Devoir Maison nº 1

À rédiger pour le 2 septembre 2025.

Exercice 1. On se propose de montrer de deux manières différentes le résultat suivant :

Pour tout entier $n \geqslant 1$, il existe un et un seul polynôme P_n tel que pour tout réel θ,
$$\cos(n\theta) = P_n(\cos\theta). \tag{1}$$

On dit que P_n est le n^e polynôme de Tchebychev.

1. *Unicité*. Soit un entier $n \geqslant 1$. On suppose qu'il existe des polynômes P_n et $\widetilde{P}_n$ tels que pour tout réel θ,
$$\cos(n\theta) = P_n(\cos\theta) = \widetilde{P}_n(\cos\theta).$$
Montrer que $P_n = \widetilde{P}_n$.
2. *Méthode par les nombres complexes*.
Soit n un entier naturel.
   (a) Soit θ un réel. Montrer que $\cos(n\theta) = \mathrm{Re}\Big((\cos\theta + i\sin\theta)^n\Big)$. En déduire l'existence du polynôme P_n.
   (b) Montrer que le polynôme P_n est de degré n et préciser son coefficient dominant c_n.
   Indication : voir fiche de colle de MPSI numéro 1.
3. *Méthode par récurrence*.
   (a) Soit θ un réel.
   Exprimer pour tout entier $n \geqslant 2$, $\cos((n+1)\theta)$ au moyen de $\cos((n-1)\theta)$, $\cos(n\theta)$ et $\cos(\theta)$.
   (b) En utilisant la sous-question précédente, montrer par récurrence l'existence de la suite $(P_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ des polynômes de Tchebychev, dont on précisera au passage le degré et le coefficient dominant c_n.
4. Soit l'application
$$\Phi \ : \ \mathbf{R}[X]^2 \to \mathbf{R}\,; \ (P, Q) \mapsto \int_0^{2\pi} P(\cos\theta)Q(\cos(\theta))\,d\theta.$$
   (a) Montrer que Φ est un produit scalaire sur $\mathbf{R}[X]$, On le notera $\langle\cdot|\cdot\rangle$.
   On comparera avec la feuille de colle de la semaine 27 question 2.
   (b) Montrer que $(P_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est une famille orthogonale.

Exercice 2. Par E on désigne un $\mathbf{R}$-espace vectoriel de dimension 2, Id est l'application identité de E et f est un endomorphisme de E.
Soit un entier $n \geqslant 2$ (cet entier n'est pas *a priori* la dimension de E). On suppose qu'il existe un vecteur x_0 de E tel que soient vérifiées les propriétés suivantes :

— la famille $(x_0, f(x_0), f^2(x_0), \dots, f^{n-1}(x_0))$ est constituée de vecteurs deux à deux distincts ;
— on a l'égalité $f^n(x_0) = x_0$;
— la famille $(x_0, f(x_0), f^2(x_0), \dots, f^{n-1}(x_0))$ est une famille génératrice de E.

On dit que f est *cyclique*, et que la famille $(x_0, f(x_0), f^2(x_0), \dots, f^{n-1}(x_0))$ est un cycle de f.

1. Montrer que $f^n = \mathrm{Id}$ et que pour tout $k \in [\![1, n-1]\!]$, $f^k \neq \mathrm{Id}$.
2. Montrer que la famille $(x_0, f(x_0))$ est une famille libre de E, et en déduire que la famille (Id, f) est une famille libre de L(E).
3. Posons $e_1 = x_0$ et $e_2 = f(x_0)$. La question précédente a montré que (e_1, e_2) est une base de E.
   (a) Justifier l'existence d'un couple (a, b) de réels, tels que :
$$\mathrm{Mat}_{(e_1,e_2)}(f) = \begin{pmatrix} 0 & a \\ 1 & b \end{pmatrix}.$$
   Montrer que $f^2 = a\mathrm{Id} + bf$.

(b) Montrer qu'il existe des suites $(\alpha_p)_{p\in\mathbf{N}}$ et $(\beta_p)_{p\in\mathbf{N}}$ telles que pour tout $p \in \mathbf{N}$,

$$f^p = \alpha_p \mathrm{Id} + \beta_p f.$$

Montrer que pour tout entier $p \in \mathbf{N}$,

$$\alpha_p\beta_{p+1} - \beta_p\alpha_{p+1} = (-a)^p.$$

Ind. : on pourra calculer $\det(f^p)$ de deux façons différentes.

(c) Déterminez α_n, β_n, α_{n+1} et β_{n+1}.
En déduire que $a = \pm 1$.

4. Dans cette question, on suppose que le polynôme $X^2 - bX - a$ possède deux racines réelles distinctes λ et μ.

(a) On pose $e_1' = ae_1 + \lambda e_2$ et $e_2' = ae_1 + \mu e_2$. Montrer que (e_1', e_2') est une base de E, puis déterminer la matrice de f dans cette base.

(b) Quelles sont les valeurs possibles de λ et de μ ?
Indication : utiliser la première question. Caractériser géométriquement l'endomorphisme f.

Exercice 3. Toutes les variables aléatoires seront définies sur un même univers Ω.
Soient T une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbf{N}$ et $(X_0, X_1, \dots, X_n, \dots)$ une suite de variables aléatoires à valeurs dans $\mathbf{N}$ de même loi. On suppose les variables aléatoires T, X_0, X_1,...,X_n, indépendantes.
On définit pour tout $n \in \mathbf{N}$ la variable aléatoire $S_n = \sum_{i=0}^{n} X_i$, et la variable aléatoire $S = S_T$:

$$\forall \omega \in \Omega,\ S(\omega) = \sum_{i=0}^{T(\omega)} X_i(\omega).$$

On dira qu'une variable aléatoire X à valeurs dans $\mathbf{N}$ admet une espérance finie si la famille $\big(n\mathbf{P}(X = n)\big)_{n\in\mathbf{N}}$ converge et, si tel est le cas, l'espérance E(X) est la somme de cette famille :

$$E(X) = \sum_{n=0}^{+\infty} n\mathbf{P}(X = n).$$

On pourra dans la suite utiliser la **linéarité** de l'espérance.
On suppose que T et X_1 ont une espérance finie. le but de l'exercice est de montrer la *formule de Wald* :

$$E(S) = E(X_1)E(T).$$

1. (a) Montrer que $(\{T = n\})_{n\in\mathbf{N}}$ est un système complet d'événements.

(b) Montrer, en prenant un exemple simple de loi pour X_1, qu'en général, T et S ne sont pas indépendantes.
Soit $n \in \mathbf{N}$, Les variables T et S_n sont-elles indépendantes ?

(c) Montrer que pour tout $k \in \mathbf{N}$,

$$\mathbf{P}(S = k) = \sum_{n=1}^{+\infty} \mathbf{P}(S_n = k)\mathbf{P}(T = n).$$

2. (a) Montrer que S est d'espérance finie et que

$$E(S) = E(X_1)E(T).$$

On pourra appliquer le théorème de Fubini pour les familles positives.

(b) **5/2** Proposer une Formule analogue pour la variance de S en supposant que X_1 et T admettent une variance.

3. Le nombre T d'œufs pondus lors de la ponte annuelle par un Prosopocoilus inclinatus suit la loi suivante :

$$\mathbf{P}(T = k) = e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!},\ k \in \mathbf{N},$$

où λ est un réel strictement positif. Chaque œuf pondu à une chance sur trois d'éclore.
Quel est le nombre moyen de larves qui naissent à chaque ponte ?