....

2. Soit f une application définie sur un intervalle I de classe ....à valeurs réelles ou complexes. L'équation différentielle linéaire du premier ordre $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = f(t)y$ admet des solutions définies sur I, ce sont les applications :
   $I \to \mathbf{R}\,; t \mapsto$ ....

3. Soient f une application de $\mathbf{R}^2$ dans $\mathbf{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$, ϕ et ψ des applications de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$. Soit l'application
$$F\ :\ \mathbf{R} \to \mathbf{R}\,;\ t \mapsto f(\phi(t), \psi(t)).$$
   Alors F est de classe $\mathcal{C}^1$ (admis) et pour tout réel t :
   $F'(t) =$ ....

4. Soient f une application de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$, ϕ une application de $\mathbf{R}^2$ dans $\mathbf{R}$, et
$$F\ :\ \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}\,;\ (x, y) \mapsto f(\phi(x, y)).$$
   Alors F est de classe $\mathcal{C}^1$ (admis) et pour tout couple (x, y) de réel :
$$\frac{\partial F}{\partial x}(x, y) = \text{...............................}$$
$$\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}(x, y) = \text{...}$$

Espaces euclidiens Probabilité

1. Soit $(\mathbf{E}, < \cdot | \cdot >)$ un espace euclidien. Inégalité de Cauchy-Schwarz : pour tout couple $(\vec{x}, \vec{y})$ d'éléments de $\mathbf{E}$,

2. Formule de polarisation (une suffit). Soit $\vec{x}$ et $\vec{y}$ des vecteurs d'un espace préhilbertien $(\mathbf{E}, \langle \cdot | \cdot \rangle)$. Alors...............

3. *Formule de Bayes* : Soient $(\Omega,)$ un espace probabilisé fini et $(A_1, \ldots, A_n)$ un système complets d'événements de probabilité non nulle. Alors pour toute partie B de Ω de probabilité non nulle, et tout $j \in \{1, \ldots, n\}$
$$\mathbf{P}(A_j | B) = \frac{\mathbf{P}(\text{........})\mathbf{P}(\text{..........})}{\sum_{i=1}^{n} \text{...........}}.$$

4. Soit X une variable aléatoire réelle définie sur Ω Compléter les formules
$$\mathrm{E}(X) = \sum_{\omega \in \Omega} \text{..................}$$
$$\mathrm{E}(X) = \sum_{x \in E} \text{.............................}$$