Programme de colles n°1

1 Révisions de probabilités de sup.

— Probabilités sur un ensemble fini.
— Variables aléatoires.

2 Algèbre linéaire : révisions de MPSI, utilisation pratique de la diagonalisation et trigonalisation

— Espace vectoriels, familles libres, génératrices bases, somme directes, sous-espaces supplémentaires.
— Rang d'un endomorphisme, théorème et formule du rang, polynômes d'interpolation de Lagrange.
— *À venir : semaine prochaine formes linéaires, hyperplans...*
— Matrices :
  — Matrices semblables, deux matrices semblables ont même trace, trace d'un endomorphisme.
  — Matrices équivalentes : des matrices sont équivalentes si et seulement si elles ont même rang.
— *Semaine prochaine diagonalisation, trigonalisation, (point de vue géométrique et pratique).*

Les questions de cours ou exercices avec un astérisque $\star$ pour : C. Brévignon, Malo Le Grognec, Augustin Ravasse, Lucas Pan, Anaël Pelé, Arthur Quendo, Noémie Manach, Martin Pina-Silas, Aiden Legal, Kevynn Boucher.

Les questions de cours ou exercices avec deux astérisques $\star\star$ pour : C. Brévignon, Malo Le Grognec, Augustin Ravasse.

3 Questions de cours

1. Théorème du rang : l'image d'une application linéaire est isomorphe à un supplémentaire du noyau, application si $\mathbf{F}$ et $\mathbf{F}'$ sont des supplémentaires d'un même sous-espace vectoriel alors ils sont isomorphes (p. 40).
2. Tout élément de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbf{K})$ de rang r est équivalent à la matrice J_r. (Preuve algébrique cette semaine) .
3. Polynômes d'interpolation : existence unicité puis expression (page 42).

4 Récitation d'exercices

1. On se donne n urnes dans lesquelles on dispose au hasard et uniformément m boules. Soit $k \in \mathbf{N}$.
   (a) Quel est la probabilité $p_{m,n}$ de l'événement « la première urne contienne k boules » ?
   (b) Soit c un entier naturel et une suite d'entier naturels $(m_i)_{i\in\mathbf{N}}$ telle que $m_i \underset{i\to+\infty}{\sim} ci$. Montrer que $p_{m_i,i}$ tend vers $e^{-c}\frac{c^k}{k!}$, lorsque i tend vers $+\infty$.
   (c) $\star$ Déterminer la probabilité $q_{m,n}$ de l'événement « Chaque urne contient au plus une boule ». Montrer que $q_{m,i}$ tend vers 1 lorsque i tend vers $+\infty$.
   Soit c un entier naturel et une suite d'entier naturels $(m_i)_{i\in\mathbf{N}}$ telle que $m_i \underset{i\to+\infty}{\sim} c\sqrt{i}$. Montrer que
$$q_{m_i,i} \underset{i\to+\infty}{\to} \exp\left(-\frac{c^2}{2}\right).$$
2. Soit V une variable aléatoire définie sur un univers (fini) Ω, à valeurs dans $\{0,...,n\}$. Montrer que $\mathrm{E}(V) = \sum_{i=1}^{n} \mathbf{P}(V \geq i)$.
   Soient X et Y des variables alatoires définies sur Ω, indépendantes et qui suivent la loi uniforme sur $\{0,...,n\}$. Calculer $\mathrm{E}(\min(X,Y))$.

3. On considère une urne contenant a boules noires et b boules blanches. Après chaque tirage la boule extraite et remise dans l'urne avec c boules de sa couleur. Déterminer la probabilité $p_n(a,b)$ que la n^{e} boule tirée soit blanche. *On raisonera par récurrence.*

4. $\star$ Deux amis A et B jouent à un jeu chacun leur tour selon le principe suivant :
   — chaque partie est indépendante des autres ;
   — le joueur A commence ;
   — si un joueur perd sa partie alors l'autre joueur joue la prochaine partie ;
   — si un joueur gagne sa partie, alors il joue la partie suivante.
   — le joueur A gagne une partie avec une probabilité a, ($a \in]0,1[$) et le joueur B gagne une partie avec une probabilité b, ($b \in]0,1[$).

   Quelle est la probabilité que le joueur A remporte sa première partie avant le joueur B ?

5. Soit ℓ une forme linéaire sur $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ telle que pour tout A et tout B éléments de $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$, $\ell(AB) = \ell(BA)$; montrer qu'il existe $k \in \mathbf{R}$ tel que $\ell = k\mathrm{tr}$.

6. Montrer que des éléments de $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$, semblables comme éléments de $\mathcal{M}_n(\mathbf{C})$ sont semblables comme éléments de $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$.

7. $\star$ Même question pour équivalents. On donnera une preuve par densité algébrique, une en montrant l'invariance du rang par passage de $\mathbf{C}$ à $\mathbf{R}$, ce de deux façons.

8. $\star\star$ Montrer que des éléments de $\mathcal{M}_n(\mathbf{Q})$, semblables comme éléments de $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ sont semblables comme éléments de $\mathcal{M}_n(\mathbf{Q})$.

9. — THÉORÈME D'HADAMARD —

   Soit A un élément de $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$, tel que pour $i = 1, 2, \ldots, n$ on ait : $|a_{i,i}| > \sum_{\substack{j=1,\ldots,n,\\ j\neq i,}} |a_{i,j}|$. Montrer que A est inversible.

10. $\star$ $\mathbf{R}^n$ est muni de sa structure euclidienne canonique Pour toute permutation σ élément de S_n, on note P_σ la matrice de permutation associée à σ On pose : $P := \frac{1}{n!}\sum_{\sigma\in \mathrm{S}_n} P_\sigma$.
    (a) Montrer que l'endomorphisme p de $\mathbf{R}^n$ associé canoniquement à P est une projection dont on déterminera l'image et le noyau.
    (b) Montrer que p est orthogonale.
    (c) On munit S_n d'une probabilité uniforme et l'on désigne par X la variable aléatoire qui à σ élément de S_n associe le nombre de points fixes de σ. Calculer l'espérence de X.

11. Soit n un entier naturel non nul et A un élément de $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$. Montrer que l'ensemble E, défini par
$$E = \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R}), AMA = 0_n\},$$
    est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ dont on précisera la dimension en fonction du rang de A.

12. $\star\star$ Soit $\mathbf{E}$ un espace de dimension finie. Montrer que les seuls idéaux bilatères[1] de $\mathcal{L}(\mathbf{E})$ sont $\{O_{\mathcal{L}(\mathbf{E})}\}$ et $\mathcal{L}(\mathbf{E})$.

    Le résultat demeure-t-il si l'on ne suppose plus $\mathbf{E}$ de dimension finie ?

13. Effet de la multiplication à droite ou à gauche par une transvection, inverse d'une transvection.

14. $\star$ Montrer que tout élément de $\mathrm{SL}_n(\mathbf{R})$ est un produit de matrices de transvection.

15. $\star\star$ Déterminer les éléments de $\mathcal{M}_n(\mathbf{C})$ dont la classe de similitude est bornée.

16. $\star\star$ — THÉORÈME DE FROBENIUS-ZOLOTAREV — Soit f une application de $\mathcal{M}_n(\mathbf{C})$ dans $\mathbf{C}$ *continue* telle que :
    i. $f(I_n) = 1$;
    ii. pour tout $(A,B) \in \mathcal{M}_n(\mathbf{C})^2$, $f(AB) = f(A)f(B)$.
    Montrer qu'il existe une application g de $\mathbf{C}$ dans $\mathbf{C}$ continue vérifiant $g(1) = 1$ et $g(ab) = g(a)g(b)$ pour tout couple (a,b) de complexes, telle que :
$$f = g \circ \det.$$

1. Un idéal bilatère est un sous-groupe stable par multiplication à gauche et à droite par un élément de $\mathcal{L}(\mathbf{E})$.