Programme de colles n°1

1 Révisions de probabilités de sup.

— Probabilités sur un ensemble fini.
— Variables aléatoires.

2 Algèbre linéaire : révisions de MPSI, utilisation pratique de la diagonalisation et trigonalisation

— Espace vectoriels, familles libres, génératrices bases, somme directes, sous-espaces supplémentaires.
— Rang d'un endomorphisme, théorème et formule du rang, polynômes d'interpolation de Lagrange.
— *À venir : semaine prochaine formes linéaires, hyperplans...*
— Matrices :
  — Matrices semblables, deux matrices semblables ont même trace, trace d'un endomorphisme.
  — Matrices équivalentes : des matrices sont équivalentes si et seulement si elles ont même rang.
— *Semaine prochaine diagonalisation, trigonalisation, (point de vue géométrique et pratique).*

Les questions de cours ou exercices avec un astérisque $\star$ pour : C. Brévignon, Malo Le Grognec, Augustin Ravasse, Lucas Pan, Anaël Pelé, Arthur Quendo, Noémie Manach, Martin Pina-Silas, Aiden Legal, Kevynn Boucher.

Les questions de cours ou exercices avec deux astérisques $\star\star$ pour : C. Brévignon, Malo Le Grognec, Augustin Ravasse.

3 Questions de cours

1. Théorème du rang : l'image d'une application linéaire est isomorphe à un supplémentaire du noyau, application si $\mathbf{F}$ et $\mathbf{F}'$ sont des supplémentaires d'un même sous-espace vectoriel alors ils sont isomorphes (p. 40).
2. Tout élément de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbf{K})$ de rang r est équivalent à la matrice J_r. (Preuve algébrique cette semaine) .
3. Polynômes d'interpolation : existence unicité puis expression (page 42).

4 Récitation d'exercices

1. On se donne n urnes dans lesquelles on dispose au hasard et uniformément m boules. Soit $k \in \mathbf{N}$.
   (a) Quel est la probabilité $p_{m,n}$ de l'événement « la première urne contienne k boules » ?
   (b) Soit c un entier naturel et une suite d'entier naturels $(m_i)_{i\in\mathbf{N}}$ telle que $m_i \underset{i\to+\infty}{\sim} ci$. Montrer que $p_{m_i,i}$ tend vers $e^{-c}\frac{c^k}{k!}$, lorsque i tend vers $+\infty$.
   (c) $\star$ Déterminer la probabilité $q_{m,n}$ de l'événement « Chaque urne contient au plus une boule ». Montrer que $q_{m,i}$ tend vers 1 lorsque i tend vers $+\infty$.
   Soit c un entier naturel et une suite d'entier naturels $(m_i)_{i\in\mathbf{N}}$ telle que $m_i \underset{i\to+\infty}{\sim} c\sqrt{i}$. Montrer que
$$q_{m_i,i} \underset{i\to+\infty}{\to} \exp\left(-\frac{c^2}{2}\right).$$
2. Soit V une variable aléatoire définie sur un univers (fini) Ω, à valeurs dans $\{0,...,n\}$. Montrer que $\mathrm{E}(V) = \sum_{i=1}^{n} \mathbf{P}(V \geq i)$.
   Soient X et Y des variables alatoires définies sur Ω, indépendantes et qui suivent la loi uniforme sur $\{0,...,n\}$. Calculer $\mathrm{E}(\min(X,Y))$.

3. On considère une urne contenant a boules noires et b boules blanches. Après chaque tirage la boule extraite et remise dans l'urne avec c boules de sa couleur. Déterminer la probabilité $p_n(a,b)$ que la n^{e} boule tirée soit blanche. *On raisonera par récurrence.*

4. $\star$ Deux amis A et B jouent à un jeu chacun leur tour selon le principe suivant :
   — chaque partie est indépendante des autres ;
   — le joueur A commence ;
   — si un joueur perd sa partie alors l'autre joueur joue la prochaine partie ;
   — si un joueur gagne sa partie, alors il joue la partie suivante.
   — le joueur A gagne une partie avec une probabilité a, ($a \in]0,1[$) et le joueur B gagne une partie avec une probabilité b, ($b \in]0,1[$).

   Quelle est la probabilité que le joueur A remporte sa première partie avant le joueur B ?

5. Soit ℓ une forme linéaire sur $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ telle que pour tout A et tout B éléments de $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$, $\ell(AB) = \ell(BA)$; montrer qu'il existe $k \in \mathbf{R}$ tel que $\ell = k\mathrm{tr}$.

6. Montrer que des éléments de $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$, semblables comme éléments de $\mathcal{M}_n(\mathbf{C})$ sont semblables comme éléments de $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$.

7. $\star$ Même question pour équivalents. On donnera une preuve par densité algébrique, une en montrant l'invariance du rang par passage de $\mathbf{C}$ à $\mathbf{R}$, ce de deux façons.

8. $\star\star$ Montrer que des éléments de $\mathcal{M}_n(\mathbf{Q})$, semblables comme éléments de $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ sont semblables comme éléments de $\mathcal{M}_n(\mathbf{Q})$.

9. — Théorème d'Hadamard —

   Soit A un élément de $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$, tel que pour $i = 1, 2, \ldots, n$ on ait : $|a_{i,i}| > \sum_{\substack{j=1,\ldots,n,\\ j\neq i,}} |a_{i,j}|$. Montrer que A est inversible.

10. $\star$ $\mathbf{R}^n$ est muni de sa structure euclidienne canonique Pour toute permutation σ élément de S_n, on note P_σ la matrice de permutation associée à σ On pose : $P := \frac{1}{n!} \sum_{\sigma \in \mathrm{S}_n} P_\sigma$.
    (a) Montrer que l'endomorphisme p de $\mathbf{R}^n$ associé canoniquement à P est une projection dont on déterminera l'image et le noyau.
    (b) Montrer que p est orthogonale.
    (c) On munit S_n d'une probabilité uniforme et l'on désigne par X la variable aléatoire qui à σ élément de S_n associe le nombre de points fixes de σ. Calculer l'espérence de X.

11. Soit n un entier naturel non nul et A un élément de $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$. Montrer que l'ensemble E, défini par
$$E = \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R}), AMA = 0_n\},$$
    est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ dont on précisera la dimension en fonction du rang de A.

12. $\star\star$ Soit $\mathbf{E}$ un espace de dimension finie. Montrer que les seuls idéaux bilatères [1] de $\mathcal{L}(\mathbf{E})$ sont $\{O_{\mathcal{L}(\mathbf{E})}\}$ et $\mathcal{L}(\mathbf{E})$.

    Le résultat demeure-t-il si l'on ne suppose plus $\mathbf{E}$ de dimension finie ?

13. Effet de la multiplication à droite ou à gauche par une transvection, inverse d'une transvection.

14. $\star$ Montrer que tout élément de $\mathrm{SL}_n(\mathbf{R})$ est un produit de matrices de transvection.

15. $\star\star$ Déterminer les éléments de $\mathcal{M}_n(\mathbf{C})$ dont la classe de similitude est bornée.

16. $\star\star$ — Théorème de Frobenius-Zolotarev — Soit f une application de $\mathcal{M}_n(\mathbf{C})$ dans $\mathbf{C}$ *continue* telle que :
    i. $f(I_n) = 1$;
    ii. pour tout $(A,B) \in \mathcal{M}_n(\mathbf{C})^2$, $f(AB) = f(A)f(B)$.
    Montrer qu'il existe une application g de $\mathbf{C}$ dans $\mathbf{C}$ continue vérifiant $g(1) = 1$ et $g(ab) = g(a)g(b)$ pour tout couple (a,b) de complexes, telle que :
$$f = g \circ \det.$$

1. Un idéal bilatère est un sous-groupe stable par multiplication à gauche et à droite par un élément de $\mathcal{L}(\mathbf{E})$.

Programme de colles n°2

5 Algèbre linéaire : révisions de MPSI, utilisation pratique de la diagonalisation et trigonalisation

Par $\mathbf{K}$ on désigne $\mathbf{R}$ ou $\mathbf{C}$

- Espace vectoriels, familles libres, génératrices bases, base canonique de l'ensemble des applications polynômiales à p variables, somme directes, sous-espaces supplémentaires.
- Rang d'un endomorphisme, théorème et formule du rang, polynômes d'interpolation de Lagrange.
- Formes linéaires, hyperplans.
- Matrices :
  - Matrices semblables, deux matrices semblables ont même trace, trace d'un endomorphisme. Matrices équivalentes : des matrices sont équivalentes si et seulement si elles ont même rang.
  - Opérations sur les lignes et colonnes.
- Diagonalisation. (*il s'agit d'une première approche géométrique axée sur la pratique, les applications le polynôme caractéristique. Un prochain chapitre traitera des polynômes d'endomorphismes et des questions subtiles de réduction*)
  On désigne u un endomorphisme d'un $\mathbf{K}$ espace vectoriel $\mathbf{E}$ de dimension finie non nulle. On note $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k$ les valeurs propres deux à deux distinctes de u, d'ordre de multiplicité respectifs $m_1, m_2, \ldots, m_k$.
  - Valeurs propres, vecteurs propres, espaces propres : les espaces propres sont en sommes directes. Espaces propres de deux endomorphismes qui commutent.
  - Polynôme caractéristique (définitions, coefficients remarquables), polynôme caractéristique d'un endomorphisme induit.
  - Diagonalisation des matrices et des endomorphismes. Définition. l'endomorphisme u diagonalisable si et seulement si $\overset{k}{\underset{i=1}{\oplus}} \mathbf{E}_k = \mathbf{E}$. La dimension d'un espace propre est inférieur à l'ordre de multiplicité de la valeur propre associée. l'endomorphisme u est diagonalisable si et seulement si χ_u est scindé et $m_i = \dim(\mathbf{E}_i)$, pour $i = 1 \ldots k$.
- *A venir : trigonalisation révisions sur les déterminants, critère de diagonalisabilité, trigonalisation, ...*

Les questions de cours ou exercices avec un astérisque $\star$ pour : C. Brévignon, Malo Le Grognec, Augustin Ravasse, Lucas Pan, Anaël Pelé, Arthur Quendo, Noémie Manach, Martin Pina-Silas, Aiden Legal, Kevynn Boucher, Thomas Jézequel.

Les questions de cours ou exercices avec deux astérisques $\star\star$ pour : C. Brévignon, Malo Le Grognec, Augustin Ravasse.

6 Questions de cours

1. Des vecteurs propres associés à des valeurs propres deux à deux distinctes sont indépendants.
2. Polynôme caractéristique : polynomialité et coefficients remarquables.
3. Le polynôme caractéristique d'un endomorphisme induit par un endomorphisme u divise le polynôme caractéristique de u. L'ordre de multiplicité d'une valeur propre est supérieur à la dimension de l'espace propre associé.

7 Exercices

1. Formules de Wald cf. DM 1 Soient $(X_n)_{n\in\mathbf{N}}$ une suite de variables aléatoires i.i.d. à valeurs dans $\mathbf{R}_+$ et T une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbf{N}$. On suppose que pour $n \in \mathbf{N}^*$, les variables $T, X_1, ..., X_n$ sont indépendantes et que X_1 et T sont d'espérance finie. On définit la variable aléatoire $S = \sum_{i=1}^{T} X_i$.
   (a) Montrer que $\mathrm{E}(S) = \mathrm{E}(T)\mathrm{E}(X_1)$.
   (b) $\star$ Donner une formule analogue pour $\mathrm{V}(S)$ en supposant que X_1^2 et T^2 admettent une espérance finie.

2. Soit u un endomorphisme d'un espace vectoriel $\mathbf{E}$ tel que pour tout élément $\vec{x}$ de $\mathbf{E}$, $(\vec{x}, u(\vec{x}))$ soit lié. Montrer que u est une homothétie. En déduire le centre de $\mathrm{GL}(\mathbf{E})$.
3. $\star$ (On admet l'exercice précédent)
   (a) Par K on désigne $\mathbf{R}$ ou $\mathbf{C}$ (ou même tout corps). Soit A un élément de $\mathcal{M}_n(\mathbf{K})$ de trace nulle. Montrer que A est semblable à une matrice de diagonale nulle.
   (b) Pour tout couple (B, C) d'éléments de $\mathcal{M}_n(\mathbf{K})$, on note $[BC] = BC - CB$ (crochet de lie de B et C). Montrer qu'il existe des matrices B et C telles que $A = [BC]$.
4. Soient A et B des éléments de $\mathcal{M}_n(\mathbf{K})$. Comparer $\mathrm{com}(AB)$ et $\mathrm{com}(A)\mathrm{com}(B)$. On commencera par le cas où A et B sont inversibles.
5. Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R})$. Etudier le rang de $\mathrm{com}(M)$ en fonction de celui de M. Déterminer $\det(\mathrm{com}(M))$ et $\mathrm{com}(\mathrm{com}(M))$.

   Retrouver ces résultats par densité algébrique sans discuter sur le rang de M.
6. Déterminer les couples d'applications de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$, (φ, ψ) tels que :

$$\left\{ \begin{array}{l} \varphi' = 6\varphi + 4\psi, \\ \psi' = 11\varphi - \psi, \end{array} \right. , \tag{1}$$

7. Soit f un edomorphisme d'un $\mathbf{R}$-espace vectoriel $\mathbf{E}$ de dimension n non nulle. Pour tout entier $n \geq 1$ on pose $N_n = \mathrm{Ker}(()f^n)$ et $I_n = \mathrm{Im}(f^n)$. Montrer qu'il existe un entier $n_0 \geq 1$ tel que :

$$N_1 \underset{\neq}{\subset} N_2 \underset{\neq}{\subset} \ldots\ldots \underset{\neq}{\subset} N_{n_0} = N_{n_0+1} = \ldots. = N_n = \ldots\ldots.$$

$$I_1 \underset{\neq}{\supset} I_2 \underset{\neq}{\supset} \ldots\ldots \underset{\neq}{\supset} I_{n_0} = I_{n_0+1} = \ldots. = I_n = \ldots\ldots.$$

   Soit $n \in \mathbf{N}^*$. Montrer que $I_n = I_{n+1}$ si et seulement si $I_n + N_n = I_n \oplus N_n$, (cf. TD 1).

   $\star$ Montrer la décroissance de la suite $(\dim(N_{i+1}) - \dim(N_i)_{i \in \mathbf{N}}$.
8. Soient A et B des éléments de $\mathcal{M}_n(\mathbf{K})$. Montrer $\chi_{AB} = \chi_{BA}$, 1. par densité algébrique, 2. en utilsant l'équivalence de A à $J_{\mathrm{rg}(A)}$.
9. $\star$ Montrer que tout hyperplan de $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ rencontre $\mathrm{GL}_n(\mathbf{R})$.
10. Soit $\mathbf{E}$ un espace vectoriel de dimension finie et G un sous-groupe fini de GL $(\mathbf{E})$. Montrer que

$$\dim\left(\bigcap_{g \in G} \mathrm{Ker}(g - \mathrm{id}_{\mathbf{E}})\right) = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \mathrm{Tr}(g).$$

11. Forme de Jordan

    Notons pour tout entier $k \geq 2$, J_k l'élément de $\mathcal{M}_k(\mathbf{C})$ qui n'a que des 1 sur la sous-diagonale et des zéros partout ailleurs. et convenons que $J_1 = O_1$.

    Soit M un élément de $\mathcal{M}_n(\mathbf{C})$, nilpotent d'ordre p.
    (a) Montrer pour $p = n$ que M est semblable à J_n.
    (b) $\star$ On suppose que $p = 2$. Montrer que M est semblable à $\mathrm{diag}(\underbrace{J_2, J_2, \ldots.. J_2}_{r \text{ termes}}, 0_{n-2r})$, où $r = \mathrm{rg}(M)$
    (c) $\star\star$ Montrer dans le cas général que $\mathrm{Im}(()u)$ est stable par u. En déduire qu'il existe un entier naturel $k \geq 1$, un élément $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k)$ de $(\mathbf{N}^*)^k$ vérifiant : $\alpha_1 \leq \alpha_2 \leq \ldots \leq \alpha_k$, et $\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_k = n$, tel que M soit semblable à la matrice $\mathrm{diag}(J_{\alpha_1}, J_{\alpha_2}, \ldots, J_{\alpha_k})$.
    (d) $\star\star$ Étudier l'unicité d'une telle décomposition.
12. $\star\star$ On admet le théorème de théorème de Frobenius-König : *Soit* $A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R})$. *Pourtout* $\sigma \in \mathrm{S}_n$, *le « serpent »*$(a_{1,\sigma(1)}, a_{2,\sigma(2)}, \ldots a_{n,\sigma(n)})$, *admet au moins un terme nul si et seulement si A admet une sous-matrice nulle de taille* $s \times t$ *avec* $s + t = n + 1$.
    (a) Montrer que toute matrice bistochastique admet un serpent dont tous les éléments sont strictement positifs.
    (b) Montrer qu'une matrice B bistochastique a au moins n éléments strictement positifs, et que si elle a exactement n éléments strictement positifs, alors c'est une matrice de permutation.
    (c) Montrer l'ensemble des matrices bistochastiques est l'enveloppe convexes des matrices de permutations.
    (d) Montrer que l'ensemble des matrices bistochastique d'ordre n est un convexe, préciser ses points extrémaux.
13. $\star\star$ Démontrer le théorème de Frobenius-König.

Indication pour la question 7.
Soit $n \in \mathbf{N}^*$. Montrer que $I_n = I_{n+1}$ si et seulement si $I_n + N_n = I_n \oplus N_n$, .
$\star$ *Montrer la décroissance de la suite* $(\dim(N_{i+1}) - \dim(N_i)_{i\in\mathbf{N}}$.

• Supposons $I_n + N_n = I_n \oplus N_n$. Soit l'application

$$v_n \ : \ I_n \to I_{n+1}\,;\ \vec{x} \mapsto u(\vec{x}).$$

On a $\ker(v_n) = N_1 \cap I_n \subset N_n \cap I_n = \{\vec{0}_{\mathbf{E}}\}$ par croissance de $(N_i)_{\in\mathbf{N}}$, donc le noyau de v étant réduit à $\{\vec{0}_{\mathbf{E}}\}$, l'application v_n est injective, donc $\dim I_{n+1} \geq \dim I_{n+1}$, par le théorème du rang (l'image de v_n est isomorphe à I_n), mais joint à l'inclusion de I_{n+1} dans I_n, voila qui assure :

$$I_n = I_{n+1}.$$

• Supposons $I_n = I_{n+1}$. Soit l'application

$$w \ : \ I_n \to I_{2n}\,;\ \vec{x} \mapsto u^n(\vec{x}).$$

Cette application est trivialement surjective, mais comme $n \geq 1$ on a $2n \geq n+1$, et donc $I_{2n} = I_n$, égalité qui transforme la surjectivité de u en bijectivité et donc en injectivité donc :

$$\{\vec{0}_{\mathbf{E}}\} = \ker(w) = I_n \cap N_n.$$

Les sous-espaces I_n et N_n sont donc en somme directe et donc, par la formule du rang suplémentaires.

Voila pour la première équivalence.

Ensuite, la formule du rang, appliquée à v_{n+1} et à v_n, applications sujectives, veut que :

$$\dim(I_n) - \dim(I_{n+1}) = \dim(\ker(v_{n+1})) = \dim(N_1 \cap I_{n+1}) \leq \dim(N_1 \cap I_n) = \dim(\ker(v_n)) = \dim(I_n) - \dim(I_{n+1}),$$

par décroissance de la suite $((I_i)-)_{i\in\mathbf{N}}$. D'où la décroissance de la suite $(\dim(I_{i+1}) - \dim(I_i)_{i\in\mathbf{N}}$, et donc, par la formule du rang celle de $(\dim(N_{i+1}) - \dim(N_i))_{i\in\mathbf{N}}$.

Programme de colles provisoire n°3,

8 Révivions de sup.

— Déterminants, applications et calculs

9 Algèbre linéaire : révisions de MPSI, utilisation pratique de la diagonalisation et trigonalisation

Par $\mathbf{K}$ on désigne $\mathbf{R}$ ou $\mathbf{C}$

— Espace vectoriels, familles libres, génératrices bases, base canonique de l'ensemble des applications polynômiales à p variables, somme directes, sous-espaces supplémentaires.
— Rang d'un endomorphisme, théorème et formule du rang, polynômes d'interpolation de Lagrange.
— Formes linéaires, hyperplans.
— Matrices : Voir programme précédent.
— Diagonalisation. On désigne u un endomorphisme d'un $\mathbf{K}$ espace vectoriel $\mathbf{E}$ de dimension finie non nulle. On note $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k$ les valeurs propres deux à deux distinctes de u, d'ordre de multiplicité respectifs $m_1, m_2, \ldots, m_k$.
  — Valeurs propres, vecteurs propres, espaces propres : les espaces propres sont en sommes directes. Espaces propres de deux endomorphismes qui commutent.
  — Polynôme caractéristique (définitions, coefficients remarquables), polynôme caractéristique d'un endomorphisme induit.
  — Diagonalisation des matrices et des endomorphismes. Définition. l'endomorphisme u diagonalisable si et seulement si $\overset{k}{\underset{i=1}{\oplus}} \mathbf{E}_k = \mathbf{E}$. La dimension d'un espace propre est inférieur à l'ordre de multiplicité de la valeur propre associée. l'endomorphisme u est diagonalisable si et seulement si χ_u est scindé et $m_i = \dim(\mathbf{E}_i)$, pour $i = 1 \ldots k$.
  — Trigonalisation, un endomorphisme ou une matrice est trigonalisable si et seulement si leur polynôme caractéristique est scindé. Application à la résolution de systèmes différentiels et de systèmes de relations de récurrences linéaires.
  — Matrices nilpotentes, définition, une matrice est nilpotente si et seulement si elle est trigonalisable à valeurs propres nulles.
  — *A venir : espace vectoriels normés...*

Les questions de cours ou exercices avec un astérisque $\star$ pour : C. Brévignon, Malo Le Grognec, Augustin Ravasse, Lucas Pan, Anaël Pelé, Arthur Quendo, Noémie Manach, Martin Pina-Silas, Aiden Legal, Kevynn Boucher, Thomas Jézequel **Ilies Le Marc**.

Les questions de cours ou exercices avec deux astérisques $\star\star$ pour : C. Brévignon, Malo Le Grognec, Augustin Ravasse.

10 Questions de cours

1. Un élément de $\mathcal{M}_n(\mathbf{K})$ d'un espace vectoriel de dimension fini est trigonalisable si et seulement si son polynôme caractéristique est scindé sur $\mathbf{K}$. Au choix du colleur, l'hérédité se fera par les endomorphismes ou par les matrices en blocs.
2. Déterminants en blocs.

11 Exercices

1. Polynôme caractéristique d'une matrice compagnon. Dans le cas où son polynôme caractéristique est scindé, montrer qu'elle est diagonalisable si et seulement si ses valeurs propres sont simples.

2. $\star$ On admet la question précédente Soient $k \in \mathbf{N}^*$ et$(a_0, a_1 ... a_{n-1}) \in \mathbf{C}^n$. Détermier l'ensemble E des éléments u de $\mathbf{C}^{\mathbf{N}}$, tels que pour tout $p \in \mathbf{N}$,

$$u_{p+n} + a_{n-1} u_{p+n-1} + ... + a_1 u_{p+1} + a_0 u_p = 0,$$

en supposant que $X^n + \sum_{i=0}^{n-1} a_i X^i$ à n racines distinctes.

Que dire de la structure de E ?

3. Soit A un élément de $\mathcal{M}_n(\mathbf{K})$ ayant n valeurs propres deux à deux distinctes.
   (a) Montrer qu'un élément de $\mathcal{M}_n(\mathbf{K})$ commute avec A si et seulement si toute base qui diagonamise A diagonalise M.
   (b) Détermine l'ensemble$E$ où :

   $$E = \left\{ M \in \mathcal{M}_2(\mathbf{R}), M^2 + M = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \right\}$$

   (c) En utilisant (a) déterminer le centre de $\mathrm{GL}_n(\mathbf{R})$, c'est-à-dire l'ensemble des éléments de ce groupe qui commutent avec tous les autres.
4. Commutant d'un endomorphisme
   (a) Soit A un élément de $\mathcal{M}_n(\mathbf{K})$ ayant n valeurs propres deux à deux distinctes. Montrer que l'ensemble $C(A)$ des matrices éléments de $\mathcal{M}_n(\mathbf{K})$ qui commutent avec A est un espace vectoriel dont on précisera la dimension. Montrer que tout élément de $C(A)$ est un polynôme en A.
   (b) $\star$ Même question pour une matrice compagnon (en colonne)
   (c) $\star$ Soit A un élément de $\mathcal{M}_n(\mathbf{K})$ ayant k valeurs propres deux à deux distinctes avec $k < n$ et diagonalisable. Déterminer la dimension de $C(A)$. Une matrice de $C(A)$ est-elle un polunôme en A.
5. On note les éléments de $\mathbf{R}^3$ en colonne. Déterminer les éléments $\begin{pmatrix} \phi \\ \chi \\ \psi \end{pmatrix}$ de $\mathcal{C}^1(\mathbf{R}, \mathbf{R}^3)$ tels que

   $$\begin{cases} 2\phi' = \phi + \chi + 2\psi, \\ 2\chi' = \phi + \chi - 2\psi, \\ 2\psi' = -\phi + \chi + 4\psi, \end{cases}$$

6. Déterminer les valeurs propres de la matrice L suivante. Est-elle diagonalisable ?

   $$L = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

7. Déterminer le déterminant de l'élément A de $\mathcal{M}_n(\mathbf{C})$, dont tous les coefficients diagonaux valent a et tous les autres b. On utilisera le plolynôme caractéristique.
8. Soient $n \in \mathbf{N}^*$ et $A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ telle que $a_{i,i} = 0$ pour $i = 1, 2, ...n$ et $a_{i,j} \in \{-1, 1\}$ pour tout couple (i, j) d'éléments distincts de $\{1, ...n\}$. Montrer que si n est pair, alors A est inversible.
9. $\star$ On dispose de $2n + 1$ cailloux. On supose que chaque sous ensemble de $2n$ cailloux peut se partager en deux paquets de n cailloux de même masse. Montrer que tous les cailloux on la même masse.
10. Soient n un entier strictement positif et M un élément de $\mathcal{M}_n(\mathbf{C})$. Pour $n = 3$, montrer que pour tout réel strictement positif ε, il existe une matrice triangulaire supérieure $(t_{i,j})_{\substack{i=1,\dots,n \\ j=1,\dots,n}}$, semblable à M, telle que pour tout couple (i, j) d'éléments distincts de $\{1, \dots, n\}$, $|t_{i,j}| \leq \varepsilon$.

    $\star$ Montrer le résultat pour n quelconque.
11. Soient z_1, z_2,...,z_n des nombres complexes, et P le polynôme

    $$P = (X - z_1)(X - z_2) \dots (X - z_n)$$

    On suppose que P est à coefficients entier. Soit un entier $q \geq 2$. Montrer que

    $$Q = (X - z_1^q)(X - z_2^q) \dots (X - z_n^q)$$

    est à coefficients entiers.

12. $\star$ — THÉORÈME DE KRONECKER — Montrer que si P est un polynôme unitaire de $\mathbf{Z}[X]$ dont les racines complexes sont toutes de module inférieur ou égal à 1 tel que $P(0) \neq 0$, alors toutes les racines de P sont des racines de l'unité.

13. $\star\star$ Soit A un élément de $\mathcal{M}_n(\mathbf{C})$. On considère l'endomorphisme de $\mathcal{M}_n(\mathbf{C})$,

$$\Psi_A \ : \ X \mapsto AXA.$$

   (a) Montrer que Ψ_A est diagonalisable si et seulement si A est diagonalisable.

   (b) En supposant A réelle, montrer que l'endomorphisme de $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ induit par Ψ_A est une isométie pour la norme euclidienne canonique, si et seulement si A est orthogonale.

14. $\star\star$ Soit ϕ un endomorphisme de $\mathcal{M}_n(\mathbf{C})$ qui envoie $\mathrm{GL}_n(\mathbf{C})$ dans lui-même.

   (a) Donner des exemples de tels endomorphismes. Montrer que ceux-ci préservent le rang.

   (b) Montrer que pour tout $M \in \mathcal{M}_n(\mathbf{C})$, $\phi(M) \in \mathrm{GL}_n(\mathbf{C})$ si et seulement si $M \in \mathrm{GL}_n(\mathbf{C})$.

   Indication : Montrer dans le cas où M est non inversible qu'il existe $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbf{C})$ tel que pour tout complexe λ, $P - \lambda M$ soit inversible.

   (c) Montrer que $\mathrm{rg}(\phi(M)) \geq \mathrm{rg}(M)$.

   (d) Montrer que ϕ conserve le rang.

Programme de colles n°4

12 Algèbre linéaire : révision de MPSI, utilisation pratique de la diagonalisation et trigonalisation

— Programme de la semaine précédente.

13 Espaces vectoriels normés

Il s'agit d'un premier contact...
— Définition de norme, espace vectoriel normé, distance à une partie non vide.
— Ouverts, fermés, intérieur, adhérence. Ouverts et fermés relativement à une partie.
— Limite d'une suite à valeurs dans un espace vectoriel normé, convergence d'une suite à valeurs dans un produit d'espaces vectoriels normés. Caractérisation de l'adhérence par les suites, caractérisation des fermés et des fermés relatifs par les suites.
— Valeurs d'adhérence d'une suite à valeurs dans un espace vectoriel normé. Caractérisation des valeurs d'adhérence par les suites extraites.
— *A venir : limite des applications, compacité...*

Les questions de cours ou exercices avec un astérisque $\star$ pour : C. Brévignon, Malo Le Grognec, Augustin Ravasse, Lucas Pan, Anaël Pelé, Arthur Quendo, Noémie Manach, Martin Pina-Silas, Aiden Legal, Kevynn Boucher, Thomas Jézequel Ilies Le Marc **Brieg Ollivier, Vincent Nouaille -Degorce**.

Les questions de cours ou exercices avec deux astérisques $\star\star$ pour : C. Brévignon, Malo Le Grognec, Augustin Ravasse.

14 Questions de cours

1. Soit $(\mathbf{E}, \|\cdot\|)$ un e.v.n., X un ensemble non vide. Montrer que $N_\infty\ :\ \mathcal{B}(X,\mathbf{E}) \to \mathbf{R}\,;\ f \mapsto \sup\limits_{x\in X} \|f(x)\|$ est une norme.
2. Caractérisation de l'adhérence par les suites. Caractérisation d'un fermé par les suites.
3. Montrer que la distance à une partie A non vide d'un e.v.n. $(\mathbf{E}, \|\cdot\|)$ est $1-$lipschitzienne de $(\mathbf{E}, \|\cdot\|)$ dans $(\mathbf{R}, |\cdot|)$. Montrer que la distance d'un élément $\vec{x}$ de $\mathbf{E}$ à A est nulle si et seulement si $\vec{x}$ est adhérent à A.

15 Récitation d'exercices

1. Soient $(a_1, \ldots, a_n)$ et $(b_1, \ldots, b_n)$ des n-uplet de réels positifs. Soient p et q des réels tels que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.
   (a) On admet que pour tout a et tout b réels positifs,
   $$ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q} \text{ (inégalité de Young).}$$
   Montrer que $\sum\limits_{i=1}^{n} a_i b_i \leq \left(\sum\limits_{i=1}^{n} a_i^p\right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum\limits_{i=1}^{n} b_i^q\right)^{\frac{1}{q}}$
   (b) Montrer que : $\left(\sum\limits_{i=1}^{n} (a_i + b_i)^p\right)^{`\frac{1}{p}} \leq \left(\sum\limits_{i=1}^{n} a_i^p\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum\limits_{i=1}^{n} b_i^p\right)^{\frac{1}{p}}$. Que dire du cas $p = q = 2$?
   (c) Montrer que, n_p est une norme sur $\mathbf{K}^n$.
2. On note $\mathbf{E}$ l'espace vectoriel $\mathcal{C}([a,b], \mathbf{R})$. Soit un réel $p > 1$. On admet que n_p est une norme sur $\mathbf{R}^n$. Montrer que N_p est une norme sur $\mathbf{E}$.
3. $\star\star$ Montrer sans utiliser n_p que N_p est une norme.

4. Montrer que pour tout élément f de $\mathcal{C}^0([a,b],\mathbf{R})$, $N_p(f) \underset{n\to+\infty}{\to} N_\infty(f)$.

   Ou version $\star$

   Soient ϕ et f des applications de $[a,b]$ dans $\mathbf{R}$ continues. On supose ϕ à valeurs dans $\mathbf{R}_+^*$ et f à valeurs dans $\mathbf{R}_+$. On pose pour tout entier $n \geq 0$, $I_n = \int_{[a,b]} \phi f^n$.

   (a) Montrer que le suite $(\sqrt[n]{I_n})_{n\in\mathbf{N}}$ converge de limite à déterminer.

   (b) Montrer que le suite $\left(\frac{I_{n+1}}{I_n}\right)_{n\in\mathbf{N}}$ converge de limite à déterminer.

5. Soit G un sous-groupe de $\mathbf{R}$ non trivial. Montrer que, soit il est de la forme $k\mathbf{Z}$, avec k élément de $\mathbf{R}_+^*$, soit il est dense dans $(\mathbf{R},|\cdot|)$ (on discutera sur la valeur de $\inf(G\cap\mathbf{R}_+^*)$).

6. Soient A et B des parties d'un e.v.n. $(\mathbf{E},\|\cdot\|)$.

   (a) Prouver que si A est ouvert, alors $A+B$ l'est également.

   (b) Montrer que $\mathbf{Z}$ et $\sqrt{3}\mathbf{Z}$ sont des parties fermées de $(\mathbf{R},|\cdot|)$. La partie $\mathbf{Z}+\sqrt{3}\mathbf{Z}$ est-elle également fermée ?

7. $\star$ Soit $\mathbf{E}$ l'ensemble des applications de $[0,1]$ dans $\mathbf{R}$ continues, muni de la norme N_1 (resp. N_∞). Soit F l'ensemble des éléments de $\mathbf{E}$ qui prennent en 0 la valeur 1. Quelle est l'intérieur de F ? Quelle est l'adhérence de F ? *L'étudiant fera de jolies figures claires et en couleur.*

8. Soit $(\mathbf{E},\|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé. Montrer que tout sous-espace vectoriel propre de $\mathbf{E}$ est d'intérieur vide. Montrer que l'adhérence d'un sous-espace vectoriel est un sous-espace vectoriel.

9. $\star$ On munit ℓ^∞ ensemble des suites réelles bornées de la norme N_∞. On note $\mathcal{P}$ l'ensemble des suites réelles ultimement nulles (polynômes). Déterminer l'adhérence de $\mathcal{P}$.

   Révision —

10. Soit A une matrice stochastique d'ordre n, c'est-à-dire un élément de $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ à coefficient strictements positifs et tel que la somme des coefficients de n'importe quelle colonne fasse 1 :

    (a) Montrer que $1\in\mathrm{sp}(A)$ et $\mathrm{sp}(A)$.

    (b) Soit λ une valeur propre complexe de A. Montrer que $|\lambda|\leq 1$.

    (c) $\star$ Montrer qu'il existe un élément U de $\mathrm{E}_1(A)$ dont toutes les composantes sont strictement positives. On pourra, pour pour $(x_1,...,x_n)^\top$ vecteur propre associé à une valeur propre de module 1, considérer $(|x_1|,|x_2|,...,|x_n|)^\top$.

    (d) $\star$ Montrer que tout élément V de $\mathrm{E}_1(A)$ dont toutes les composantes sont strictement positives est colinéaire à U.

    Indication : choisir λ tel que $U-\lambda V$ ait tous ses coefficients positifs et un au moins nul.

11. Soit n en entier naturel non nul. pour toute n-uplet de réels $(b_0,b_1,\ldots,b_{n-1})$ on note $C(b_0,\ldots,b_{n-1})$ la matrice $\begin{pmatrix} b_0 & b_{n-1} & b_{n-2} & \cdots & b_1\\ b_1 & b_0 & b_{n-1} & \cdots & b_2\\ b_2 & b_1 & b_0 & \cdots & b_3\\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots\\ b_{n-2} & b_{n-3} & b_{n-4} & \cdots & b_{n-1}\\ b_{n-1} & b_{n-2} & b_{n-3} & \cdots & b_0\end{pmatrix}$

    (a) Pour C_1 désigne la matrice $C(0,1,0,\ldots,0)$ Exprimer $C(b_0,\ldots,b_{n-1})$ a u poyen de C_1.

12. $\star\star$ Soit $\mathbf{E}$ un espace vectoriel de dimension finie ; on désignera par $\|\cdot\|$ une norme sur $\mathbf{E}$. Soit $(U_n)_{n\in\mathbf{N}}$ une suite d'ouverts denses de $\mathbf{E}$. Montrer que $\bigcap_{n\in\mathbf{N}} U_n$ est dense. Soit $(F_n)_{n\in\mathbf{N}}$ une suite de fermés de $\mathbf{E}$ telle que $\bigcup_{n\in\mathbf{N}} F_n = \mathbf{E}$. Montrer que $\bigcup_{n\in\mathbf{N}} \overset{\circ}{F_n}$ est un ouvert dense.

13. $\star\star$ Soit (f_n) une suite d'applications de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$ continues, qui converge simplement vers une application f.

    (a) Soit ε un élément de $\mathbf{R}_+^*$. Pour tout entier nnaturel n, on pose :

    $$F_{n,\varepsilon} := \{\ x\in\mathbf{R} | \forall p\in\mathbf{N}, (p\geq n) \Rightarrow (|f_n(x)-f_p(x)|\leq\varepsilon)\}$$

    et

    $$\Omega_\varepsilon := \bigcup_{n\in\mathbf{N}} \overset{\circ}{F}_{n,\varepsilon}.$$

    Montrer que Ω_ε est un ouvert dense.

    (b) Montrer que tout élément a de Ω_ε, admet un voisinage V tel que pour tout élément x de V, $\|f(x)-f(a)\|\leq 3\varepsilon$.

    (c) Montrer que f est continue sur un G_δ dense. Application aux dérivées.

INDICATIONS

9. $\star$ On munit ℓ^∞ ensemble des suites réelles bornées de la norme N_∞. On note $\mathcal{P}$ l'ensemble des suites réelles ultimement nulles (polynômes). Déterminer l'adhérence de $\mathcal{P}$.

PREUVE SÉQUENTIELLE

Notons ℓ_0 l'ensemble des suites réelles de limite nulle. Un élément u de $\mathbf{R}^{\mathbf{N}}$ sera noté $u = (u(k))_{k\in\mathbf{N}}$, notation qui permettra de considérere des suites $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ d'éléments de $\mathbf{R}^{\mathbf{N}}$ (suite de suites !), on notera pour tout $n \in \mathbf{N}$,

$$u_n = (u_n(k))_{k\in\mathbf{N}}.$$

Soit $\varepsilon \in \mathbf{R}_+^*$.

$\bullet \ell_0 \subset \overline{\mathbf{R}[X]}$.

Soit $u \in \ell_0$. Considérons la suite de polynômes $(p_n)_{n\in\mathbf{N}}$ où, pour tout $n \in \mathbf{N}$;la suite p_n est la troncarture de u au rang n :

$$p_n(k) = u(k) \text{ pour } k = 0, 1, ..., n \text{ et } p_n(k) = 0 \text{ pour } k \geq n+1.$$

La suite de polynômes $(p_n)_{n\in\mathbf{N}}$ converge vers u. La convergence vers 0 de u nous livre un naturel N tel que pour tout $k \in [\![N, +\infty[\![$, $|u(k)| \leq \varepsilon$.

Soit alors un entier $n \geq N$. Pour tout $k \in \mathbf{N}$, si $k \leq n$ alors $|p_n(k) - u(k)| = 0 \leq \varepsilon$, et sinon $|p_n(k)_u(k)| = |u(k)| \leq \varepsilon$, puisque $k > n \geq N$; Donc

$$N_\infty(p_n - u) \leq \varepsilon.$$

Donc u, limite de la suite de polynômes $(p_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est adhérente à $\mathbf{R}[X]$

$\bullet \overline{\mathbf{R}[X]} \subset \ell_0$.

Soit v un élément de $\overline{\mathbf{R}[X]}$, on dispose d'une suite $(q_n)_{n\in\mathbf{N}}$ d'éléments de $\mathbf{R}[X]$ de limite v et donc en particulier d'un élément n_0 tel que $N_\infty(v - q_{n_0}) \leq \varepsilon$. Notons d_0 le degré de q_{n_0}. Pour tout entier k, si $k \geq d_0$, alors

$$|v(k)| \leq |v(k) - q_{n_0}(k)| + |q_{n_0}(k)| \leq N_\infty(v - q_{n_0}) + 0 \leq \varepsilon.$$

Donc $v \in \ell_0$.

Par ces deux points ; $\ell_0 \subset \overline{\mathbf{R}[X]}$.

PREUVE NON SÉQUENTIELLE

$\bullet \ell_0 \subset \overline{\mathbf{R}[X]}$.

Soit $u \in \ell_0$. La convergence vers 0 de u nous livre un naturel N tel que pour tout $k \in [\![N+1, +\infty[\![$, $|u(k)| \leq \varepsilon$. Soit p le polynôme qui coïncide avec u sur $[\![0, N]\!]$ et qui est nul sur $[\![N+1, +\infty[\![$. Pour tout $k \in \mathbf{N}$, si $k \leq N$ alors $|p(k) - u(k)| = 0 \leq \varepsilon$, et sinon $|p(k) - u(k)| = |u(k)| \leq \varepsilon$, et donc

$$N_\infty(p_n - u) \leq \varepsilon.$$

Donc la boule de centre u de rayon ε rencontre $\mathbf{R}[X]$. La suite u est donc adhérente à $\mathbf{R}[X]$.

$\bullet \overline{\mathbf{R}[X]} \subset \ell_0$.

Soit v un élément de $\overline{\mathbf{R}[X]}$, La boule ouverte de centre v de rayon ε rencontre $\mathbf{R}[X]$ en un polynôme q. Notons d le degré de q. Pour tout entier k, si $k \geq d$, alors

$$|v(k)| \leq |v(k) - q(k)| + |q(k)| \leq N_\infty(v - q) + 0 \leq \varepsilon.$$

Donc $v \in \ell_0$.

Programme de colles n$^{\text{o}}$5

16 Espaces vectoriels normés

- Normes, espaces vectoriels normés, distance à une partie non vide.
- Ouverts fermés, intérieurs adhérences. Ouverts et fermés relativement à une partie.
- Limite d'une suite à valeurs dans un espace vectoriel normé. Caractérisation de l'adhérence par les suites.
- Valeurs d'adhérence d'une suite à valeurs dans un espace vectoriel normé. Caractérisation des valeurs d'adhérence par les suites extraites.
- Caractérisation séquentielle de la limite.
- Limite et continuité d'une application d'une partie d'un e.v.n. à valeurs dans un e.v.n.
- Caractérisation de la continuité par les images réciproques d'ouverts (de fermés).
- Continuité uniforme, applications lipschitziennes.
- *A venir : Révisions sur les fonctions d'une variable réelle...*

Les questions de cours ou exercices avec un astérisque $\star$ pour : C. Brévignon, Malo Le Grognec, Augustin Ravasse, Lucas Pan, Anaël Pelé, Arthur Quendo, Noémie Manach, Martin Pina-Silas, Aiden Legal, Kevynn Boucher, Thomas Jézequel Ilies Le Marc **Brieg Ollivier, Vincent Nouaille -Degorce**.

Les questions de cours ou exercices avec deux astérisques $\star\star$ pour : C. Brévignon, Malo Le Grognec, Augustin Ravasse.

17 Questions de cours

- Caractérisation séquentielle de la limite.

18 Récitation d'exercices

1. (a) Soit n un entier supérieur ou égal à 2. On munit $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ identifié à $\mathbf{R}^{(n^2)}$de la norme $\|\cdot\|_\infty$, Montrer que $\mathrm{GL}_n(\mathbf{R})$ est un ouvert dense.
   (b) Montrer que $\mathrm{SL}_n(\mathbf{R})$ est un sous-groupe de $\mathrm{GL}_n(\mathbf{R})$ fermé (dans $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$) et non borné.
   (c) $\star$ On note $\mathcal{T}$ le sous-ensemble de $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ des matrices de transvection. Déterminer l'adhérence et l'intérieur de $\mathcal{T}$. Même question pour $\mathcal{P}$ le sous-ensemble de $\mathcal{M}_($\mathbf{R}$)$ des matrices de permutation.
2. Révision. Effet de la multiplicationà droite ou à gauche par une matrice de transvection ou de permutation.
3. On munit $\mathcal{M}_n(\mathbf{C})$ de la norme $\|\cdot\|_\infty$. Montre que l'ensemble D_n des éléments de $\mathcal{M}_n(\mathbf{C})$ diagonalisables est dense. Est il-ouvert ? fermé ?
4. $\star$ Soit un entier $n \geq 2$. On dit qu'un élément M de $\mathcal{M}_n(\mathbf{C})$ est cyclique si il existe un élément X de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{C})$ tel que $(X, MX, ..., M^{n-1}X)$ soit libre.
   (a) Montrer que l'ensemble des matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbf{C})$ cycliques est ouvert.
   (b) Soit M un élément de $\mathcal{M}_n(\mathbf{C})$ diagonalisable et λ_1, λ_2,...,λ_n ses valeurs propres. Montrer que si les λ_i, $i = 1, 2, ..n$, sont deux à deux distincts alors M est cyclique. Étudier la réciproque.
   (c) Montrer que l'ensemble des matrices cycliques de $\mathcal{M}_n(\mathbf{C})$ est dense.
5. $\star$ On munit $\mathcal{M}_n(\mathbf{C})$ de la norme $\|\cdot\|_\infty$. Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbf{C})$. Montrer que O_n est dans l'adhérence de la classe de similitude de M si et seulement si M est nilpotente.
6. On pose $A = \{\exp(in), n \in \mathbf{Z}\}$. Montrer que $\bar{A} = \mathbf{U}$.
   Version $\star\star$ Pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, posons $z_n = \prod_{k=1}^{n} \left(1 + \frac{\mathrm{i}}{k}\right)$ déterminer l'ensemble des valeurs d'adhérence de la suite $(z_n)_{n\in\mathbf{N}}$.
7. Soit $(x_n)_{n\in\mathbf{N}}$ une suite à valeurs dans l'e.v.n. $(\mathbf{R}, |\cdot|)$ qui converge vers un élément ℓ de $\mathbf{E}$. Soient $\Sigma\alpha_n$ une série à termes strictement positifs divergente, on note $(S_n)_{n\in\mathbf{N}}$ la suite de ses sommes partielles. Soit la suite $(z_n)_{n\in\mathbf{N}}$ définie par,
$$\forall n \in \mathbf{N}, z_n = \frac{1}{S_n} \sum_{k=0}^{n} \alpha_k x_k,$$

Déterminer la limite de cette dernière suite.

8. $\star$ Soit $(x_n)_{n\in\mathbf{N}}$ une suite à valeurs dans l'e.v.n. $(\mathbf{R}, |\cdot|)$ monotone. On suppose que le suite converge en moyenne. Montrer qu'elle converge.
Version $\star\star$ On dit qu'une partie A de $\mathbf{N}$ est de densité nulle si $\frac{\mathrm{card}(A\cap\{0,1,\ldots,n\})}{n} \underset{n\to+\infty}{\to} 0$. Soit $(x_n)_{n\in N}$ une suite de réels positifs, majorée. On note $(S_n)_{n\in N}$ la suite de ses moyennes.
Montrer l'équivalence des deux propositions suivantes :
i. $S_n \underset{n\to+\infty}{\to} 0$;
ii. Il existe une partie A de $\mathbf{N}$ de densité nulle telle que $a_n \underset{\substack{n\to+\infty\\ n\notin A}}{\longrightarrow} 0$
Pour déduire ii. de i on considérera $A := \{p \in \mathbf{N}^* | a_p \geq \sqrt{\alpha_p}\}$, *où pour tout* $n \in \_N$, $\alpha_n := \sup\{S_p, p \geq n\}$.

9. Montrer que la relation
$$\begin{cases} u_0 = 1, \\ u_{n+1} = \ln(1+u_n), \end{cases}$$
définit une suite $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$. Donner la limite de cette suite puis un équivalent simple de son terme général [2].

10. Montrer que la relation
$$\begin{cases} u_0 = 1, \\ u_{n+1} = \frac{1}{2}\ln(1+u_n), \end{cases}$$
définit une suite $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$. Donner la limite de cette suite, puis montrer que la suite $\left(\sqrt[n]{u_n}\right)_{n\in\mathbf{N}}$ admet une limite à déterminer.

11. Soit S des applications f de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$ continues telles que pour tout x et tout y réels,
$$f(x+y) = f(x) + f(y).$$
Déterminer S par une des deux méthodes suivantes au choix du colleur :
— en utilisant la densité de $\mathbf{Q}$;
— en régularisant par intégration.

12. $\star$ Soit S des applications f de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$ continues telles que pour tout x et tout y réels,
$$f(x+y) + f(x-y)) = 2f(x)f(y).$$
   (a) Soit f un élément de S non nul. Montrer que $f(0) = 1$ et que f est paire.
   (b) Soit f un élément de S non nul est indéfiniment dérivable. Montrer que pour tout $(x,y) \in \mathbf{R}^2$,
$$f''(x)f(y) = f(x)f''(y).$$
   (c) Montrer que tout élément de S est indéfiniment dérivable. Déterminer S.

13. $\star\star$ Soit $f \in \mathcal{L}(\mathbf{R}^n, \mathbf{R}^p)$. Montrer que f est surjective si, et seulement si, l'image de tout ouvert de $\mathbf{R}^n$ par f est un ouvert de $\mathbf{R}^p$?

14. (a) $\star\star$**Reporté semaine 6.** Soit $(f_n)_{n\in\mathbf{N}}$ une suite de fonctions d'une partie E de $\mathbf{R}$, **dénombrable** dans $\mathbf{R}$, telle que pour tout $n \in \mathbf{N}$, f_n soit bornée par 1. Montrer que $(f_n)_{n\in\mathbf{N}}$ admet une suite extraite qui converge simplement [3] sur E vers une application f de E dans $\mathbf{R}$.
   (b) Soit $(g_n)_{n\in\mathbf{N}}$ une suite d'applications de $\mathbf{R}$ dans $[-1,1]$, toutes croissantes. Montrer qu'il existe une suite extraite de $(f_n)_{n\in\mathbf{N}}$ qui converge simplement sur $\mathbf{R}$, (*Théorème de sélection de Helly*).

---

2. Dans cet exercice et le suivant, les élèves doivent connaître la méthode sans pour le moment, en comprendre l'origine.
3. On dit qu'une suite $(g_n)_{n\in\mathbf{N}}$ d'élément de $\mathbf{R}^{\mathbf{E}}$ converge simplement vers un élément g de $\mathbf{R}^{\mathbf{E}}$, si pour tout réel x la suite $(g_n(x))_{n\in\mathbf{N}}$ converge de limite $g(x)$.

Programme de colle n°6,

19 Révision du cours sur les fonctions d'une variable réelle de MPSI

— Théorème de la limite monotone.
— Théorème des valeurs intermédiaires. Théorème de l'homéomorphisme croissant.
— Lemme de Rolle, inégalité des accroissements finis, théorème du prolongement $\mathcal{C}^n$.
— etc.
— Fonction. convexes.
  — Définition, interprétation géométrique en terme de corde, formule de Jansen.
  — Lemme des trois pentes, caractérisation de la convexité par la croissance des pentes.
  — Caractérisation des fonctions convexes dérivables et deux fois dérivables. Une fonction dérivable convexe est au dessus de ses tangentes, position par rapport à une sécante.
  — Inégalité de convexité $e^x \geq 1 + x$, $\ln(1 + x) \leq x$, inégalité de Young, Inégalité de Hölder.
  — *A venir.* Espace vectoriels normmés, deuxième partie.

Les questions de cours ou exercices avec un astérisque $\star$ pour : C. Brévignon, Malo Le Grognec, Augustin Ravasse, Lucas Pan, Anaël Pelé, Arthur Quendo, Noémie Manach, Martin Pina-Silas, Aiden Legal, Kevynn Boucher, Thomas Jézequel Ilies Le Marc **Brieg Ollivier, Vincent Nouaille -Degorce**.

Les questions de cours ou exercices avec deux astérisques $\star\star$ pour : C. Brévignon, Malo Le Grognec, Augustin Ravasse.

20 Questions de cours

1. Soit f une application continue sur un intervalle I telle que sa restriction à $I \setminus \{a\}$ soit dérivable. On suppose que f' admet en a une limite épointé ℓ finie ou non. Montrer que

$$\frac{f(t) - f(a)}{t - a} \underset{t \to a, t \neq a}{\longrightarrow} \ell.$$

   Cas où ℓ est un réel.
2. Lemme des trois pentes.

21 Exercices

1. Enoncer le théorème de Darboux et donner en une preuve utilisant le théorème de la borne atteinte.
2. Soit f une application de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$ dérivable qui admet 0 comme limite en $+\infty$ et $-\infty$. Montrer que f' s'annule, par l'une des deux méthodes suivantes laissées au choix du coleurs :
   — en utilisant le théorème de la borne atteinte (et un joli dessin) ;
   — en effectuant un changement de variable.
3. $\star$ Inégalité de Kolmogorov —

   (a) Soit f une application de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{C}$ de classe $\mathcal{C}^2$. On suppose que f et f'' sont bornée. On note $M_0 := \sup\limits_{x \in \mathbf{R}} |f(x)|$ et $M_2 := \sup\limits_{x \in \mathbf{R}} |f''(x)|$.
   Montrer que pour tout réel x,
$$|f'(x)| \leq \sqrt{2M_0M_2}.$$
   On pourra appliquer l'inégalité de Taylor lagrange entre x et $x + h$ et entre x et $x - h$, pour tout réel $h > 0$.

   (b) $\star\star$ Soient un entier naturel $n \geq 2$ et f une application de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{C}$ de classe $\mathcal{C}^n$. On suppose que f et $f^{(n)}$ sont bornée. Pour $k = 0, 1, \dots, n$ on note $M_k := \sup\limits_{x \in \mathbf{R}} |f^{(k)}(x)|$, sous réserve que l'application $f^{(k)}$ soit bornée.
   Montrer que pour tout élément k de $\{0, \dots, n\}$, $f^{(k)}$ est bornée et
$$M_k \leq 2^{\frac{k(n-k)}{2}} M_0^{1-\frac{k}{n}} M_n^{\frac{k}{n}}, \text{ (inégalité de Kolmogorov).}$$

4. Soit f une application de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$ convexe et non constante. Montrer que f tend vers $+\infty$ en $+\infty$ ou en $-\infty$.
5. Soit f une application de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$ strictement convexe continue[4]. On suppose que $f(x)$ tend vers $+\infty$ lorsque x tend vers $+\infty$ et $-\infty$. Montrer que f atteint sa borne supérieure en un et un seul point a de $\mathbf{R}$. Montrer que si f est de plus dérivable, alors a est **caractérisé** par $f'(a) = 0$.
6. $\star$ Soit f une application de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$ dérivable et strictement convexe. On suppose de plus que
$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{|x|} = +\infty. \tag{2}$$
Montrer que f' est un homéomorphisme de $\mathbf{R}$ sur $\mathbf{R}$.
Version $\star\star$ On ne suppose en plus f que dérivable et non de classe $\mathcal{C}^1$.
7. Soient n un entier naturel supérieur ou égal à 1 et f une application d'un intervalle I dans $\mathbf{R}$ de classe $\mathcal{C}^n$. On suppose que f admet $n+1$ zéros comptés avec leurs ordres. Montrer que $f^{(n)}$ s'annule.
8. Soit n un entier naturel, et soit f une application d'un segment $[a,b]$ $(a < b)$ à valeurs réelles, de classe $\mathcal{C}^{n+1}$, soient enfin $(x_0, x_1, \dots, x_n)$, $n+1$ points deux à deux distincts de $[a,b]$.
   (a) Montrer qu'il existe un unique polynôme à coefficients réels de degré inférieur ou égal à n, que nous noterons P, qui coïncide avec f en chacun des points x_i
   (b) Montrer que pour tout élément x de $[a,b]$ il existe un élément y de $[a,b]$ tel que :
$$(f-P)(x) = f^{(n+1)}(y) . \frac{\prod_{i=0}^{n}(x-x_i)}{(n+1)!},$$
9. $\star$ — Égalité de Taylor Lagrange — **REPORTÉE semaine 7.** Soit n un entier naturel, et soit f une application d'un segment $[a,b]$ $(a < b)$ à valeurs réelles, $n+1$ fois dérivable, soit enfin x_0 un point de $[a,b]$. Montrer que pour tout élément x de $[a,b]$, il existe un élément y de $]\overleftrightarrow{x_0, x}[$, tel que :
$$f(x) = \sum_{i=0}^{n} (x-x_0)^i \frac{f^{(i)}(x_0)}{i!} + (x-x_0)^{n+1} \frac{f^{(n+1)}(y)}{(n+1)!}.$$
Dans le cas où f est de classe $\mathcal{C}^{n+1}$ retrouver ce résultat par la formule de Taylor avec reste intégrale.
10. $\star$ Inégalité de Jensen —
Soit f une application d'un segment $[a,b]$, non réduit à un point, à valeurs réelles, continue et *convexe*. Soient x une application de $[0,1]$ à valeurs dans $[a,b]$ continue et α une application de $[0,1]$ à valeurs dans $\mathbf{R}_+$ continue telle que :
$$\int_0^1 \alpha(t)\mathrm{d}t = 1.$$
   (a) Montrer que : $\int_0^1 \alpha(t)x(t)\mathrm{d}t \in [a,b]$.
   (b) Montrer que $f\left(\int_0^1 \alpha(t)x(t)\mathrm{d}t\right) \leq \int_0^1 \alpha(t)f(x(t))\mathrm{d}t$.
11. $\star$ —Inégalité de Höfding — Soit $(X_i)_{1\leq i\leq n}$ une suite de variables aléatoires mutuellement indépendantes centrées, et $(c_i)_{1\leq i\leq 1}$ une suite de réels telles que pour $i = 1, 2, ..., n$ on ait presque sûrement $|X_i| \leq |c_i|$. On note $S_n = X_1 + X_2 + ...X_n$ et $C_n = c_1^2 + c_2^2 + ...c_n^2$.
   (a) Montrer que pour tout $x \in [-1,1]$ et tout réel t, $\exp(tx) \leq \frac{1-x}{2}\exp(-t) + \frac{1+x}{2}\exp(t)$.
   (b) Soit X une variable aléatoire centrée tel que $|X| \leq 1$, p.s. Montrer que $\mathrm{E}(\exp(tX) \leq \exp\left(\frac{t^2}{2}\right)$.
   (c) En déduire que $\mathrm{E}\left(\exp(tS_n)\right) \leq \exp\left(\frac{t^2}{2}C_n\right)$.
   (d) Montrer que $\mathbf{P}(|S_n| > \varepsilon) \leq 2\exp\left(\frac{-\varepsilon^2}{2C_n}\right)$.
12. $\star$ Soit f une application de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$ à valeurs positives ou nulles de classe $\mathcal{C}^2$.
Soit x_0 un zéro de f.
   (a) Montrer que $f'(x_0) = 0$.
   (b) Montrer que $\sqrt{f}$ est dérivable en x_0 si et seulement si $f''(x_0) = 0$.

4. la continuité des applications convexes sur l'intérieur de leur intervalle de définition n'est pas au programme

13. $\star\star$

   (a) Montrer qu'une fonction continue d'un segment $[a,b]$ dans $\mathbf{R}$ qui admet en tout point un maximum est constante.

   (b) Soit f une application de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$. On appelle valeur maximale, tout réel y tel qu'il existe un réel x en lequel f admet un maximum local. Montrer que l'ensemble des valeurs maximales de f est au plus dénombrable.

   (c) Montrer qu'une application continue de $[a,b]$ dans $\mathbf{R}$ qui admet en tout point un extremum local est constante.

14. (a) $\star\star$ Soit $(f_n)_{n\in\mathbf{N}}$ une suite de fonctions d'une partie E de $\mathbf{R}$, **dénombrable** dans $\mathbf{R}$, telle que pour tout $n\in\mathbf{N}$, f_n soit bornée par 1. Montrer que $(f_n)_{n\in\mathbf{N}}$ admet une suite extraite qui converge simplement [5] sur E vers une application f de E dans $\mathbf{R}$.

   (b) Soit $(g_n)_{n\in\mathbf{N}}$ une suite d'applications de $\mathbf{R}$ dans $[-1,1]$, toutes croissantes. Montrer qu'il existe une suite extraite de $(f_n)_{n\in\mathbf{N}}$ qui converge simplement sur $\mathbf{R}$, (*Théorème de sélection de Helly*).

5. On dit qu'une suite $(g_n)_{n\in\mathbf{N}}$ d'élément de $\mathbf{R}^{\mathbf{E}}$ converge simplement vers un élément g de $\mathbf{R}^{\mathbf{E}}$, si pour tout réel x la suite $(g_n(x))_{n\in\mathbf{N}}$ converge de limite $g(x)$.

Programme de colles n°7
Supplément spécial vacances.

---

22 Espaces vectoriels normés

— Normes, espaces vectoriels normés, distance à une partie non vide.
— Ouverts fermés, intérieurs adhérences. Ouverts et fermés relativement à une partie.
— Limite d'une suite à valeurs dans un espace vectoriel normé. Caractérisation de l'adhérence par les suites.
— Valeurs d'adhérence d'une suite à valeurs dans un espace vectoriel normé. Caractérisation des valeurs d'adhérence par les suites extraites.
— Limite et continuité d'une application d'une partie d'un e.v.n. à valeurs dans un e.v.n.
— Caractérisation de la continuité par les images réciproques d'ouverts (de fermés).
— Continuité uniforme, applications lipschitziennes.
— Compacité. Compacts, les compacts sont fermés bornés. Compacité des segments de $(\mathbf{R}|\cdot|)$. Les compacts de $(\mathbf{K}^n, n_\infty)$ sont les parties fermées bornées ($\mathbf{K} = \mathbf{R}$ ou $\mathbf{C}$). Image d'un compact par une application continue, théorème de Heine.
— Connexité par arcs : convexes (caractérisation par le barycentre de n points), parties étoilées, composantes connexes par arcs, image par une application continue d'un connexe par arcs (théorème de la valeur intermédiaire).

Les ensembles convexes seront au centre du prochain programme

— *A venir : intégrales convergentes. Chapitre III sur les e.v.n.*

Les questions de cours ou exercices avec un astérisque $\star$ pour : C. Brévignon, Malo Le Grognec, Augustin Ravasse, Lucas Pan, Anaël Pelé, Arthur Quendo, Noémie Manach, Martin Pina-Silas, Aiden Legal, Kevynn Boucher, Thomas Jézequel Ilies Le Marc **Brieg Ollivier, Vincent Nouaille -Degorce**.

Les questions de cours ou exercices avec deux astérisques $\star\star$ pour : C. Brévignon, Malo Le Grognec, Augustin Ravasse, Martin Pina-Silas, Lucas Pan.

23 Questions de cours

1. Compacité d'un segment de $(\mathbf{R}, |\cdot|)$. Par dichotomie ou par le lemme du soleil levant au choix du coleur.
2. Une suite d'un espace vectoriel normé $(\mathbf{E}, \|\cdot\|)$ à valeurs dans un compact K converge si et seulement si elle admet une et une seule valeur d'adhérence.

24 Récitation d'exercices

1. Montrer que toute application de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$ continue et périodique est uniformément continue.
2. Soit f une application de $[0,1]$ dans $\mathbf{R}$ de classe $\mathcal{C}^2$. On suppose que : $f(0) = f'(0) = f'(1) = 0$ et que $f(1) = 1$.
   (a) En utilisant une formule de de Taylor entre 0 et 1, montrer qu'il existe un élément c de $[0,1]$ tel que $|f''(c)| \geq 2$.
   (b) En utilisant une formule de Taylor entre 0 et $\frac{1}{2}$ et $\frac{1}{2}$ et 1, montrer qu'il existe un élément d de $[0,1]$ tel que $|f''(d)| \geq 4$.
   (c) Un chien à l'arrêt s'élance en ligne droite et dix seconde plus tard, s'arrête 100 m plus loin. Montrer qu'au cours de sa course notre compagnon à quatre pattes à eu une accélération supérieure ou égale à 4 ms^{-2}.
3. Soit F une partie fermée d'un espace vectoriel normé $(\mathbf{E}, \|\cdot\|)$ de dimension finie. Soient k un élément de $[0,1[$, et $\vec{f}$ une application de F dans F k-contractante. On note $(x_n)_{n\in\mathbf{N}}$ la suite des itérés d'un point $\vec{a}$ de K par f.

   (a) Montrer que f admet un et un seul point fixe, en utilisant ou sans utiliser les séries, au choix du colleur.

(b) ⋆ Montrer que le résultat demeure si l'on suppose qu'il existe un entier $N \geq 1$ tel que $\vec{f}^N$ soit k-contractante.

(c) ⋆ Dans le cas ou F est un compact étoilé, montrer que le résultat demeure en ne supposant plus que f est k-contractante mais seulement 1-lipschitzienne.

4. Soit F un fermé d'un espace vectorel de dimension finie. Montrer que pour tout élément $\vec{a}$ de $\mathbf{E}$, il existe un élément $\vec{f}$ de $\mathbf{F}$ tel que $d(\vec{a}, F) = \|\vec{f} - \vec{a}\|$.

   On munit $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ de la norme euclidienne canonique (norme de Frobenius). Montre que $\mathrm{SL}_n(\mathbf{R})$, ensemble des éléments de $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ de déterminant 1, est un sous-groupe de $\mathrm{GL}_n(\mathbf{R})$), qui est fermé. Est-il compact ? Montrer qu'il existe un élément de $\mathrm{SL}_n(\mathbf{R})$ de norme minimale.

5. Théorème de Riestz. ⋆⋆ Montrer que la boule unité d'un espace vectoriel de dimension infinie n'est pas compact.

6. Darboux.⋆ Soit f une application d'un intervalle I de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$, dérivable.

   On note $T = \{(x, y) \in I^2, y < x\}$ et on considère $\psi : T \to \mathbf{R};\ (x, y) \mapsto \frac{f(y)-f(x)}{y-x}$. Montrer que $\psi(T) \subset f'(I) \subset \overline{\psi(T)}$. en déduire que $f'(I)$ est un intervalle.

7. Montrer que $\mathrm{GL}_n(\mathbf{R})$ n'est pas connexe par arcs mais que $\mathrm{GL}_n(\mathbf{C})$ l'est.

8. Montrer que $\mathrm{O}_n(\mathbf{R})$ n'est pas connexe par arcs mais que $\mathrm{SO}_2(\mathbf{R})$ l'est.

9. (a) Soit A un connexe par arcs d'une e.v.n. $(\mathbf{E}, \|\cdot\|)$. Montrer que toute partie de A relativement ouverte et fermée est soit A soit vide.

   (b) Soit U un ouvert d'un e.v.n. $(\mathbf{E}, \|\cdot\|)$ connexe par arcs. Montrer que U est « connexe par lignes brisées ».

10. ⋆ Soit K un compact d'une e.v.n. $(\mathbf{E}, \|\cdot\|)$.

    (a) Soit ε un réel strictement positif. Montrer que K est inclus dans la la réunion d'un nombre fini de boules centrées en des points de K et de rayon ε.

    (b) ⋆⋆ Montrer que K possède une partie dense dénombrable.

11. ⋆ Déterminer les composantes connexes par arcs de $\mathrm{GL}_2(\mathbf{R})$.

12. ⋆⋆ Soit A un élément de $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ non inversible. Montrer que $\mathrm{GL}_n(\mathbf{R}) \cup \{A\}$ est connexe par arcs.

13. ⋆ Soit P un polynôme unitaire de $\mathbf{R}[X]$ de degré d. Montrer qu'il est scindé sur $\mathbf{R}[X]$ si et seulement si pour tout complexe z, $|P(z)| \geq |\mathrm{Im}(z)|^d$. En déduire que l'adhérence dans $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ des matrices diagonalisables est l'ensemble des matrices dont le polynôme caractéristique est scindé.

14. Soit f une application de $\mathbf{R}_+$ dans $\mathbf{R}$, tel que pour tout $x \in \mathbf{R}_+$, $f(nx) \underset{n \to +\infty}{\to} +0$.

    (a) On suppose f uniformément continue. Montrer que $\lim\limits_{+\infty} = 0$.

    (b) ⋆⋆ On ne suppose plus f que continue.

       Soit $\varepsilon \in \mathbf{R}_+^*$. Pour tout entier $n \geq 0$, on pose $F_n = \{x \in \mathbf{N}; \forall p \in \mathbf{N}, p \geq n \Longrightarrow |f(px)| \leq \varepsilon\}$.

       i. Montrer qu'il existe $N \in \mathbf{N}$, tel que $F_{\mathbf{N}}$ soit d'intérieure non vide.

       ii. Conclure.

    (c) ⋆⋆ Donner un exemple d'application f qui n'admet pas 0 comme limite en $+\infty$.

15. ⋆⋆ — Théorème de Glaeser (1963) — Soit f une application de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$ à valeurs positives ou nulles de classe $\mathcal{C}^2$.

    (a) On suppose dans cette question que $f(0) = f'(0) = f''(0) = 0$. Soient α un élément de $\mathbf{R}_+^*$ et $M(\alpha) = \sup\limits_{t \in [-2\alpha, 2\alpha]} (|f''|)$.

       Soit $x \in [-\alpha, \alpha]$. Montrer que pour tout $h \in [-\alpha, \alpha]$,

$$M(\alpha)\frac{h^2}{2} + hf'(x) + f(x) \geq 0.$$

       On suppose que $M(\alpha)$ est non nul.

       Montrer que $\frac{-f'(x)}{M(\alpha)}$ est élément de $[-\alpha, \alpha]$.

    (b) En étudiant sur $[-\alpha, \alpha]$ le signe du trinôme P, où $P = M(\alpha)\frac{X^2}{2} + Xf'(x) + f(x)$,

       Montrer que $f'^2(x) \leq 2f(x)M(\alpha)$, que $M(\alpha)$ soit nul ou non.

    (c) Montrer que $\sqrt{f}$ est de classe $\mathcal{C}^1$ si et seulement si pour tout zéro z de f, $f''(z) = 0$.

Correction de la question 12

Notons r le rang de A. On dipose donc de matrices inversibles P et Q telles que :

$$PAQ^{-1} = J_r.$$

Notons $C = \mathrm{GL}_n(\mathbf{R}) \cup \{A\}$ et $C' = \mathrm{GL}_n(\mathbf{R}) \cup \{J_r\}$. Par inversibilité de P et Q on a $C = \Phi(C')$, où

$$\Phi \ : \ \mathcal{M}_n(\mathbf{R}) \to \mathcal{M}_n(\mathbf{R})\,;\ M \mapsto P^{-1}MQ.$$

Or l'application Φ est continue, bientôt on écrira « car linéaire en dimension finie » , aujourd'hui disons que ses composantes dans la base canonique sont polynomiales en les coordonnées de la variable dans la base canonique. Donc il suffit de prouver la connexité par arcs de C' pour avoir celle de C. Faisons.

On note $\mathcal{R}$ la relation définie sur C' ainsi : un élément M de C' est en relation avec un élément M' de C' si, par définition, il existe un chemin joignant M à M' de support inclus dans C'. Le cours affirme que $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence.

D'abord $J_r \mathcal{R} \mathrm{diag}(1, 1, ..., 1, -1)$. En effet l'application

$$\Gamma \ : \ [0, 1] \to \mathcal{M}_n(\mathbf{R})\,;\ t \mapsto \mathrm{diag}(I_r, tI_{n-r-1}, -tI_1)$$

relie J_r à $\mathrm{diag}(1, 1, ..., 1, -1)$, est continue (ses composantes dans la base canonique sont affines) et est à valeurs dans C', puisque $\Gamma(0) = J_r$ et que pour tout $t \in]0, 1]$ le déterminant de $\Gamma(t)$ vaut $-t^{n-r-1}$ et est donc non nul.

Ensuite sur le même principe on montre que $J_r \mathcal{R} I_n$.

Donc la clase d'équivalence pour $\mathcal{R}$ contient I_n et $\mathrm{diag}(1, 1, ..., 1, -1)$ mais comme $\mathrm{GL}_n^{\pm}(\mathbf{R})$ est connexe par arcs, elle contient $\mathrm{GL}_n^{+}(\mathbf{R})$ et $\mathrm{GL}_n^{+}(\mathbf{R})$ donc C' entier. Donc C' est connexe par arcs.

Donc C est bien connexe par arcs.

Programme de colles n°8

25 Espaces vectoriels normés

Révisions !
— Normes, espaces vectoriels normés, distance à une partie non vide.
— Ouverts fermés, intérieurs adhérences. Ouverts et fermés relativement à une partie.
— Limite d'une suite à valeurs dans un espace vectoriel normé. Caractérisation de l'adhérence par les suites.
— Valeurs d'adhérence d'une suite à valeurs dans un espace vectoriel normé. Caractérisation des valeurs d'adhérence par les suites extraites.
— Limite et continuité d'une application d'une partie d'un e.v.n. à valeurs dans un e.v.n.
— Caractérisation de la continuité par les images réciproques d'ouverts (de fermés).
— Continuité uniforme, applications lipschitziennes.
— Compacité. Compacts, les compacts sont fermés bornés. Compacité des segments de $(\mathbf{R}|\cdot|)$.Compacts de $(\mathbf{K}^n, n_\infty)$. Image d'un compact par une application continue, théorème de Heine.
— Connexité par arcs : convexes, parties étoilées, composantes connexes par arcs, image par une application continue d'un connexe par arcs (théorème de la valeur intermédiaire).

26 Intégrale sur un intervalle quelconque

Il s'agit d'un premier contact les exercices doivent rester élémentaires, la prochaine semaine sera consacrée aux intégrales généralisées.
— Intégrale convergente, absolument convergente, fonctions intégrables. L'absolue convergence assure la convergence.
— Théorèmes de comparaison,
— *à vanir : intégration des relations de comparaison, changement de variables et intégrations par parties dans une intégrale généralisée.*

Les questions de cours ou exercices avec un astérisque $\star$ pour : C. Brévignon, Malo Le Grognec, Augustin Ravasse, Lucas Pan, Anaël Pelé, Arthur Quendo, Noémie Manach, Martin Pina-Silas, Aiden Legal, Kevynn Boucher, Thomas Jézequel Ilies Le Marc **Brieg Ollivier, Vincent Nouaille -Degorce**.

Les questions de cours ou exercices avec deux astérisques $\star\star$ pour : C. Brévignon, Malo Le Grognec, Augustin Ravasse, Martin Pina-Silas, Lucas Pan, Thomas Jézequel.

27 Récitation d'exercices

1. Soit C un convexe d'un e.v.n $(\mathbf{E}, \|\cdot\|)$. Montrer que l'intérieur et l'adhérence de C sont convexes.
2. $\star\star$ Soient X un convexe de $\mathbf{R}^n$ non vide, a un point intérieur à X et b un point adhérent à X. Montrer que $[a, b[$ est inclus dans l'intérieur de X.
   Indication : Étudier pour un point x de $[a, b[$ l'image d'une boule de centre a par une homothétie de centre x.
3. Soient un entier $n \geq 2$ et une application f de $\mathbf{R}^n$ dans $\mathbf{R}$ continue.
   (a) On suppose qu'il existe un réel a tel que $f^{-1}(\{a\})$ soit un singleton. Montrer que f atteint en $f^{-1}(\{a\})$ son maximum ou son minimum.
   (b) $\star$ On supose qu'il existe un réel b tel que $f^{-1}(\{b\})$ soit compact. Montrer que f atteint son maximum ou son minimum.
4. — PROJECTION SUR UN CONVEXE —
   (a) Soit C un convexe non vide fermé de $\mathbf{R}^n$, muni de sa structure euclidienne canonique. Soit z un élément de $\mathbf{R}^n$. Montrer qu'il existe un et un seul point c de C tel que : $\|z - c\| = \mathrm{d}(c, C)$. Le point c sera noté $p(z)$.

(b) Soit y un élément de C, montrer que : $\langle y - p(z) \mid z - p(z) \rangle \leq 0$.

(c) $\star$ Soient a et b des éléments de $\mathbf{R}^n$. Montrer que : $\|p(a) - p(b)\| \leq \|a - b\|$.

5. $\star$ On garde le cadre de l'exercice précédent. On appelle hyperplan d'appui de C en un point a de C tout hyperplan $\mathbf{H}$ de $\mathbf{R}^n$ passant par a tel que C soit inclus dans un des demi-espaces fermés définis par $\mathbf{H}$.
   (a) On suppose que z n'appartient pas à C. Montrer que C admet en $p(z)$ un hyperplan d'appui
   (b) Montrer que $p(\mathbf{R}^n - C) \subset \mathrm{Fr}(C)$
   (c) Soit f un point de la frontière de C. Montrer que C admet en f un hyperplan d'appui.

6. $\star\star$ On garde le cadre de la question précédente.
   Un point a de C est dit extrémal si $C - \{a\}$ est convexe, autrement dit si a n'est pas le milieu de deux points distincts de C.
   Montrer que C est l'enveloppe convexe de ses points extrémaux (Théorème de Krein-Milman).
7. $\star\star$ Soit K un compact d'un e.v.n. $(\mathbf{E}, \|\cdot\|)$ de dimension infinie. Montrer que $E \setminus K$ est connexe par arcs.
8. $\star$ On ne suppose plus C compact mais au contraire, non borné. Montrer que C contient une demi-droite.
9. (a) On appelle enveloppe convexe d'une partie A non vide d'un espace vectoriel normée $(\mathbf{E}, \|\cdot\|)$, notée $\mathrm{conv}(A)$ l'intersection de tous les convexes inclus contenant A, c'est donc le plus petit convexe contenant A (on fera un dessin). Montrer que $\mathrm{conv}(A)$ est l'ensemble de tous les barycentres à coefficients positifs de points de A.
   (b) $\star$ On suppose $\mathbf{E}$ de dimension n. Montrer que $\mathrm{conv}(A)$ est l'ensemble de tous les barycentres à coefficients positifs de $n+1$ points de A (on illustrera la preuve par une figure). Montrer que si A est compact alors $\mathrm{conv}(A)$ est compact. Donner un exemple de partie A fermée telle que $\mathrm{conv}(A)$ ne le soit pas.

10. Étudier la convergence de l'intégrale suivante : $\int_0^{+\infty} \sin(x) \sin\left(\frac{1}{x}\right) \mathrm{d}x$.
11. Montrer la convergence et donner la valeur des intégrales suivantes :

$$\int_0^{+\infty} \frac{\exp(-t) - \exp(-2t)}{\sqrt{t}} \mathrm{d}t\,; \int_0^{+\infty} \frac{\exp(-t) - \exp(-2t)}{t} \mathrm{d}t$$

12. Soit Γ la fonction de la variable réelle x définie par $\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} t^{x-1}\mathrm{e}^{-t}\mathrm{d}t$.
   (a) Déterminer le domaine de définition D de Γ.
   (b) Donner pour tout $x \in D$ une relation entre $\Gamma(x+1)$ et $\Gamma(x)$.
   En déduire la valeur de $\Gamma(n)$ pour tout entier n élément de D.

13. $\star\star$ Égalité des accroissements finis vectorielle
   Soit F une application d'une application d'un intervalle ouvert I non vide à valeurs dans $\mathbf{R}^n$ de classe $\mathcal{C}^1$ et soient a et b des éléments de I tels que $a < b$. Notons d la dimension de l'espace affine engendré par $F([a,b])$. Alors il existe c_1, c_2,...,c_{d+1} des éléments de $[a,b]$, λ_1, λ_2,...,λ_{d+1} des réels positifs ou nuls de somme 1, tels que

$$\frac{F(b) - F(a)}{b - a} = \sum_{i=1}^{d+1} \lambda_i F(c_i).$$

Programme de colles n°9

28 Révision sur les calculs de primitives

29 Intégrale sur un intervalle quelconque

— Intégrale convergente, absolument convergente, fonctions intégrables. L'absolue convergence assure la convergence.
— Théorèmes de comparaison, intégration des relations de comparaison.
— Changement de variables et intégrations par parties dans une intégrale généralisée.
— *À venir espaces vectoriels normés ch. III (Applications linéaires continues, normes équivalentes, espace de dimension finie).*

Les questions de cours ou exercices avec un astérisque $\star$ pour : C. Brévignon, Malo Le Grognec, Augustin Ravasse, Lucas Pan, Anaël Pelé, Arthur Quendo, Noémie Manach, Martin Pina-Silas, Aiden Legal, Kevynn Boucher, Thomas Jézequel Ilies Le Marc **Brieg Ollivier, Vincent Nouaille -Degorce, Pauline Wadier**.

Les questions de cours ou exercices avec deux astérisques $\star\star$ pour : C. Brévignon, Malo Le Grognec, Augustin Ravasse, Martin Pina-Silas, Lucas Pan, Thomas Jézequel.

30 Question de cours

1. Soient ϕ et ψ des applications de $[a,b[$ dans $\mathbf{R}$, à valeurs positives. On suppose que $\phi(t) = \underset{t\to b}{\mathrm{o}}(\psi(t))$ et que ϕ est non intégrable. Alors ψ est non intégrable et

$$\int_a^x \phi(t)\mathrm{d}t = \underset{x\to b}{\mathrm{o}}\left(\int_a^x \psi(t)\mathrm{d}t\right).)$$

31 Exercices

1. (a) Montrer que pour tout entier naturel n, l'application f_n, définie par

$$f_n\ :]0,1[\to \mathbf{R}\,;\ x\mapsto \frac{x^n}{\sqrt[4]{x^3(1-x)}},$$

est intégrable.

(b) **Au choix du colleur un des deux points suivants.**
- Pour tout entier naturel n, on pose $I_n = \int_{]0,1[} f_n$. Montrer que pour tout entier naturel $n\geq 1$, on a $I_{n-1} - I_n = \frac{3}{4n-3} I_n$.
- Calculer I_0 et en déduire l'expression de I_n pour tout entier naturel n.

2. Déterminer la limite éventuelle de la suite $(P_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$, où pour tout entier naturel n non nul,

$$P_n = \left(\prod_{k=1}^n \left(1+\frac{k}{n}\right)^k\right)^{\frac{1}{n^2}}.$$

ou version $\star$ Déterminer la limite éventuelle de la suite $(S_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$, où pour tout entier naturel n non nul,

$$S_n = \sum_{k=1}^n \sin\left(\frac{k}{n}\right)\sin\left(\frac{k}{n^2}\right).$$

3. — Soient ω l'application $\mathbf{R}\to\mathbf{R}\,;\ t\mapsto \exp(-t^2)$ Soit $\mathbf{H}$ l'ensemble des applications f de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$ continues telles que $f^2\omega$ soit intégrable.

(a) Montrer que H est un espace vectoriel qui contient les applications polynômes. et que l'application

$$\Phi\ :\ \mathbf{H}^2 \to \mathbf{R}\,;\ (f,g) \mapsto \int_{\mathbf{R}} fg\omega$$

est bien définie et et un produit scalaire sur $\mathbf{H}$. On le note $\langle\cdot|\cdot\rangle$ et $\mathbf{N}_2$ la norme associée.

(b) Montrer que tout élément f de $\mathbf{H}$, l'intégrale $\int_{\mathbf{R}} f\omega$ converge et qu'il existe un réel c tel que

$$\int_{\mathbf{R}} f\omega \leq cN_2(f).$$

4. (a) Soit g une application d'un segment $[a,b]$ dans $\mathbf{R}$, de classe $\mathcal{C}^1$. Montrer que $\int_a^b g(t)\sin(nt)\mathrm{d}t$ tend vers 0 lorsque n tend vers $+\infty$.

(b) $\star$ Pour tout entier $n \geq 1$, on pose

$$J_n := \frac{1}{n}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^2(nt)}{\sin^2(t)}\mathrm{d}t.$$

Justifier l'existence de cette intégrale puis étudier la limite éventuelle de la suite $(J_n)_{n\in\mathbf{N}}$.

(c) Soit f une application de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$, de classe $\mathcal{C}^1$ intégrable. Montrer que $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\sin(nt)\mathrm{d}t$ tend vers 0 lorsque n tend vers $+\infty$.

5. Déterminer des équivalents simples, lorsque x tend vers $+\infty$, des quantités suivantes : $\displaystyle\int_x^{+\infty} \frac{e^{-\frac{1}{t}}}{t^c}\,\mathrm{d}t$, pour c élément de $]1,+\infty[$, $\displaystyle\int_0^x e^{t^2}\mathrm{d}t, \int_e^x \frac{\mathrm{d}t}{\ln t}$.

$\star$ Donner un développement asymptotique à tout ordre de $\int_0^x e^{t^2}\mathrm{d}t$, lorsque x tend vers $+\infty$.

6. $\star\star$ Soit f une application de $\mathbf{R}_+$ dans $\mathbf{R}$, de classe $\mathcal{C}^1$ et intégrable.

(a) Montrer que f n'est pas nécessairement bornée.

(b) On supose de plus que f' est de carré intégrable (sur $\mathbf{R}_+$). Montrer que f est bornée.

7. Soit f une application de $\mathbf{R}_+$ dans $\mathbf{R}$, continue et bornée. On admet que $\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-x^2}\mathrm{d}x = \sqrt{\pi}$. Pour tout entier naturel n, justifier l'existence de $J_n = n\int_0^{+\infty} e^{-n^2t^2} f(t)\mathrm{d}t$.

(a) Montrer, par un raisonnement élémentaire que la suite $(J_n)_{n\in\mathbf{N}}$ a une limite à déterminer.

(b) $(5/2)$ Reprendre la question précédente en utilisant le théorème de convergnce dominée.

8. $\star\star$ Soient f une application de classe $[0,1]$ dans $\mathbf{R}$, de classe $\mathcal{C}^\infty$ et ne s'annulant pas en 0. et

$$g\ :\ \mathbf{R}_+ \to \mathbf{R}\,;\ t \mapsto \int_0^1 \frac{f(x)}{1+tx}\mathrm{d}x.$$

Donner un équivalent simple $h(t)$ de $g(t)$ lorsque t tend vers $+\infty$. Montrer que $g(t) = h(t) + \underset{t\to+\infty}{O}\left(\frac{1}{t}\right)$.

9. $\star$ Soit f une application de $\mathbf{R}_+$ dans $\mathbf{R}$, à valeurs positives ou nulles, continue. On suppose f intégrable.

(a) A-t-on $\lim\limits_{+\infty} f = 0$?

(b) On suppose de surcroît f décroissante. Montrer que $xf(x) \underset{x\to+\infty}{\to} 0$. Cette dernière condition suffit-elle à prouver l'intégrabilité de f ?

(c) Énoncer et prouver un résultat analogue pour une série à termes positifs.

(d) $\star\star$ On ne suppose plus f décroissante. Montrer qu'il existe une suite $(x_n)_{n\in\mathbf{N}}$ de réels qui tend vers $+\infty$ telle que : $x_nf(x_n) \underset{n\to+\infty}{\to} 0$

En déduire que pour tout application g de $\mathbf{R}_+$ dans $\mathbf{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$, et de carré intégrable,

$$\int_0^{+\infty} g^2(x)\mathrm{d}x \leq 2\sqrt{\int_0^{+\infty} x^2g^2(x)\mathrm{d}x \int_0^{+\infty} g'^2(x)\mathrm{d}x} \leq +\infty$$

10. Pour tout entier naturel n non nul, on pose $\displaystyle I_n := \int_0^1 \frac{x^n}{1+x^2}\mathrm{d}x.$

(a) Calculer I_2 et I_3.

(b) Donner la limite de la suite $(I_n)_{n\in\mathbf{N}}$.

(c) Donner un développement limité à l'ordre 2, en $\frac{1}{n}$ de I_n, lorsque n tend vers $+\infty$ (c'est-à-dire une expression de la forme $I_n = a_0 + a_1\frac{1}{n} + a_2\frac{1}{n^2} + \mathrm{o}\left(\frac{1}{n^2}\right)\ (n\to\infty)$).

(d) Exprimer pour tout entier naturel n, I_n comme la somme d'une série numérique.

11. $\star$ — Inégalité de Hardy —

(Inégalité de Hardy faible).

Soit $f \in \mathcal{C}^0([0,1], \mathbf{R})$ Pour tout $x \in]0,1]$, $F(x) = \frac{1}{x}\int_0^x f(t)\mathrm{d}t$ et $F(0) = f(0)$. Montrer que :

$$\int_0^1 F^2(x)\mathrm{d}x \leq 4\int_0^1 f^2(x)\mathrm{d}x.$$

12. $\star$ Soit f un élément de $\mathcal{C}^2(\mathbf{R})$. On suppose que f et f'' sont de carrés intégrables. Montrer que f' est de carré sommable.

Programme de colles n°10

32 Révision de sup sur les séries

33 Espaces vectoriels normés, fin de la trilogie

- Normes, espaces vectoriels normés, distance à une partie non vide.
- Ouverts fermés, intérieurs adhérences. Ouverts et fermés relativement à une partie.
- Limite d'une suite à valeurs dans un espace vectoriel normé. Caractérisation de l'adhérence par les suites.
- Valeurs d'adhérence d'une suite à valeurs dans un espace vectoriel normé. Caractérisation des valeurs d'adhérence par les suites extraites.
- Limite et continuité d'une application d'une partie d'un e.v.n. à valeurs dans un e.v.n.
- Caractérisation de la continuité par les images réciproques d'ouverts (de fermés).
- Continuité uniforme, applications lipschitziennes.
- Compacité. Compacts, les compacts sont fermés bornés. Compacité des segments de $(\mathbf{R}|\cdot|)$. Les compacts de $(\mathbf{K}^n, n_\infty)$ sont les parties fermées bornées ($\mathbf{K} = \mathbf{R}$ ou $\mathbf{C}$). Image d'un compact par une application continue, théorème de Heine.
- Connexité par arcs : convexes (caractérisation par le barycentre de n points), partie étoilées, composantes connexes par arcs, image par une application continue d'un connexe par arcs (théorème de la valeur intermédiaire).
- Applications linéaires continues.
- Normes équivalentes ; cas des espaces vectoriels de dimension finie.
- Espaces vectoriels de dimension finie, convergence des suites et des applications, continuité des applications à valeurs dans un espace de dimension finie, compacts d'un espace de dimension finie, théorème de Bolzano-Weierstrass.

Les questions de cours ou exercices avec un astérisque $\star$ pour : C. Brévignon, Malo Le Grognec, Augustin Ravasse, Lucas Pan, Anaël Pelé, Arthur Quendo, Noémie Manach, Martin Pina-Silas, Aiden Legal, Kevynn Boucher, Thomas Jézequel Ilies Le Marc Brieg Ollivier, Vincent Nouaille -Degorce, Pauline Wadier.

Les questions de cours ou exercices avec deux astérisques $\star\star$ pour : C. Brévignon, Malo Le Grognec, Augustin Ravasse, Martin Pina-Silas, Lucas Pan, Thomas Jézequel.

34 Questions de cours

1. Continuité d'une application linéaire : quatre propriétés équivalentes.
2. Définition de la norme subordonnée d'une application linéaire d'un e.v.n. dans un autre (preuve complète).
3. $\star\star$ Toutes les normes en dimension finie sont équivalentes.

35 Récitation d'exercices

1. Montrer que tout sous espace vectoriel $\mathbf{F}$ de dimension finie d'un espace vectoriel normé $(\mathbf{E}, \|\cdot\|)$ est fermé.
2. $\star$ Montrer qu'une forme linéaire définie sur un espace vectoriel normé $(\mathbf{E}, \|\cdot\|)$ est continue si et seulement si son noyau est fermé.
3. Montrer que $N \ : \ \mathcal{M}_n(\mathbf{C}) \to \mathbf{R}_+ \ ; A \mapsto \max_{j=1,\dots,n} \left(\sum_{i=1}^{n} |a_{i,j}| \right)$ est une norme subordonnées à une norme sur $\mathcal{M}_{,,n}(1)\mathbf{C}$ à préciser, lorsque l'on identifie les éléments de $\mathcal{M}_n(\mathbf{K})$ et les endomorphismes de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{C})$ canoniquement associés.

   Ou bien, au choix du colleur, même question pour $N' \ : \ \mathcal{M}_n(\mathbf{C}) \to \mathbf{R}_+ \ ; A \mapsto \max_{i=1,\dots,n} \left(\sum_{j=1}^{n} |a_{i,j}| \right)$.
4. $\star$ Montrer que $N_F \ : \ \mathcal{M}_n(\mathbf{R}) \to \mathbf{R}_+, \ ; A \mapsto (\mathrm{tr}(M^\top M))^{\frac{1}{2}}$ est une norme d'algèbre. Est elle une norme subordonnée ?

5. Par $\mathbf{E}$ sera désigner l'espace vectoriel des applications de $[0,1]$ dans $\mathbf{R}$, continues. Soient g un élément de $\mathbf{E}$ et L la forme linéaire
$$\mathbf{E} \to \mathbf{R}\,;\, f \mapsto \int_{[0,1]} gf.$$
On munit $\mathbf{R}$ de $|\cdot|$. Montrer la continuité de L et déterminer sa norme dans les cas suivants.
   (a) On munit $\mathbf{E}$ de la norme N_2.
   (b) $\star$ On munit $\mathbf{E}$ de la norme N_∞.
   (c) On munit $\mathbf{E}$ de la norme N_1 et on prend pour $g = \sin\left(\frac{\pi}{2}\,\cdot\right)$.
6. Etudier les séries : $\sum_{n\geq 2} \frac{1}{n(\ln n)^\beta}$, $\sum_{n\geq 2} \frac{\ln(\ln(n))}{n(\ln n)^2}$ $\sum_{n\geq 2} \frac{1}{n(\ln n)^{1/2}\ln(\ln(n))}$, $\sum_{n\geq 2} \frac{1}{n\ln n(\ln(\ln(n)))^3}$, β désigne un réel.
7. Nature des séries : $\sum_{n\geq 1} \frac{n^{\ln n}}{(\ln n)^n}$; $\sum \sin(\pi(2+\sqrt{3})^n)$.
8. (a) En comparant les sommes partielles de la série harmonique à une intégrale montrer que : $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \underset{n\to+\infty}{\sim} \ln n$.
   (b) $\star$ Posons pour tout élément n de $\mathbf{N}^*$, $x_n := \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \ln n$. Montrer que pour que pour tout entier k supérieur ou égal à 1,
$$\frac{1}{1+k} \leq \int_k^{k+1} \frac{\mathrm{d}t}{t} \leq \frac{1}{2}\left(\frac{1}{k} + \frac{1}{1+k}\right).$$
   En déduire que la suite $(x_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ converge vers un réel γ supérieur ou égal à $\frac{1}{2}$.
9. Soit $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ une suite décroissante qui converge vers 0. Montrer que la série $\sum u_n$ converge si et seulement si $\sum 10^n u_{10^n}$ converge (On utilisera la théorie des famille sommables). En déduire la nature des la séries $\sum_{n\geq 2} \frac{1}{n(\ln(n))^a}$ et $\sum_{n\geq 2} \frac{1}{n\ln(n)(\ln(\ln(n)))^a}$, où a est un réel.
10. Soit f une application de $]0,1]$ dans $\mathbf{R}$, continue, décroissante et intégrable.
   Déterminer la limite de la suite $(I_n)_{n\in\mathbf{N}}$, où pour tout entier $n \geq 1$ on a posé $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} f\left(\frac{i}{n}\right)$.
11. $\star\star$ Notons $\mathbf{E} = \mathcal{C}^0([0,1],\mathbf{R})$. Soient un réel $C > 0$ et $\mathbf{F}$ un sous espace vectoriel de $\mathbf{E}$ tel que :
$$\|f\|_\infty \leq C\|f\|_2, \tag{3}$$
pour tout élément f de $\mathbf{F}$.
   (a) Montrer que les restrictions de $\|\cdot\|_2$ et $\|\cdot\|_\infty$ à $\mathbf{F}$ sont équivalentes.
   (b) Montrer que $\mathbf{F}$ est de dimension finie inférieure ou égale à C^2.
   (c) Donner un exemple de sous-espace vectoriel $\mathbf{F}$ de $\mathbf{E}$ de dimension n et vérifiant (3) avec $C = n^{\frac{1}{2}}$.
12. :
   (a) $\star\star$ On note E l'ensemble des applications de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$ continues. Soient u et v des éléments de $\mathbf{E}$. On suppose u bornée et v intégrable. Montrer que uv est intégrable.
   On suppose que pour tout élément w de $\mathbf{E}$ intégrable, uw est intégrable. Montrer que u est borné.
   Raisonner par l'absurde
   (b) $\star$ Soient u et v des éléments de $\mathbf{R}^{\mathbf{N}}$. On suppose u bornée et v sommable. Montrer que uv est sommable.
   On suppose que pour tout élément w de $\mathbf{R}^{\mathbf{N}}$ sommable, uw est sommable. Montrer que u est borné.
   Raisonner par l'absurde
13. $\star\star$ Soit $(H, \langle\cdot|\cdot\rangle)$ un espace préhilbertien dans lequel toute séries absolument convergent converge. On munira $\mathbf{H}$ de la norme euclidienne $\|\cdot\|$ associée au produit scalaire.
   Soit f un endomorphisme continue de H tel qu'il existe un réel $\alpha > 0$ tel que : $\forall x \in \mathbf{H},\ \alpha\|x\|^2 \leq \langle f(x)|x\rangle$.
   (a) Montrer que $\mathrm{im}(f)$ est fermée Et que $(\mathrm{im}(f))^\top = \{0_\mathbf{H}\}$
   (b) En déduire que f est un automorphisme.
   (c) Montrer que f^{-1} est continu et que $\|f^{-1}\|_{\mathrm{op}} \leq \frac{1}{\alpha}$.

Programme de colles n°11

36 Processus sommatoires discrets

- Définition de la convergence d'une série à valeurs dans un e.v.n. $(\mathbf{E}, \|\cdot\|)$. Dans un espace vectoriel de dimension finie la convergence absolue assure la convergence.
- Séries à termes positifs. Caractérisation de la convergence par la suite des sommes partielles. Théorèmes de comparaison directe, sommation des relations de comparaisons. Règle de d'Alembert, comparaison avec une intégrale.
- Espace vectoriel des séries convergentes, des séries absolument convergentes.
- Séries réelles, plan d'étude d'une série réelle. Séries alternées.
- Exemples de séries dans $\mathcal{M}_n(\mathbf{K})$, séries géométriques et exponentielles.
- Famille sommables de termes positifs ou nuls. Lien avec les séries à termes positifs ou nuls, théorème de sommation par paquets, théorème de Fubini Tonelli.
- Famille sommables de réels ou complexes. Lien avec les séries, théorème de sommation par paquets, théorème de Fubini-Lebesgues, théorème de sommation par paquets, application au produit de Cauchy de deux séries.
- Définition d'une probabilité sur un univers Ω dénombrable, caractérisation d'une probabilité par ses valeurs sur les événements élémentaires, variable aléatoire sur Ω, espérance d'une variable aléatoire, exemple la loi de Poisson.
- *A venir :* Fonctions vectorielles, Calcul différentiel.

  Avertissement pour les colleurs : *les familles sommables figurent au programme pour fonder rigoureusement les probabilités, elles ne doivent pas faire l'objets d'exercices autres qu'élémentaires. Les élèves ne sont pas sensés connaitre autre chose en probabilités que le cours de MPSI (Ω fini) et la définition donnée cette semaine, il y aura un chapitre entier consacré aux probabilités en fin d'année, les exercices doivent rester très élémentaires.*

Les questions de cours ou exercices avec un astérisque $\star$ pour : C. Brévignon, Malo Le Grognec, Augustin Ravasse, Lucas Pan, Anaël Pelé, Arthur Quendo, Noémie Manach, Martin Pina-Silas, Aiden Legal, Kevynn Boucher, Thomas Jézequel Ilies Le Marc Brieg Ollivier, Vincent Nouaille -Degorce, Pauline Wadier, Virgile Marrec.

Les questions de cours ou exercices avec deux astérisques $\star\star$ pour : C. Brévignon, Malo Le Grognec, Augustin Ravasse, Martin Pina-Silas, Lucas Pan, Thomas Jézequel.

37 Exercices

1. Donner en utilisant le théorème de sommation des équivalents :
   - un équivalent de $\sum_{k=1}^{n} k^k$;
   - un développement limité en $\frac{1}{n}$, à l'ordre 2 de $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}$.
2. Montrer que $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \underset{n\to+\infty}{\sim} \ln n$. Montrer que la suite $\left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \ln n\right)_{n\in\mathbf{N}}$ est convergente. On note γ sa limite.

   $\star$ Donner un équivalent simple, lorsque n tend vers $+\infty$, de $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \ln n - \gamma$.
3. On Munit de la norme $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$
$$\mathcal{M}_n(\mathbf{R}) \to \mathbf{R}+\,;\ M \mapsto \sqrt{\mathrm{Tr}({}^{\mathrm{t}}MM)}$$
   on admet que que pour tout A et tout B éléments de $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$,
$$\|AB\|_F \leq \|A\|_F \|B\|_F.$$
   Définir l'exponentielle d'une matrice. Calculer l'exponentielle des matrices $\begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 3 & 3 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$.

4. Séries sans paramètre — Étudiez en utilisant des développements limités au **sens fort**, les séries de terme général :

   $u_n = (-1)^n \left(e - \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n\right)$, etc.

5. Séries à paramètre — Etudiez en utilisant des développements limités (au sens faible) la série de terme général $u_n = \sin\left(\frac{(-1)^n}{n^\alpha} + \frac{1}{n^{5\alpha}}\right)$, où α est un réel strictement positif, etc., etc., etc...

6. (le retour) Montrer que que la relation de récurrence

$$\begin{cases} u_0 = 1, \\ u_{n+1} = \sin(u_n), \end{cases}$$

   définit bien une suite $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$, montrer que cette suite converge vers 0.

   Donner lorsque n tend vers $+\infty$, un équivalent de u_n, de la forme cn^γ, avec c et γ réels.

   Pour tout élément n de $\mathbf{N}$, on pose $a_n := u_n - cn^\gamma$. Donner un équivalent de a_n, lorsque n tend vers $+\infty$.

   Les élèves doivent savoir justifier la forme de la suite téléscopique utilisée en illustrant par un dessin la comparaison à une intégrale.

7. $\star$ Soit $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ une suite de réels strictement positifs. On note pour tout entier naturel n, S_n sa somme partielle d'ordre n et l'on suppose que $\sum u_n$ diverge. Prouvez que $\sum \frac{u_n}{S_n^\alpha}$ converge si et seulement si $\alpha > 1$.

8. $\star\star$ Etudier la série de terme général $u_n = \sin(n!\pi e)$.

   Abel : couper-réindexer-recoller

9. $\star$ Soit $(a_n)_{n\in\mathbf{N}}$ une suite croissante de réels strictements positifs qui tend vers $+\infty$. Soit $(x_n)_{n\in\mathbf{N}}$ une suite de nombres complexes telle que la série $\sum \frac{x_n}{a_n}$ converge. Montrer que $\frac{1}{a_n}\sum\limits_{k=0}^{n} x_k$ tend vers 0, lorsque n tend vers $+\infty$.

   Indication : *considérer la quantité* $R_n = \sum\limits_{k=n}^{+\infty} \frac{x_n}{a_n}$.

10. Soit X une variable aléatoire définie sur Ω (cf. 1.) à valeurs dans $\mathbf{N}$, d'espérance finie. Montrer que $\mathrm{E}(X) = \sum\limits_{n\geq 0} \mathbf{P}(X > n)$. au choix du colleur :

    (a) En utilisant une transformation d'Abel.

    (b) En utilisant le théorème de Fubini (on fera un joli dessin).

11. Soient $(X_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ une suite de variables aléatoires à valeur dans $\mathbf{N}$, de même loi, définies sur un même univers dénombrable Ω, et T une variable aléatoire définie sur Ω et à valeurs dans N^*. On suppose que pour tout $n \in \mathbf{N}^*$ on a $X_1, ..., X_n, T$ mutuellement indépendantes et que X_1 et T admettent des espérances finies. On définit alors la variable aléatoire $S = X_1 + X_2 + ... + X_T$.

    Montrer que $\mathrm{E}(S) = \mathrm{E}(T)\mathrm{E}(X_1)$.

12. $\star\star$ Soit $(E, \|\cdot\|)$ un $\mathbf{R}$-espace vectoriel normé.

    (a) Montrer qu'un hyperplan H de $(\mathbf{E}, \|\cdot\|)$ est soit fermé, soit dense.

    (b) Soit H un hyperplan de $\mathbf{E}$ Montrer que $\mathbf{E} \setminus H$ est connexe par arcs si et seulement si H n'est pas fermé.

13. $\star\star$ Soit $(A, \|\cdot\|)$ une $\mathbf{C}$-algèbre normée, sur laquelle telle que toute série absolument convergente converge. On note e l'unité de A et on note pour tout $x \in A$, $\sigma(x)$ l'ensemble des éléments λ de C tels que $(\lambda e - x)$ soit non inversible.

    (a) Montrer que pour tout réel x, l'ensemble $\sigma(x)$ est un compact.

    On admet pour tout $x \in A$, la non vacuité de $\sigma(x)$.

    (b) On suppose que tout élément non nul de A est inversible. Déterminer A à isomorphisme près.

    (c) Dans le cas où $A = \mathcal{M}_n(\mathbf{C})$, comparer pour M et N éléments de $\mathcal{M}_n(\mathbf{C})$, les quantités $\sigma(MN)$ et $\sigma(NM)$

    (d) Soient x et y des éléments de A et $\lambda \in \mathbf{C}$ **non nul**.

    Montrer que $\lambda \in \sigma(xy)$ si et seulement si $\lambda \in \sigma(yx)$.

    (e) On suppose que 0 est élément de $\sigma(xy)$. A-t-on $0 \in \sigma(yx)$?

    (Envisager le cas où A est de dimension finie.)

Programme de colles n°12

38 Fonction d'une variable réelle à valeurs vectorielles

- Dérivation d'applications à valeurs vectorielles.
  - Dérivée d'une fonction à valeurs dans un e.v. de dimension finie $\mathbf{F}$, propriétés de la dérivation.
  - Arcs paramétrés : définition, points réguliers, tangentes en un point régulier (aucune autre connaissance spécifique).
  - Dérivées d'ordres supérieurs, espace vectoriel $\mathcal{C}^k(I, \mathbf{F})$, algèbre $\mathcal{C}^k(I, \mathbf{C})$, formule de Leibni(t)z. Dans le cas d'une application numérique, généralisation à une application bilinéaire, formule de Taylor-Young vectoriel à l'ordre n pour une application de classe $\mathcal{C}^n$ (avec un petit o).
- Intégrale *l'intégrale a été provisoirement introduite par l'intégrale des composantes dans une base, une construction intrinsèque sera donnée dans un prochain chapitre*
  - Propriétés de l'intégrale.
  - Inégalité des accroissements finis pour une application de classe $\mathcal{C}^1$ à valeurs dans $\mathbf{F}$.
  - Formule de Taylor avec reste intégrale (vectorielle), inégalité de Taylor-Lagrange, formule de Taylor-Young à l'ordre n pour une application de classe $\mathcal{C}^{n+1}$ (avec un grand O).

39 Calcul différentiel

Il s'agit du début du cours, le programme s'arrête avant la différentiation d'applications composées.

Toutes les applications sont définies sur un ouvert U d'un $\mathbf{R}$-espace vectoriel $\mathbf{E}$, de dimension finie p à valeurs dans un $\mathbf{R}$-espace vectoriel $\mathbf{F}$, de dimension finie n. $\mathbf{E}$ sera le plus souvent vu comme un espace affine.

- Dérivées directionnelles, dérivées partielles dans une base. Une application $\vec{f}$ ayant dans une base p applications dérivées partielles définies et continues sur U vérifie, pour tout point a de U :

$$\vec{f}\left(a+\vec{h}\right) = \vec{f}(a) + \sum_{i=1}^{p} h_i.D_i\vec{f}(a) + \mathrm{o}\left(\|\vec{h}\|\right),\ \left(\vec{h} \to \vec{0}_{\mathbf{E}}\right) \tag{4}$$

- Une application ayant dans une base p applications dérivées partielles définies et continues sur U, admet des dérivée dans toutes les directions continues, et des dérivées partielles dans toute base continues : on dit qu'elle est de classe $\mathcal{C}^1$
- Notion d'applications différentiables. Une application différentiable admet des dérivées directionnelles selon tout vecteur, en tout point de U. Expression de la différentielle au moyen des dérivées partielles dans une base. Interprétation géométrique dans le cas où $\mathbf{E}$ est $\mathbf{R}^2$ (plan tangent).
- Une application est de classe $\mathcal{C}^1$ si et seulement si elle est différentiable et sa différentielle est continue.
- *À venir Composition d'applications différentiables, matrice jacobienne, dérivation d'ordre supérieur.*

Les questions de cours ou exercices avec un astérisque $\star$ pour : C. Brévignon, Malo Le Grognec, Augustin Ravasse, Lucas Pan, Anaël Pelé, Arthur Quendo, Noémie Manach, Martin Pina-Silas, Aiden Legal, Kevynn Boucher, Thomas Jézequel Ilies Le Marc Brieg Ollivier, Vincent Nouaille -Degorce, Pauline Wadier, Virgile Marrec.

Les questions de cours ou exercices avec deux astérisques $\star\star$ pour : C. Brévignon, Malo Le Grognec, Augustin Ravasse, Martin Pina-Silas, Lucas Pan, Thomas Jézequel.

40 Questions de cours

1. Formule de Taylor reste intégral (pour une fonction vectorielle), on donnera deux expression du reste. On évitera la récurrence et privéligiera le détail des premières étapes.
2. Différentielle d'une forme linéaire, d'une application bilinéaire.
3. $\star\star$ Soit $\vec{f}$ une application d'un ouvert U d'un $\mathbf{R}$-espace vectoriel $\mathbf{E}$, de dimension finie p à valeurs dans un $\mathbf{R}$-espace vectoriel $\mathbf{F}$, de dimension finie n. On suppose qu'il existe une base $\mathcal{B}$ de $\mathbf{E}$ dans laquelle $\vec{f}$

admet p applications dérivées partielles dans $\mathcal{B}$ continue. Montrer que pour tout $a \in U$:

$$\vec{f}(a+\vec{h}) = \vec{f}(a) + \sum_{i=1}^{p} h_i \partial_i \vec{f}(a) + \vec{o}(\|\vec{h}\|)\,;\ (\vec{h} \to \vec{0}_{\mathbf{E}}).$$

4. Sous les hypothèses de la question précédente montrer l'équivalence des deux propositions :
   i. L'application $\vec{f}$ admet sur U des applications dérivées directionnelles dans toutes les directions continues.
   ii. Il existe une base $\mathcal{B}$ de $\mathbf{E}$ dans laquelle $\vec{f}$ admet p applications dérivées partielles continues.

41 Récitation d'exercices

42 Exercices

1. ⋆⋆ FORMULE SOMMATOIRE D'EULER-MACLAURIN—
   (a) Montrer que la relation de récurrence suivante suivante défini bien une suite $(P_n)_{n\in\mathbf{N}}$ de polynômes à coefficients rationnels : $P_0 = 1$, $\forall n \in \mathbf{N}^*, P_n' = nP_{n-1}$, $\int_0^1 P_n(t)\mathrm{d}t = 0$. On vérifiera qu'en posant pour tout $n \in \mathbf{N}$, $B_n := P_n(0)$, $P_n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} B_{n-k}X^k$
   (b) En comparant P_n et $P_n(1-X)$ montrer que pour tout $k \in \mathbf{N}^*$ on a $B_{2k+1} = 0$.
   (c) Soit $p \in \mathbf{N}$. Établir pour $f \in \mathcal{C}^{2p+1}([0,1],\mathbf{R})$, le formule

$$\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x = \frac{f(1)+f(0)}{2} - \sum_{k=1}^{p} \frac{B_{2k}}{(2k)!}(f^{(2k-1)}(1) - f^{(2k-1)}(0)) - R_p,$$

   où $R_p = \frac{1}{(2p+1)!}\int_0^1 f^{(2p+1)}(x)P_{2p+1}(x)\mathrm{d}x$.
2. Soit f une application d'un segment $[a,b]$ dans $\mathbf{C}$, continue. Donner une condition nécessaire et suffisante pour que $\int_{[a,b]} |f| = |\int_{[a,b]} f|$. Ou bien cas d'égalité dans l'inégalité triangulaire pour n complexes.

   ⋆ En plus :soit $\vec{f}$ une application de $[a,b]$ un espace euclidien $\mathbf{E}$, continue. Donner une condition nécessaire et suffisante pour que $\int_{[a,b]} \|\vec{f}\| = \|\int_{[a,b]} \vec{f}\|$, où $\|\cdot\|$ est la norme euclidienne.
3. (a) Soient U un ouvert non vide de $\mathbf{R}^2$ et f une application de U dans $\mathbf{R}$ à valeurs <u>positives ou nulles</u>, de classe $\mathcal{C}^1$. On suppose qu'il existe un réek $k > 0$ tel que pour tout $m \in U$:

$$\|\vec{\nabla} f(m)\| \leq kf(m). \tag{5}$$

   Soient $[a,b]$ un segment non réduit à un point et $\gamma\ :\ [a,b] \to \mathbf{R}^2$ un arc paramétré de classe $\mathcal{C}^1$ tel que $\gamma([a,b]) \subset U$. Enfin, on pose $m_0 = \gamma(a)$ et $m_1 = \gamma(b)$.

   Montrer que l'application $f \circ \gamma$, notée g, est de classe $\mathcal{C}^1$ et montrer que pour tout élément t de $[a,b]$,

$$g'(t) \leq k\|\overrightarrow{\gamma}\,'(t)\|g(t).$$

   En déduire que

$$f(m_1) \leq f(m_0)e^{k\ell},$$

   où ℓ désigne la longueur de l'arc γ.
   (b) On suppose que U est l'ensemble $\{(x,y) \in \mathbf{R}^2 | 1 < \|(x,y)\| < 2\}$. Montrer que si f s'annule en un point a de U alors f est nulle.
   (c) ⋆⋆ Reprendre la question précédente avec pour U un connexe par arcs.
4. On munira $\mathbf{R}^2$ de sa structure euclidienne canonique, par $\langle\cdot|\cdot\rangle$ on désignera le produit scalaire canonique, par $\|\cdot\|$ la norme associée. Soient ε un élément de $\{-1,1\}$, A un point de $\mathbf{R}^2$ et F une application d'un intervalle I, ouvert et non vide, dans $\mathbf{R}^2 \setminus \{\mathrm{A}\}$ de classe $\mathcal{C}^2$, telle que pour tout réel t,

$$\vec{\mathrm{F}}''(t) = \varepsilon\frac{\overrightarrow{\mathrm{AF}}(t)}{\|\overrightarrow{\mathrm{AF}}(t)\|^2}.$$

   (a) Soit l'application $\sigma\ :\ I \to \mathbf{R}\,;\ t \mapsto \det_{\mathcal{B}_c}\left(\overrightarrow{\mathrm{AF}}(t), \vec{\mathrm{F}}\,'(t)\right)$. Montrer que σ est constante.

(b) Dans cette question **on suppose que** $\varepsilon = 1$. Soient a et b des éléments distincts de I tels que $\mathrm{F}(a) = \mathrm{F}(b)$. En considérant
$$\frac{1}{2}\int_a^b \|\vec{\mathrm{F}}'(t)\|^2 \mathrm{d}t,$$
montrer que $\vec{\mathrm{F}}'(a) \neq \vec{\mathrm{F}}'(b)$. Interpréter.

(c) Dans cette question **on suppose que** $\varepsilon = -1$. Soit $R \in \mathbf{R}_+^*$. Déterminer une valeur de F telle que le support de l'arc paramétré (I, F) soit un cercle de rayon R.

5. Étudier la continuité en $(0,0)$ de $f \ : \ \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}\,;\ (x,y) \mapsto \begin{cases} \frac{x^4+3xy^2-5y^3}{x^2+y^2}, & \text{pour } (x,y) \neq (0,0), \\ 0, & \text{pour } (x,y) = (0,0). \end{cases}$ de $g \ : \ \mathbf{R}_+ \times \mathbf{R}_+ \to \mathbf{R}\,;\ (x,y) \mapsto \begin{cases} \frac{x^2-3xy^2}{x+y}, & \text{pour } (x,y) \neq (0,0), \\ 0, & \text{pour } (x,y) = (0,0). \end{cases}$.

   Soit l'application $f \ : \ \mathbf{R} \times \mathbf{R} \to \mathbf{R}\,;\ (x,y) \mapsto \begin{cases} \frac{xy^2}{x^2+y^4}, & \text{pour } (x,y) \neq (0,0), \\ 0, & \text{pour } (x,y) = (0,0). \end{cases}$ Montrer que f admet en $(0,0)$ dans toute direction une dérivée directionnelle. Est-elle continue en ce point ?

6. Soit $\delta \ : \ \mathcal{M}_n(\mathbf{R}) \to \mathcal{M}_n(\mathbf{R})\,; M \mapsto \det(M)$. Montrer que δ est de classe $\mathcal{C}^\infty$. Donner sa différentielle, au moyen du produit scalaire canonique sur $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$:
   — en calculant les dérivées partielles ;
   — $\star$ en utilisant la densité de $\mathrm{GL}_n(\mathbf{R})$.

7. $\star$ Soit f une application de $\mathbf{R}^n$ dans $\mathbf{R}$ avec $n \geq 1$. On suppose f homogène de degré 1, c'est à dire que pour tout réel t strictement positif et tout $X \in \mathbf{R}^n$, $f(tX) = tf(X)$. Montrer que f est différentiable en l'origine si et seulement si f est linéaire. Qu'en conclut-on pour une norme.

8. Soit l'arc paramétré $(\mathbf{R}, F)$ de $\mathbf{R}^2$, muni de sa structure euclidienne canonique, $\begin{cases} x = 2t^3, \\ y = 3t^2, \end{cases} \quad t \in \mathbf{R}.$

   (a) Déterminer l'ensemble D des réels t tels que le point de paramètre t de l'arc soit régulier et pour un élément t_0 de D une équation cartésienne de la tangente T et de la normale au point de paramètre t_0

   (b) Montrer que pour tout $t \in D$ il existe un et un seul élément t' de D tel que les tangentes à l'arc aux points de paramètres t et t' soient orthogonale.

   (c) Montrer qu'il existe deux et seulement deux éléments de D, t_1 et t_2 tels que les tangentes aux points de paramètres t_1 et t_2 soient aussi des normales à la courbe.

9. $\star\star$ Soit l'arc paramétré $(\mathbf{R}, F)$ de $\mathbf{R}^3$ où, pour tout $t \in \mathbf{R}$, $F(t) = \left(\frac{2t}{1+t^4}, \frac{t^3}{1+t^4} \frac{1-4t^4}{1+t^4}\right)$.

   (a) Montrer que F est injective.

   (b) Soient quatre réels deux à deux distincts $t_1; t_2, t_3$, et t_4. Donner une condition nécessaire et suffisante pour que les points $F(t_1), F(t_2), F(t_3)$ et $F(t_4)$ soient coplanaires.

   (c) Soient trois réels $t_1; t_2, t_3$. À quelle condition les points $F(t-1)$, $F(t_)$ et $F(t_3)$ sont ils alignés ?

10. $\star\star$

   (a) Soient un réel $\alpha > 2$ et $(z_n)_{n \in \mathbf{N}}$ une suite de complexes non nuls tels que pour tout couple d'entiers naturels distincts,
   $$|z_p - z_q| > 1.$$

   (b) Montrer la série $\sum \frac{1}{|z_n|^\alpha}$ converge.

   Indication. Considérer pour tout $N \in \mathbf{N}$, $C_N = \left\{ z \in \mathbf{C} \,|\, |\mathrm{Re}(z)| \leq \frac{N}{\sqrt{2}}, |\mathrm{Im}(z)| \leq \frac{N}{\sqrt{2}} \right\}$.

   (c) Construire une suite de complexes $(z_n)_{n \in \mathbf{N}}$ telle que la série $\sum \frac{1}{|z_n|^2}$ diverge et qui vérifie
   $$|z_p - z_q| \geq 1,$$
   pour tout couple (p,q) d'éléments distincts de $\mathbf{N}$.

Indication pour la question 6, second point et 7.

6.(b)

• Remarquons qu'*a priori* l'application δ est de classe $\mathcal{C}^1$. En effet les n^2 applications

$$\mathcal{M}_n(\mathbf{R}) \to \mathbf{R}\,;\ M \mapsto m_{i,j}\,;\ (i,j) \in [\![1,n]\!],]$$

sont de classe $\mathcal{C}^1$ car linéaires. Donc δ est de classe $\mathcal{C}^1$ comme sommes et différences de produits de ces applications.

• Ceci étant, soit $G \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R})$.
Prenons U un élément non nul de $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$.
Alors, pour tout t élément de $\mathbf{R}^*$,

$$\begin{aligned}\delta(G+tU) &= \det(G)\det(I_n + tG^{-1}U) = t^n\det(G)\left(\frac{1}{t}I_n + G^{-1}U\right) = t^n\det(G)\chi_{-G^{-1}U}\left(\frac{1}{t}\right)\\ &= t^n\det(G)\left(\left(\frac{1}{t}\right)^n - \operatorname{tr}(-G^{-1}U)\left(\frac{1}{t}\right)^{n-1} + \underset{t\to 0}{\mathrm{o}}\left(\frac{1}{t^{n-1}}\right)\right) = \det(G) + t\det(G)\operatorname{tr}(G^{-1}U) + \underset{t\to 0}{\mathrm{o}}(t)\\ &= \det(G) + t\operatorname{tr}((\operatorname{com}(G))^\top U) + \underset{t\to 0}{\mathrm{o}}(t)\,.\end{aligned}$$

D'où l'existence de $\mathrm{D}_U\delta(G)$, que nous donnait déjà le caractère $\mathcal{C}^1$ de δ, et

$$\mathrm{D}_U\delta(G) = \operatorname{tr}\Big((\operatorname{com}(G))^\top U\Big) = \langle \operatorname{com}(G)|U\rangle,$$

où $\langle\cdot|\cdot\rangle$ désigne le produit scalaire canonique sur $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ (identifié à $\mathbf{R}^{(n^2)}$.

• Soit à présent $M \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R})$. On dispose d'une suite $(G_p)_{p\in\mathbf{N}}$ d'éléments de $\mathrm{GL}_n(\mathbf{R})$ qui converge vers M (par exemple une suite extraite de $\left(M - \frac{1}{2^p}I_n\right)_{p\in\mathbf{N}}$ par suppression des termes d'indices p, tels que $\frac{1}{2^p}$ soit dans le spectre de M.)

Le caractère $\mathcal{C}^1$ de δ assure la continuité de $\mathrm{D}_U\delta$ et donc que :

$$\mathrm{D}_U\delta(G_p) \underset{p\to+\infty}{\to} \mathrm{D}_U\delta(M).$$

La continuité de $= \langle\cdot|U\rangle$ (linéaire en dimension finie) et de $M \mapsto \operatorname{com}(M)$ (polynomiale en les coordonnées dans la base canonique) veulent que :

$$\langle\operatorname{com}(G_p)|U\rangle \underset{p\to+\infty}{\to} \langle\operatorname{com}(M)|U\rangle.$$

Par ces deux points,

$$\mathrm{D}_U\delta(M) = \operatorname{tr}((\operatorname{com}(M))^\top U) = \langle\operatorname{com}(M)|U\rangle.$$

Donc pour tout $A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R})$,

$$\boxed{\mathrm{d}\delta(A)\ :\ \mathcal{M}_n(\mathbf{R}) \to \mathbf{R}\,;\ H \mapsto \langle\operatorname{com}(A)|H\rangle.}$$

7) Observons pour commencer que $f(0_{\mathbf{R}_n}) = f(2\cdot 0_{\mathbf{R}_n}) = 2f(0_{\mathbf{R}_n})$ de sorte que $f(0_{\mathbf{R}_n}) = 0$.
Ceci étant supposons f différentiable, on a donc, pour tout réel $t > 0$,

$$tf(X) = f(tX) = f(0_{\mathbf{R}_n}) + \mathrm{d}f(0_{\mathbf{R}_n})\cdot(tX) + \|tX\|\varepsilon(tX) = t\left(\mathrm{d}f(0_{\mathbf{R}_n})\cdot(X) + \|X\|\varepsilon(tX)\right),$$

où ε est une application de $\mathbf{R}^n$ dans $\mathbf{R}$ de limite nulle en $0_{\mathbf{R}^n}$. Donc, par divison par t dans la précédente éfalité puis en laissant tendre t vers 0,

$$f(X) = \mathrm{d}f(0_{\mathbf{R}_n})\cdot(X).$$

Donc f est l'application linéaire $\mathrm{d}f(0_{\mathbf{R}_n})$.

Toute norme est 1-homogène, cependant aucune ne peut prétendre à la linéarité puisque un vecteur non nul (il en est $n \neq 0$) et son opposé partageant la même norme non nulle.

Aucune norme sur $\mathbf{R}^n$ n'est différentiable en l'origine. Il en est du reste de même sur tout espace vectoriel de dimension finie non nulle.

Programme de colle n°13
Numéro double spécial Noël

43 Calcul différentiel

Toutes les applications sont définies sur un ouvert U d'un $\mathbf{R}$-espace vectoriel $\mathbf{E}$, de dimension finie p à valeurs dans un $\mathbf{R}$-espace vectoriel $\mathbf{F}$, de dimension finie n. $\mathbf{E}$ sera le plus souvent vu comme un espace affine.

— Dérivées directionnelles, dérivées partielles dans une base. Une application $\vec{f}$ ayant dans une base p applications dérivées partielles définies et continues sur U vérifie, pour tout point a de U :

$$\vec{f}\left(a+\vec{h}\right) = \vec{f}(a) + \sum_{i=1}^{p} h_i.D_i\vec{f}(a) + \mathrm{o}\left(\|\vec{h}\|\right),\ \left(\vec{h} \to \vec{0}_{\mathbf{E}}\right) \tag{6}$$

— Une application ayant dans une base p applications dérivées partielles définies et continues sur U, admet des dérivée dans toutes les directions continues, et des dérivées partielles dans toute base continues : on dit qu'elle est de classe $\mathcal{C}^1$
— Notion d'applications différentiables. Une application différentiable admet des dérivées directionnelles selon tout vecteur, en tout point de U. Expression de la différentielle au moyen des dérivées partielles dans une base. Interprétation géométrique dans le cas où $\mathbf{E}$ est $\mathbf{R}^2$ (plan tangent).
— Une application est de classe $\mathcal{C}^1$ si et seulement si elle est différentiable et sa différentielle est continue.
— Différentiabilité de la composée. La composée d'applications de classe $\mathcal{C}^1$ est de classe $\mathcal{C}^1$, différentielle d'une combinaison linéaire d'applications différentiables, de $B(f,g)$ où B est bilinéaire et f et g sont deux applications différentiables.
— Matrice jacobienne.
— Applications de classe $\mathcal{C}^k$. Théorèmes de transfert pour les applications de classe $\mathcal{C}^k$.
— Théorème de Schwarz (admis).

La notion de vecteur tangent à un ensemble, et plus généralement la géométrie différentielle feront l'objet de l'avant dernier chapitre.

44 Approximation uniforme, fonction d'une variable réelle

— Convergence simple et uniforme de suites et de séries d'applications d'une partie A d'un e.v. de dimension finie à valeurs dans $\mathbf{R}$, $\mathbf{C}$ ou un e.v. de dimension finie $\mathbf{F}$. Critère de convergence uniforme.
— Continuité d'une limite uniforme d'une suite d'applications continues. Résultats analogues pour les séries. Dans la pratique on montre pour tout point du domaine, la convergence uniforme dans un *voisinage relatif au domaine* de ce point.
— Limite en un point (ou en $+\infty$) de la limite uniforme d'une suite d'applications ayant en ce point une limite. Résultat analogue pour les séries.
— Lien entre la convergence uniforme et la convergence en norme $\|\cdot\|_\infty$. Pour A compact $\left(\mathcal{C}^0(A,\mathbf{F}), \|\cdot\|_\infty\right)$ est une partie fermée de $(\mathcal{B}(A,\mathbf{F}), \|\cdot\|_\infty)$.
— Convergence normale des séries d'applications. La convergence normale implique la convergence uniforme et uniforme absolue. Critère de convergence normale.
— Les deux théorèmes de densité au programme.
— *A venir : groupes, anneaux...*

Les questions de cours ou exercices avec un astérisque $\star$ pour : C. Brévignon, Malo Le Grognec, Augustin Ravasse, Lucas Pan, Anaël Pelé, Arthur Quendo, Noémie Manach, Martin Pina-Silas, Aiden Legal, Kevynn Boucher, Thomas Jézequel Ilies Le Marc Brieg Ollivier, Vincent Nouaille -Degorce, Pauline Wadier, Virgile Marrec.

Les questions de cours ou exercices avec deux astérisques $\star\star$ pour : C. Brévignon, Malo Le Grognec, Augustin Ravasse, Martin Pina-Silas, Lucas Pan, Thomas Jézequel.

45 Questions de cours

1. Continuité de la limite uniforme d'une suite d'applications continues.
   $\star\star$ En remplacement : limite en un point (ou en $+\infty$) de la limite uniforme d'une suite d'applications ayant en ce point une limite (théorème de la double limite).
2. Toute application continue sur un segment est limite uniforme d'une suite d'applications en escalier.

46 Exercices

1. Donner l'expression du gradient en coordonnées polaires. Ou bien, version $\star$: donner l'expression de la divergence en coordonnées polaires
2. On pose $U = \mathbf{R}^2 \setminus (\mathbf{R}_- \times \{0\})$. Déterminer l'ensemble S_U des éléments f de $C^1(U, \mathbf{R})$ tels que, pour tout élément (x, y) de $\mathbf{R}^2$,
$$-y\frac{\partial f}{\partial x}(x, y, z) + x\frac{\partial f}{\partial y}(x, y, z) = 0, .$$
   On illustrera abondamment par des beaux dessins polychromes. On tracera notamment les lignes des champs de vecteurs associées à ces équations ainsi que les champs.
3. On munit $\mathbf{R}^n$ de sa structure euclidienne canonique et par $\|\cdot\|$ on désigne le la norme euclidienne canonique.
$$i \ : \ \mathbf{R}^n \setminus \{(0, ..., 0)\} \to \mathbf{R}^n \ ; \ \vec{x} \mapsto \frac{\vec{x}}{\|\vec{x}\|^2}.$$
   Montrer que i est de classe $\mathcal{C}^1$, et que la différentielle de i, en tout point m de $\mathbf{R}^n$ distinct de $(0, ..., 0)$, est la composée d'une homothétie et d'une symétrie.
4. Montrer la convergence simple de la série d'applications $\sum u_n$, où, pour tout entier naturel n,
$$u_n : [-1, 1[\to \mathbf{R};\ x \mapsto \frac{\left|\sin\left(\frac{\pi}{2}x\right)\right|^n x^n}{(n+1)^{\frac{1}{4}}}\ .$$
   La somme de cette série est-elle continue ?
5. $\star$ Soit la série d'applications $\sum u_n$, où pour tout entier naturel n,
$$u_n : \mathbf{R}^+ \to \mathbf{R};\ x \mapsto \frac{|\sin x|}{(n+1)^a},\ \text{pour } x \in [n\pi, (n+1)\pi]\,,\ 0 \text{ sinon.}$$
   et a un réel positif. Etudier la convergence simple, uniforme et normale. Discutez suivant la valeur de a. On illustrera de beaux dessins.
6. Soit la fonction f de la variable réelle x définie par $f(x) = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^x}$. Montrer que le domain de définition de f est $]1, +\infty[$.Étudier la continuité de f sur son domaine de définition. Montrer que f admet une limite finie à déterminer en $+\infty$ et en 1, **puis** donner un équivalent de f en 1_+.
7. $\star$ Soit la fonction f du couple (x, y) de variables réelles, définie par $f(x) = \sum\limits_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n^x(\ln(n))^y}$. Étudier le domaine de définition D de f. Étudier la continuité de f sur D. On fera de belles figures.
8. Pour tour entier $n \geq 2$ on pose , $f_n \ : \ \mathbf{R} \to \mathbf{R}\,;\ x \mapsto \frac{xe^{-nx}}{\ln n}$.
   (a) Déterminer le domaine D de convergence de la série $\sum\limits_{n\geq 2} f_n$. On note $\varphi \ : \ D \to \mathbf{R}\,;\ x \mapsto \sum\limits_{n=2}^{+\infty} f_n(x)$.
   (b) Montrer que φ est continue sur $]0, +\infty[$.
   (c) La série $\sum\limits_{n\geq 2} f_n$ converge-t-elle normalement sur son domaine de définition ?
   (d) Étudier la continuité de φ en 0.
9. (a) Donner deux exemples de normes matricielles sur $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$. Définir l'exponentielle d'un élément M de $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$.
   (b) Montrer que l'application $\mathcal{M}_n(\mathbf{R}) \to \mathcal{M}_n(\mathbf{R})\,;\ M \mapsto \exp(M)$ est continue.
   (c) On admet que pour tout couple (A, B) d'éléments de $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ qui commutent entre eux, $\exp(A + B) = \exp(A)\exp(B)$. Montrer que l'exponentielle d'un élément M de $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ qui commute avec sa transposée est le produit d'une matrice symétrique et d'une matrice orthogonale.
   Les formules du type $\ell(\exp(M)) = \exp(\ell(M))$ où ℓ est linéaire doivent être justifiée par passage aux sommes partielles et continuité de ℓ.

10. *Théorème des moments* — Soit f une application de $[0,1]$ à valeurs complexes continue. On suppose que pour tout entier naturel n, $\int_0^1 t^n f(t)\mathrm{d}t = 0$. Montrer que f est nulle.

11. $\star$ Soit une suite $(f_n)_{n\in\mathbf{N}}$ d'applications de $[0,1]$ dans $\mathbf{R}$ continues, qui converge simplement vers une application f, supposée, elle aussi, continue.

    Supposons qu'il existe K, réel, tels que pour tous éléments x et y de $[0,1]$ et tout entier naturel n : $|f_n(x) - f_n(y)| \leq K|x-y|$. (suite est équilipschitzienne). Montrer que $(f_n)_{n\in\mathbf{N}}$, converge uniformément vers f.

    Version$\star\star$ Théorèmes de Dini —

    (a) Supposons que la suite $(f_n)_{n\in\mathbf{N}}$ soit monotone (c'est-à-dire que la suite réelle $(f_n(x))_{n\in\mathbf{N}}$ est soit croissante pour tout élément x de $[0,1]$, soit décroissante pour tout élément x de $[0,1]$).

    Montrer que $(f_n)_{n\in\mathbf{N}}$, converge uniformément vers f.

    (b) Supposons que pour tout entier naturel n, l'application f_n soit décroissante. Montrer que $(f_n)_{n\in\mathbf{N}}$, converge uniformément vers f.

12. $\star$ Soit une suite $(p_n)_{n\in\mathbf{N}}$ d'éléments de $\mathbf{R}[X]_d$ qui converge simplement vers une aplication f. Montrer que f est élément de $\mathbf{R}[X]_d$ et que $(p_n)_{n\in\mathbf{N}}$ converge uniformément vers f sur tout segment.

13. Que dire d'une application f de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$, limite uniforme d'une suite d'applications polynômiales. Montrer que toute application de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$ continue est limite simple d'une suite d'applications polynomiales.

14. $\star\star$ Théorème de Sard, version faible —

    Soit n un entier naturel non nul. $\mathbf{R}^n$ est muni de sa structure eucidienne canonique, $\|\cdot\|$ désigne la norme euclidienne. On notera de même la norme fonctionnelle sur $\mathbf{E}^*$ subordonnée à la norme euclidienne.

    On dit qu'une partie F de $\mathbf{R}^n$ est négligeable, si pour tout réel strictement positif ε il existe une suite de pavés[6] fermés $(C_p)_{p\in\mathbf{N}}$ telle que : $F \subset \bigcup_{p=0}^{+\infty} C_p$ et pour tout $p \in \mathbf{N}$, $\sum_{k=0}^{p} |C_k| < \varepsilon$.

    Soit f une application d'un ouvert U de $\mathbf{R}^n$ à valeurs dans $\mathbf{R}^n$ de classe $\mathcal{C}^1$. On note C l'ensemble des points critiques x de f : $C = \{x \in U | \mathrm{rg}(\mathrm{d}f(x)) < n\}$.

    Soit K un cube de $\mathbf{R}^n$ de côté de longueur $r > 0$. On pose $M := \sup_{x\in\mathbf{K}} \|\mathrm{d}f(x)\|$ et pour $\delta \in \mathbf{R}_+^*$, $\lambda(\delta) = \sup_{(x,y)\in K^2\ \|x-y\|<\delta} \|\mathrm{d}f(x) - \mathrm{d}f(y)\|$.

    (a) Montrer que $\lambda(\delta) \to 0$, lorsque δ tend vers 0 par valeurs supérieures.

    (b) Soit $x \in K \cap C$ et soit H_x un hyperplan de $\mathbf{R}^n$ passant par $f(x)$ et dont la direction contient $\mathrm{Im}(\mathrm{d}f(x))$. Montrer que $d(f(y), H_x)$, distance de $f(y)$ à H_x vérifie :

    $$d(f(y), H_x) \leq \lambda(\|x-y\|)\|x-y\|.$$

    (c) Montrer que l'ensemble $f(C)$ des valeurs critiques de f est négligeable. On pourra découper K en k^n cubes tous de côté $\frac{r}{k}$

    Matrice jacobienne

15. (a) On admet que l'application $\mathbf{R}_+^* \times]-\pi, \pi[\to \mathbf{R}^2 \setminus \{(x,0), x \in \mathbf{R}_-\}$; $(r,\theta) \mapsto (r\cos\theta, r\sin\theta)$ est une bijection de classe $\mathcal{C}^1$ dont la bijection réciproque ϕ est $\mathcal{C}^1$. Déterminer, sans calculer ϕ, J_ϕ, en un point (x,y) de $\mathbf{R}^2 \setminus \{(x,0), x \in \mathbf{R}_-\}$.

    (b) $\star$ Expliciter ϕ et vérifier pour un ou deux coefficients de J_ϕ le résultat trouvé.

16. $\star$ Soit f une application de $\mathbf{R}^n$ dans $\mathbf{R}^p$ de classe $\mathcal{C}^1$.

    (a) Soit a un élément $\mathbf{R}^n$. On pose $r = \mathrm{rang}(\mathrm{d}f(a))$. Montrer qu'il existe un voisinage V de a tel que pour tout $x \in V$, $r \leq \mathrm{rang}(\mathrm{d}f(x)$.

    (b) $\star\star$ Montrer qu'il existe un ouvert U dense dans $\mathbf{R}^n$ tel que $\mathrm{rang}(\mathrm{d}f)$ soit localement constant sur U.

6. Un pavé fermé est un ensemble d'équation dans une base orthonormée $a_i \leq x_i \leq b_i, i = 1, ..., n$.

Solutions d'execices de colles

Soit une suite $(f_n)_{n\in\mathbf{N}}$ *d'applications de* $[0,1]$ *dans* $\mathbf{R}$ *continues, qui converge simplement vers une application* f*, supposée, elle aussi, continue.*

Supposons qu'il existe K*, réel, tels que pour tous éléments* x *et* y *de* $[0,1]$ *et tout entier naturel* n *:* $|f_n(x)-f_n(y)| \leq K|x-y|$*. (suite est équilipschitzienne). Montrer que* $(f_n)_{n\in\mathbf{N}}$*, converge uniformément vers* f*.*

SOLUTION.

Soit $\varepsilon \in \mathbf{R}_+^*$.

Choisissons une subdivision $(a_0, a_1, ..., a_p)$ de $[0,1]$ dont le pas est inférieur à $\frac{\varepsilon}{K}$ (le réel K est nécessairement positif et, quitte à l'augmenter il est loisible de le supposer strictement positif). La convergence simple de $(f_n)_{n\in\mathbf{N}}$ fournit un entier naturel n_i, pour $i = 0, 1, 2, ..., p$ tel que :

$$\forall n \in [\![n_i, +\infty[\![, \ |f_n(x_i) - f(x_i)| \leq \varepsilon. \ ;$$

Désignons dans la suite par N le plus grand des n_i.

Soit $n \in [\![N, +\infty[\![$. Soit $x \in [0,1]$.

Si $x = 1$, alors par définition de de n_p et de N, $|f_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon$.

Supposons à présent $x \in [0,1[$. Désignons par j l'élément de $\{0, 1, ..., p-1\}$ tel que $x \in [x_j, x_{j+1}[$, alors

$$\begin{aligned} |f(x) - f_n(x)| \leq & |f(x) - f(x_j)| + |f(x_j) - f_n(x_j)| + |f_n(x_j) - f_n(x)| \leq \\ & K|x - x_j| + \varepsilon + K|x - x_j| \leq 2K|x_{j+1} - x_j| + \varepsilon \leq 2K\frac{\varepsilon}{K} + \varepsilon = 3\varepsilon. \end{aligned} \tag{7}$$

Donc $(f_n)_{n\in\mathbf{N}}$, converge uniformément vers f.

Programme de colle n°14

47 Fonction d'une variable réelle, approximation uniforme

Voir programme précédent.

48 Révision de sup. sur les équations différentielles.

— Équation différentielle linéaire du premier ordre à coefficients continus, structure de l'ensemble des solutions, unicité de la solution d'un problème de Cauchy sur un intervalle donné, méthode d'abaissement du degré (application de la méthode à des équation non linéaire ou des inéquations linéaire, cf. 1 et 2.).
— Équation différentielle linéaire d'ordre deux à coefficients constants, cas des second membres de la forme $p\exp(\lambda\cdot)$, où l'application p est polynomiale.
— Intégrale sur un segment de la limite uniforme d'une suite d'applications.

Les questions de cours ou exercices avec un astérisque $\star$ pour : C. Brévignon, Malo Le Grognec, Augustin Ravasse, Lucas Pan, Anaël Pelé, Arthur Quendo, Noémie Manach, Martin Pina-Silas, Kevynn Boucher, Thomas Jézequel Ilies Le Marc Brieg Ollivier, Vincent Nouaille -Degorce, Pauline Wadier, Virgile Marrec.

Les questions de cours ou exercices avec deux astérisques $\star\star$ pour : C. Brévignon, Malo Le Grognec, Augustin Ravasse, Martin Pina-Silas, Lucas Pan, Thomas Jézequel, **Arthur Quendo**.

49 Question de cours

Énoncez le théorème de la double limite dans le cas des suites de fonctions puis des séries et prouver le théorême de continuité d'une limite uniforme de fonctions continues.

50 Exercices

1. (a) Soit B la boule ouverte de $\mathbf{R}^n$ de centre $(0, 0, ...0)$ et de rayon strictement positif $\mathbf{R}$. Soit f une fonction continue sur $\bar{B}$ à valeurs réelles et dont la restriction à B est de classe $\mathcal{C}^2$. Montrer que si f admet en un point m de B un maximum local, alors $\Delta f(m) \leq 0$.
   (b) $\star$ On suppose f harmonique (i.e. Δf nul). Montrer que
   $$\sup_{x\in\bar{B}} f(x) = \sup_{x\in \mathrm{Fr}(B)} f(x).$$
   On pourra considérer $f_\varepsilon \,:\, x \mapsto f(x) + \varepsilon\|x\|^2$, pour $\varepsilon \in \mathbf{R}_+^*$;
2. Déterminer l'ensemble S (rep. S') des éléments f de $C^1\left(\mathbf{R}^3, \mathbf{R}\right)$ tels que, pour tout élément (x, y) de $\mathbf{R}^2$,
   $$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y,z) + \frac{\partial f}{\partial y}(x,y,z) + \frac{\partial f}{\partial z}(x,y,z) = 0 \text{ (resp. } x).$$
3. $\star$ Déterminer l'ensemble S (rep. S') des éléments f de $C^1\left(\mathbf{R}^2, \mathbf{R}\right)$ tels que, pour tout élément (x, y) de $\mathbf{R}^2$,
   $$y\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) + \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 0 \text{ (resp. } f).$$
   On illustrera abondamment par des beaux dessins polychromes. On tracera notamment les lignes du champ de vecteurs associées à cette équation ainsi que le champ.
   Montrer que ϕ est bornée.
4. — PETIT LEMME DE GRONWALL —
   Soient t_0 un réel, u_1 un reél strictement positif et f une application de $[t_0, +\infty[$ continue. Soient ϕ_1 la solution du problème de Cauchy : $\left\{\begin{array}{l}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = f(t)y,\\ y(t_0) = u_1.\end{array}\right.$ et ϕ une application de$[t_0, +\infty[$ dérivable telle que pour tout $t \in [t_0, +\infty[$, $\phi'(t) \leq f(t)\phi(t)$ et $\phi(t_0) \leq u_1$. Montrer que pour tout $t \in [t_0, +\infty[$, $\phi(t) \leq \phi_1(t)$.

5. $\star$ Soient t_0 un réel, T un réel strictement positif et u et v des applications continues de $[t_0, t_0+T]$ dans $\mathbf{R}_+$. On suppose qu'il existe un réel $C \geq 0$ tel que pour tout $t \in [t_0, t_0+T]$,

$$u(t) \leq C + \int_{t_0}^{t} uv.$$

Montrer que pour tout $t \in [t_0, t_0+T]$,

$$u(t) \leq C \exp\left(\int_{t_0}^{t} v(s)\mathrm{d}s\right).$$

6. (a) Soit a un réel, et b une application de $\mathbf{R}_+$ dans $\mathbf{R}$ continue et bornée.
Soit l'équation différentielle :

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = ay + b(t).$$

On suppose que a est positif strictement. Montrer qu'il existe une et une seule solution de cette équation sur $\mathbf{R}_+$ qui soit bornée. Que dire si a est négatif ?

(b) $\star$ On suppose $a \geq$ et $(b_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est une suite de réels bornée. On note S l'ensemble des suite u telle que :

$$\forall n \in \mathbf{N}, u_{n+1} = au_n + b_n.$$

Montrer que S possède un et un seul élément borné.

7. Déterminer l'ensemble E des applications f de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$ continues telles que pour tout réel x,

$$2\,x\,f\,(x) = 3\int_0^x f\,(t)\,\mathrm{d}\,t.$$

8. $\star$ Soit $\sum u_n$ une série d'applications de $[0,1[$ dans $\mathbf{R}$ à valeurs **positives ou nulles**. qui converge simplement. On note f sa somme. On suppose que pour tout entier $n \geq 0$ l'application u_n admet une limite ℓ_n en 1 et que $\sum \ell_n$ diverge. Montrer que $f(x)$ tend vers $+\infty$ lorsque x tend vers 1.

9. $\star$ On pose pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, et tout $x \in \mathbf{R}$,

$$u_n(x) = (-1)^n \underbrace{\sin(\sin(....(\sin(x))...))}_{n \text{ fois}}$$

(a) Montrer que $\sum\limits_{n\geq 1} u_n$ converge simplement.

(b) Montrer que pour tout entier $n \geq 2$, $\|u_n\|_\infty = |u_{n-1}(1)|$.

(c) Déterminer un équivalent de $\|u_n\|_\infty$.

(d) Montrer que $\sum\limits_{n\geq 1} u_n$ ne converge pas normalement.

(e) Montrer que $\sum\limits_{n\geq 1} u_n$ converge uniformement.

10. Soit la fonction f de la variable réelle x donnée par :

$$f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \ln\left(1 + \frac{1}{n^2x^2}\right).$$

(a) Déterminer le domaine de définition D de f.

(b) Etudier la continuité de f sur D.

(c) Donner un équivalent de $f(x)$ aux bornes D.

11. $\star\star$

Pour tout entier $n \geq 1$ on définit : $P_n\ :\ \mathbf{R} \to \mathbf{R}, x \mapsto a_n(1-x^2)^n$, où $a_n = \frac{1}{\int_{-1}^{1}(1-x^2)^n\mathrm{d}x}$.

Soit $\mathbf{E}$ l'espace vectoriel des applications continues sur $[0,1]$ à valeurs réelles ou complexes. On le munit de la norme $\|.\|_\infty$.

Soit $\mathbf{F}$ l'espace des fonctions continues sur $\mathbf{R}$, 2π-périodiques, à valeurs complexes. On le munit de la norme $\|.\|_\infty$

Pour tout entier naturel n, on note $T_n = \mathrm{Vect}(\exp(k\,\cdot), k \in [\![-n,n]\!])$

Soit φ_n la fonction définie sur $\mathbf{R}$ par : $\varphi_n(t) = a_n\left(\cos\dfrac{t}{2}\right)^{2n}$, le réel a_n étant tel que $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi}\varphi_n(t)\ \mathrm{d}t = 1$.

(a) Soit δ un réel tel que $0 < \delta < \pi$; montrer : $\lim_{n\to+\infty} \sup_{\delta \leq t \leq \pi} \varphi_n(t) = 0$.

Soit g un élément de $\mathbf{F}$. Pour tout entier $n \geq 0$, on note Q_n la fonction définie sur $\mathbf{R}$ par la relation :

$$\forall u \in \mathbf{R},\ Q_n(u) = \int_{-\pi}^{\pi} \varphi_n(t) g(u-t)\ \mathrm{d}t.$$

(b) Montrer Q_n appartient à T_n pour tout $n \in \mathbf{N}$.

(c) Montrer que $\lim_{n\to+\infty} \|g - Q_n\|_\infty = 0$.

(d) On suppose que g est une fonction paire ; montrer que Q_n est une fonction paire et en déduire qu'il existe un polynôme P_n tel que $Q_n(u) = P_n(\cos u)$. En déduire le théorème de Weierstrass.

12. $\star$

On considère f une application de $[0,1]$ dans $\mathbf{R}$ continue. Pour tout entier $n \geq 1$ on considère le polynôme :

$$B_n(f) = \sum_{k=0}^{n} \left(\begin{array}{c} n \\ k \end{array} \right) f\left(\frac{k}{n}\right) X^k (1-X)^{n-k},$$

n^{e} polynôme de Bernstein associé à f.

Soit $(X_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ une suite de variables aléatoires de Bernoulli mutuellement indépendantes, toutes de même paramètre x, élément de $[0,1]$. Notons pour tout entier $n \geq 1$, $S_n = X_1 + X_2 + \cdots + X_n$.

(a) Montrer que pour tout entier $n \geq 1$,

$$|f(x) - B_n(f)(x)| \leq \mathrm{E}\left(\left| f(x) - f\left(\frac{S_n}{n}\right)\right|\right).$$

(b) Pour tout réel $h > 0$, on pose :

$$\omega(h) = \sup\{|f(x) - f(y)|, (x_1, x_2) \in [0,1]^2 \text{ et } |x_1 - x_2| \leq h\}\ ;\ A_h = \left\{\left|\frac{S_n}{n} - x\right| \leq h\right\}.$$

Montrer que pour tout entier $n \geq 1$ et tout réel $h > 0$,

$$|f(x) - B_n(f)(x)| \leq 2\mathbf{P}(\bar{A}_h)\|f\|_\infty + \mathbf{P}(A_h)\omega(h)$$

En déduire que $(B_n(f))_{n\in\mathbf{N}}$ converge uniformément vers f sur $[0,1]$

13. $\star\star$ Chudnowski —

Soient le polynôme à coefficients entiers, $p = 2X(1-X)$, la suite $(p_n)_{n\in\mathbf{N}}$, où $p_0 = p$ et pour tout entier $n \geq 1$,

$$p_n = \underbrace{p \circ p \circ \ldots \circ p}_{n \text{ termes}}.$$

Soit $[a,b]$ un segment inclus dans]0,1[.

(a) Montrer que pour tout $x \in [a,b]$, $(p_n(x))_{n\in\mathbf{N}}$ converge vers uniformément vers l'application constamment égale $\frac{1}{2}$. sur $[a,b]$.

(b) On désigne par $P([a,b])$ l'ensemble des fonctions polunomiales de $[a,b]$ dans $\mathbf{R}$ *à coefficients entiers*. Montrer que $P([a,b])$ est une partie dense de l'espace vectoriel normée $(\mathcal{C}^0([a,b],\mathbf{R}), \|\cdot\|_\infty)$ (théorème de Chudnovsky).

(c) Montrer que $P([0,1])$, ensemble des fonctions polynomiales de $[0,1]$ dans $\mathbf{R}$ *à coefficients entiers* n'est pas une partie dense de $(\mathcal{C}^0([0,1],\mathbf{R}), \|\cdot\|_\infty)$.

Programme de colle n°15

51 Groupes, anneaux, corps

— Groupes, sous-groupes, exemples de groupes et de sous-groupes du programme de MPSI.
— Morphismes de groupes : caractérisation de l'injectivité, image directe et réciproque d'un sous-groupe, isomorphisme de groupes.
— Sous-groupes de $\mathbf{Z}$, groupe $\mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$.
— Définition d'un sous-groupe engendré, ordre d'un élément, l'ordre d'un élément divise le cardinal du groupe.
— Groupes monogènes et cycliques. Structure des groupes monogènes.
— Anneau : sous-anneau, morphismes d'anneaux.
— Divisibilité dans les anneaux intègres. Idéal d'un anneau intègre, Idéaux de $\mathbf{K}[X]$.
— Dans $\mathbf{K}[X]$ ou $\mathbf{Z}$, PPCM, PGCD en termes d'idéaux, théorème de Bezout, théorème de Gauss.
— Décomposition en produit d'irréductibles (existence et unicité de la décomposition dans $\mathbf{Z}$ ou $\mathbf{K}[X]$. Irréductibles de $\mathbf{Z}$, $\mathbf{R}[X]$ et $\mathbf{C}[X]$

À venir : l'anneau $\mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$, Algèbres....

Les questions de cours ou exercices avec un astérisque $\star$ pour : C. Brévignon, Malo Le Grognec, Augustin Ravasse, Lucas Pan, Anaël Pelé, Arthur Quendo, Noémie Manach, Martin Pina-Silas, Kevynn Boucher, Thomas Jézequel Ilies Le Marc Brieg Ollivier, Vincent Nouaille -Degorce, Pauline Wadier, Virgile Marrec.

Les questions de cours ou exercices avec deux astérisques $\star\star$ pour : C. Brévignon, Malo Le Grognec, Augustin Ravasse, Martin Pina-Silas, Lucas Pan, Thomas Jézequel, **Arthur Quendo**.

.

52 Questions de Cours

1. Tout groupe monogène est isomorphe à $\mathbf{Z}$ ou $\mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$, (avec de jolies figures).
2. Idéaux de $\mathbf{K}[X]$.

53 Récitation d'exercices

1. Soit ϕ une application de $\mathbf{R}_+$ dans $\mathbf{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$ telle que :

$$\phi' = \phi(1-\phi^2) \text{ et } \phi(0) = \frac{1}{2}. \tag{e}$$

   (a) Montrer que ϕ ne prend pas la valeur 0.
   On pourra montrer que ϕ est solution sur $\mathbf{R}_+$ d'une équation différentielle linéaire homogène du première ordre.
   (b) Montrer que ϕ ne prend pas la valeur 1.
   (c) Montrer que ϕ admet une limite en $+\infty$ à la déterminer.
   (d) Déterminer l'expression de ϕ. *On pourra montrer que ϕ est solution sur $\mathbf{R}_+$ d'une équation différentielle linéaire avec second membre du première ordre.*
2. Soit P un élément de de $\mathbf{R}[X]$ tel que pour tout réel x, $P(x) \geq 0$. Montrer qu'il existe A et B éléments de $\mathbf{R}[X]$ tels que : $P = A^2 + B^2$.
3. Décomposer en un produit d'irréductibles dans $\mathbf{R}[X]$ le polynôme $X^8 + X^4 + 1$.
4. *Révision.* Soit G un sous-groupe de $\mathbf{R}$. Montrer qu'il est soit dense, soit de la forme $a\mathbf{Z}$, où a est un réel.
   Version $\star\star$. Déterminer les sous-groupes compacts de $(\mathbf{C}, \times)$.
5. —UN PEU D'ALGÈBRE LINÉAIRE —
   (a) Soient A et B des élément de $\mathcal{M}_n(\mathbf{Z})$on suppose que $\det(A)$ et $\det(B)$ sont premiers entre eux. Montrer l'existence d'éléments U et V de $\mathcal{M}_n(\mathbf{Z})$ tels que : $UA + VB = I_n$.

(b) Soit A un élément de $\mathcal{M}_n(\mathbf{Z})$. Montrer que A est inversible, d'inverse dans $\mathcal{M}_n(\mathbf{Z})$ si et seulement si $\det A = \pm 1$.

(c) Soit A élément de $\mathcal{M}_2(\mathbf{Z})$ de polynôme caractéristique $X^2 - 1$. Montrer qu'il existe un entier a et un élément P de $\mathcal{M}_2(\mathbf{Z})$ inversible et d'inverse dans $\mathcal{M}_2(\mathbf{Z})$ tels que :

$$P^{-1}MP = \begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

6. (a) Montrer de deux manières que tout sous-groupe d'un groupe cyclique est cyclique ; qu'en déduire sur son cardinal. On admet la question précédente. Soit G un groupe cyclique d'ordre n.
   (b) Soit d_0 un diviseur positif de n. Montrer qu'il existe un unique sous-groupe de G à d_0 éléments.
7. $\star$ Retrouver l'expression de l'indicatrice d'Euler d'un entier $n \geq 2$, en fonction de ses facteurs premiers par un argument probabiliste.
8. $\star$ Montrer dans le cas commutatif le cas particulier du théorème de Lagrange (cours).

   Montrer dans le cas général le théorème de Lagrange.
9. Déterminer à isomorphisme près tous les groupes d'ordre inférieur ou égal à 5. Quel est le cardinal minimal d'un groupe non commutatif ? On utilisera l'exercice précédent.

   $\star\star$ Déterminer à isomorphisme près tous les groupes d'ordre inférieur ou égal à 7. On utilisera l'exercice précédent et le suivant.
10. $\star$ Soit $(G, +)$ un groupe dont tout élément distinct de e_G est d'ordre 2. Montrer que $(G, +)$ est commutatif. Montrer que le cardinal de G est une puissance de 2. On donnera deux preuves.
11. (a) Soient un entier $n \geq 2$, $c = (a_1, a_2, \ldots, a_p)$ un p cycle de S_n et φ un élément de S_n. Déterminer la permutation $\varphi \circ c \circ \varphi^{-1}$.
    (b) En utilisant la question précédente montrer que l'ensemble $\{(1, 2, \ldots, n); (1, 2)\}$ engendre S_n.
    (c) $\star$ On supose $n \geq 3$. Montrer que l'ensemble des tricycles engendre A_n.
    (d) $\star\star$ Quel est le nombre minimal de transpositions qui engendrant S_n ?
12. $\star\star$ Soit G un groupe fini et a un de ses éléments. Montrer que le nombre de conjugués de a est égal à l'indice dans G du centralisateur de a (c'est-à-dire de $\{g \in \mathbf{G} | ag = ga\}$).

    On suppose que G est de cardinal p^k où p est un nombre premier et $k \in \mathbf{N}^*$. Montrer que le centre de G est d'ordre p^h où $h \in [\![1, k]\!]$.
13. (a) Soient a et b des entiers strictements positifs. Montrer l'existence de a' et b' entiers également strictement positifs tels que on ait :
    — les relations de divisibilté $a'|a$, $b'|b$;
    — l'égalité $\mathrm{pgcd}(a', b') = 1$;
    — l'égalité $\mathrm{ppcm}(a, b) = a'b'$.

    Indication : On examinera les décompositions en facteurs premiers de a et b.

    (b) $\star$ Soient g et g' des éléments d'un groupe *abélien* G d'ordres respectifs m et m'. On suppose que m et m' sont premiers entre eux. Montrer que

    $$\omega(gg') = mm'.$$

    Si l'on ne suppose plus m et m' premiers entre eux, a-t-on $\omega(gg') = \mathrm{ppcm}(m, m')$?
    (c) $\star\star$ On appelle exposant du groupe G le plus petit commun multiple ϵ des ordres des ses éléments. Déduire de ce qui précède que G admet un élément z ayant pour ordre l'exposant du groupe G.
    (d) $\star\star$ Montrer que le groupe multiplicatif des inversible de $\mathbf{Z}/11\mathbf{Z}$ est cyclique. Soit K un corps fini. Montrer que le groupe $(K \setminus \{0_K\}, \times)$ est cyclique.

Programme de colle n°16

54 Groupes, anneaux, corps

— Groupes, sous-groupes, exemples de groupes et de sous-groupes du programme de MPSI.
— Morphismes de groupes : caractérisation de l'injectivité, image directe et réciproque d'un sous-groupe, isomorphisme de groupe
— Sous-groupes de $\mathbf{Z}$, groupe $\mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$.
— Définition d'un sous-groupe engendré, ordre d'un élément, l'ordre d'un élément divise le cardinal du groupe.
— Groupes monogènes et cycliques. Structure des groupes monogènes.
— Anneau : sous-anneau, morphismes d'anneaux.
— Divisibilité dans les anneaux intègres. Idéal d'un anneau intègre, Idéaux de $\mathbf{K}[X]$.
— Dans $\mathbf{K}[X]$ ou $\mathbf{Z}$, PPCM, PGCD en termes d'idéaux, théorème de Bezout, théorème de Gauss.
— Décomposition en produit d'irréductibles (existence et unicité de la décomposition dans $\mathbf{Z}$ ou $\mathbf{K}[X]$. Irréductibles de $\mathbf{Z}$, $\mathbf{R}[X]$ et $\mathbf{C}[X]$
— L'anneau $\mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$. Générateurs du groupe $\mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$ et inversibles de l'anneau $\mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$. Equivalence de $\mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$ est intègre, $\mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$ est un corps, et n premier ; Théorème chinois. Indicatrice d'Euler, avec expression en fonction des facteurs premiers. Théorème d'Euler.
— Algèbre, définition, sous-algèbre définition et caractérisation, morphisme d'algèbres, exemples au programme.

55 Suites et séries d'applications $\mathcal{C}^k$, séries entières

— Convergence simple et uniforme des suites et séries d'applications, convergence normale des séries.
— Continuité de la la limite (resp. de la somme) d'une suite (resp d'une série) d'applications continues d'un intervalle I à valeurs dans $\mathbf{K}$ ou un e.v. de dimension finie, qui converge uniformément sur tout segment de I.
— Etude de la convergence de la suite des primitives d'une suite d'applications continues de I à valeurs dans $\mathbf{K}$ ou un e.v. de dimension finie, qui converge uniformément sur tout segment de I. Résultat analogue pour les séries.
— Théorème de régularité de la limite (resp. de la somme) d'une suite (resp. d'une série) d'applications de classe $\mathcal{C}^k$, à valeurs dans $\mathbf{K}$ ou un e.v. de dimension finie.
— Étude de la régularité de l'application $\mathbf{R} \to A$; $t \mapsto \exp(ta)$, où a est un élément d'une algèbre normée de dimension finie A. Application à l'équation différentielle linéaire vectorielle du premier ordre.
— *A venir : séries entières...*

Les questions de cours ou exercices avec un astérisque $\star$ pour : C. Brévignon, Malo Le Grognec, Augustin Ravasse, Lucas Pan, Anaël Pelé, Arthur Quendo, Noémie Manach, Martin Pina-Silas, Kevynn Boucher, Thomas Jézequel Ilies Le Marc Brieg Ollivier, Vincent Nouaille -Degorce, Pauline Wadier, Virgile Marrec.

Les questions de cours ou exercices avec deux astérisques $\star\star$ pour : C. Brévignon, Malo Le Grognec, Augustin Ravasse, Martin Pina-Silas, Lucas Pan, Thomas Jézequel, **Arthur Quendo**.

56 Questions de Cours

1. Théorème d'Euler, petit théorème de Fermat (comme corrolaire). Application montrer que pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, on a : $10^{(10^n)} = 4[7]$.
2. $\star$ Equivalence : $\mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$ est intègre, $\mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$ est un corps, n premier.
3. Indicatrice d'Euler φ : si p et q sont premiers entre eux alors $\varphi(pq) = \varphi(p)\varphi(q)$, expression en fonction des facteurs premiers.

57 Exercices

1. On admet la cyclicité des sous-groupes d'un groupe cyclique (programme précédent). Soit G un groupe cyclique d'ordre n. Soit d_0 un diviseur positif de n. Montrer qu'il existe un unique sous-groupe de G à d_0 éléments.

   On désigne par φ l'indicatrice d'Euler. Montrer que : $\sum_{\substack{1 \leq d \leq n \\ d \mid n}} \varphi(d) = n$,

2. $\star$ Soit m un entier supérieur ou égal à 2. On appelle racines primitives m^{e} de l'unité les générateurs de $\mathbf{U}_m$. On pose : $\phi_m(X) := \prod_{i=1}^{h_m} (X - \xi_i)$, où $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_{h_m}$ sont les h_m racines primitives m^{e} de l'unité (polynôme cyclotomique). On pose également $\phi_1(X) := X - 1$. Montrer

$$\prod_{\substack{1 \leq d \leq n \\ d \mid n}} \phi_d = X^n - 1$$

   En déduire que ϕ_n est élément de $\mathbf{Z}[X]$.

3. Soit P un élément de $Q[X]$ irréductible. Montrer que les racines complexes de P sont simples.
4. Soit $n \in \mathbf{N}^*$ Montrer que $(n-1)! \equiv -1\,[n]$ si et seulement si n est premier.
5. (a) Résoudre dans $\mathbf{Z}/11\mathbf{Z}$ l'équation d'inconnue a, $a^2 - \overline{100} = \overline{0}$.
   (b) Résoudre dans $\mathbf{Z}/121\mathbf{Z}$ l'équation d'inconnue a, $a^2 - \overline{100} = \overline{0}$.
   (c) Résoudre dans $\mathbf{Z}/221\mathbf{Z}$ l'équation d'inconnue a, $a^2 + \overline{11}a - \overline{12} = \overline{0}$.

6. $\star$Loi zêta —

   Soit $\mathcal{P}$ l'ensemble des nombres premiers. On note p_i le i^{e} nombre premier.

   (a) Soit $x \in \mathbf{R}$ tel que $x > 1$. Montrer qu'on définit la loi de probabilité d'une variable aléatoire X à valeurs dans $\mathbf{N}^*$ en posant $\forall n \in \mathbf{N}^*, \quad P(X = n) = \frac{1}{\zeta(x) n^x}$. (loi zêta de paramètre x).

   On dira qu'une telle variable aléatoire X suit la loi de probabilité zêta de paramètre x.
   Dans les questions suivantes, on suppose que X est une variable aléatoire qui suit la loi zêta de paramètre $x > 1$.

   (b) Montrer que, pour tout $a \in \mathbf{N}^*$, $P(X \in a\mathbf{N}^*) = \dfrac{1}{a^x}$.

   Soit x un réel tel que $x > 1$ et soit X une variable aléatoire qui suit la loi zêta de paramètre x. Soit enfin $(q_1, \ldots, q_n) \in \mathcal{P}^n$, un n-uplet de nombres premiers distincts.

   (c) Montrer que les événements $(X \in q_1\mathbf{N}^*), \ldots, (X \in q_n\mathbf{N}^*)$ sont mutuellement indépendants.

   Pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, on note B_n l'événement $B_n = \bigcap_{k=1}^{n} (X \notin p_k\mathbf{N}^*)$.

   (d) En étudiant la suite $(P(B_n)_{n \in \mathbf{N}}$, montrer que

$$\forall x \in]1, +\infty[, \quad \frac{1}{\zeta(x)} = \lim_{n \to +\infty} \prod_{k=1}^{n} \left(1 - \frac{1}{p_k^x}\right).$$

   Régularité de sommes de séries

7. Soit la série de fonctions $\sum_{n \geq 1} u_n$, où pour tout entier naturel non nul n, u_n désigne l'application

$$u_n :]1, +\infty] \to \mathbf{R},\ x \mapsto \frac{1}{n^x}.$$

   (a) Montrer que la série de fonctions converge simplement sur $]1, +\infty]$.
   Nous noterons ζ la somme de cette série, application de $]1, +\infty]$ dans $\mathbf{R}$.
   (b) Montrer que ζ est indéfiniment dérivable sur $]1, +\infty]$.
   (c) Donner un équivalent de ζ lorsque x tend vers 1 par valeurs strictement supérieures.

8. Soit la série de fonctions $\sum_{n \geq 1} u_n$, où pour tout entier naturel non nul $n \geq 2$, u_n désigne l'application

$$u_n :]1, +\infty] \times \mathbf{R} \to \mathbf{R},\ (x, y) \mapsto \frac{1}{n^x \ln(n)^y}.$$

   (a) Montrer que la série de fonctions converge simplement.
   Nous noterons f la somme de cette série.

(b) Montrer que f est continue.
(c) Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^1$ et préciser sa différentielle.

9. Soit f la fonction de la variable réel x, définie par
$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{e^{-nx}}{1+n^2}.$$
(a) Montrer que le domaine de définition de f est un intervalle de la forme $[a, +\infty[$ à déterminer.
(b) Montrer que f est continue sur $[a, +\infty[$ et que sa restriction à $]a, +\infty[$ est de classe $\mathcal{C}^2$.
(c) Etudier la limite de f en $+\infty$.
(d) f est elle dérivable en a.

10. $\star$ On dit qu'un polynôme non nul élément de $\mathbf{Z}[X]$ est primitif si le pgcd de ses coefficients est 1.
(a) Montrer que le produit de polynômes non nuls P et Q éléments de $\mathbf{Z}[X]$ primitifs est primitif.
(b) On appelle contenu un polynôme P non nul élément de $\mathbf{Z}[X]$, le pgcd de ses coefficients, et on note $c(P)$ cette quantité. Montrer que pour des polynômes non nuls P et Q éléments de $\mathbf{Z}[X]$,
$$c(PQ) = c(P)C(Q).$$
(c) $\star\star$ Soient $A \in \mathbf{Z}[X]$ primitif, non irréductible dans $\mathbf{Q}[X]$ et non constant. Montrer qu'il est le produit de deux éléments de $\mathbf{Z}[X]$ de degrés strictement inférieurs à celui de A. en déduire les éléments irréductibles de $\mathbf{Z}[X]$ en fonction de ceux de $\mathbf{Q}[X]$.
(d) $\star\star$ Soient p un nombre premier et $P \in \mathbf{Z}[X]$ non constant, P s'écrit $P = a_0 + a_1X + ... + a_nX^n$. On suppose :

i. p ne divise pas a_n ;
ii. p divise $a_0, a_1, a_2, ...a_{n-1}$;
iii. p^2 ne divise pas a_0.

Montrer que P est irréductible dans $\mathbf{Q}[X]$ (critère d'Esenstein). Étudier l'irréductibilité de $X^n - 2$ dans $\mathbf{Q}[X]$.

11. $\star\star$ Soit P un polynôme unitaire de $\mathbf{Z}[X]$. On suppose que P est le produit dans $\mathbf{Q}[X]$ de deux polynômes unitaires A et B Montrer que A et B sont éléments de $\mathbf{Z}[X]$. En déduire qu'il existe une matrice M à coefficients entiers, diagonalisable dans $\mathcal{M}_n(\mathbf{C})$ et dont le polynôme caractéristique est P.

12. $\star$ Soient p un nombre premier et $k \in \mathbf{N}^*$. Montrer que :
$$\sum_{a \in \mathbf{Z}/p\mathbf{Z}} a^k = \bar{0} \text{ ou } -\bar{1}.$$
Préciser à quelle condition on est dans l'un ou l'autre cas (on pourra regarder si $p-1$ divise k ou non).

13. $\star\star$

Soit $(G, *)$ un groupe non abélien fini. On munit $G \times G$ de la probabilité uniforme et on note $n(G)$ la probabilité de l'événement $\{(x, y) \in G \times G | x * y = y * y\}$?.
(a) Soit H un sous-groupe de G tel que pour tout $a \in G$ on ait : $aH = Ha$ (sous-groupe distingué). Montrer que G/H ce muni d'une loi interne $\underset{H}{*}$ telle que $(H, \underset{H}{*})$ soit un groupe et l'application de G dand G/H qui à un élément associe sa classe d'équivalence soit un morphisme de groupes.

Pour tout $g \in G$ on note C_g l'ensemble des éléments de G qui commutent avec g.
(b) Soient $a \in G$ et ω sa classe de conjugaison : $\omega = \{gag^{-1}, g \in G\}$.
Montrer que C_a est un sous-groupe de G et que son indice est égal au cardinal de ω.
(c) Montrer que
$$n(G) = \frac{1}{|G|^2} \sum_{a \in G} |C_a|.$$
En déduire que si le nombre de classe de conjugaison dans G est k alors :
$$n(G) = \frac{k}{|G|}.$$
Notont Z le centre de G. Montrer que :
$$n(G) \leq \frac{1}{2} + \frac{|Z|}{2|G|}$$
(d) Montrer que Z est un sous-groupe de G distingué. En considérant G/Z prouver l'inégalité $\boxed{n(G) \leq 5/8}$

Programme de colle n°17

58 Suites et séries d'applications de classe $\mathcal{C}^k$

— Continuité de la la limite (resp. de la somme) d'une suite (resp d'une série) d'applications continues d'un intervalle I à valeurs dans $\mathbf{K}$ ou un e.v. de dimension finie, qui converge uniformément sur tout segment de I.
— Etude de la convergence de la suite des primitives d'une suite d'applications continues de I à valeurs dans $\mathbf{K}$ ou un e.v. de dimension finie, qui converge uniformément sur tout segment de I. Résultat analogue pour les séries.
— Théorème de régularité de la limite (resp. de la somme) d'une suite (resp d'une série) d'applications de classe $\mathcal{C}^k$, à valeurs dans $\mathbf{K}$ ou un e.v. de dimension finie.
— Etude de la régularité de l'application $\mathbf{R} \to A\,;\ t \mapsto \exp(ta)$, où a est un élément d'une algèbre normée de dimension finie A. Application à l'équation différentielle linéaire vectorielle du premier ordre.

59 Séries entières

— Définition du rayon de convergence (lemme d'Abel).
— Sommes et produits de séries entières, rayons de convergence de la série somme et de la série produit.
— Séries entières dérivée et produit, rayons de convergence de la série dérivée et de la série produit.
— Régularité de la somme d'une série entière de la variable réelle (dérivation et primitivation termes à termes).
— Théorème d'Abel.
— Fonctions développables en séries entières. Définition. Unicité du développement en série entière, série de MacLaurin. Exemples au programme.
— Fonction génératrice d'une variable aléatoire. Application au calcul de l'espérance et de la variance, application à la loi géométrique. (*Le cours de probabilité n'a pas été traité, les exercices resterons très élémentaires*).
— *À venir réduction des endomorphismes, le retour.*

Les questions de cours ou exercices avec un astérisque $\star$ pour : C. Brévignon, Malo Le Grognec, Augustin Ravasse, Lucas Pan, Anaël Pelé, Arthur Quendo, Noémie Manach, Martin Pina-Silas, Kevynn Boucher, Thomas Jézequel Ilies Le Marc Brieg Ollivier, Vincent Nouaille -Degorce, Pauline Wadier, Virgile Marrec, Fabien Goutray.

Les questions de cours ou exercices avec deux astérisques $\star\star$ pour : C. Brévignon, Malo Le Grognec, Augustin Ravasse, Martin Pina-Silas, Lucas Pan, Thomas Jézequel, **Arthur Quendo**.

60 Questions de cours

1. Rayon de convergence de la série somme et de la série produit.
2. Rayon de convergence de la série dérivée et primitive.

61 Exercices

1. Soit la série d'applications, $\sum\limits_{n\geq 2} u_n$, où pour tout entier $n \geq 2$, $u_n : [-1,1] \to \mathbb{R};\ x \mapsto \frac{(-1)^n}{x+n}$.
   (a) Montrer que la série converge simplement sur $[-1,1]$. Notons f sa somme, (définie sur $[-1,1]$).
   (b) Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^\infty$.
   (c) Monter que f est somme de sa série de MacLaurin. Donner le développement de f en série entière au voisinage de 0.
   (d) $\star$ Retrouver ce résultat par une autre méthode.

2. (a) Soit $\sum a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence R non nul. Montrer que la série entière $\sum \frac{a_n}{n!} z^n$ a un rayon de convergence infini.

   (b) Soit a un entier. Pour tout entier $n \geq 1$, a_n désigne la n^{e} décimale de $\sqrt{a}$. Déterminer le rayon de convergence de $\sum\limits_{n\geq 1} a_n x^n$.

3. *Révision*

   Montrer qu'un élément A de $\mathcal{M}_n(\mathbf{Z})$ est inversible dan $\mathcal{M}_n(\mathbf{Z})$ si et seulement si $\det(A) = \pm 1$.

   Application Déterminez tous les triplets d'entiers relatifs (a, b, c) tels que la matrice

$$M = \begin{pmatrix} 6a & 3b & 5c \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 5 \end{pmatrix},$$

   soit inversible dans $\mathcal{M}_3(\mathbf{Z})$.

4. $\star$

   Pour tout entier a, On note S_a l'élément de $\mathcal{M}_2(\mathbf{Z})$, $\begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

   (a) S_0 et S_1 sont-elles semblables dans $\mathcal{M}_2(\mathbf{Q})$?

   (b) S_0 et S_1 sont-elle semblables dans $\mathcal{M}_2(\mathbf{Z})$?

5. $\star$ Pour tout entier $n \geq 1$, on appelle dérangement de $\{1, \ldots, n\}$ toute permutation de $\{1, \ldots, n\}$ sans point fixe, et on note d_n le cardinal de l'ensemble des dérangements de $\{1, \ldots, n\}$; enfin on pose $d_0 = 1$. Soit la série entière :

$$\sum_{n\geq 0} \frac{d_n}{n!} x^n.$$

   Montrer que son rayon n'est pas nul ; déterminer sa somme. En déduire son rayon et que pour tout entier $n \geq 1$,

$$d_n = n! \sum_{j=0}^{n} \frac{(-1)^j}{j!}.$$

6. Théorème de liouville —

   Soit une série entière $\sum a_n z^n$ de la variable complexe z, de rayon de convergence R non nul. On note f sa somme : $f \ : \ \mathrm{B}_{\mathrm{o}}(0, R) \to \mathbf{C}\,;\ z \mapsto \sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$.

   (a) Soit p un entier $n \geq 0$ et un réel r tel que $0 < r < \mathbf{R}$. Exprimer a_p au moyen de $\int_0^{2\pi} f(re^{i\theta}) e^{-ip\theta} \mathrm{d}\theta$.

   (b) On suppose que $R = +\infty$. Montrer que si f est bornée sur $\mathbf{C}$, alors f est constante.

7. $\star$ Soit $\sum a_n z^n$ une série entière de la variable réelle z, de rayon de convergence égal à 1. On note S sa somme On suppose que pour tout $n \in \mathbf{N}$, $a_n \geq 0$ et que la série complexe $\sum a_n$ diverge. Montrer que $S(x) \underset{x\to 1, x\in[0,1[}{\to} +\infty$.

   On suppose que a_n est élément de $\mathbf{N}$, pour tout entier naturel n. Montrer que si f est bornée sur $\mathrm{B}_{\mathrm{o}}(0, 1)$, alors c'est un polynôme.

8. $\star\star$ Suite de la question précédente

   Soit $\sum b_n z^n$ une série entière de la variable complexe z, de rayon de convergence 1. On note g sa somme. On suppose que $b_n \in \mathbf{Z}$, pour tout $n \in \mathbf{N}$, et que g est bornée sur $\mathrm{B}_{\mathrm{o}}(0, 1)$. Montrer que g est un polynôme.

   On pourra montrer que pour tout élément r de $]0, 1[$,

$$\sum_{n=0}^{+\infty} b_n^2 r^{2n} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |g(re^{i\theta})|^2 \mathrm{d}\theta.$$

9. Soit f la fonction numérique de la variable réelle x définie par, $f(x) = \frac{\arcsin(x)}{\sqrt{1-x^2}}$. Développer f en série entière au voisinage de 0.

   Soit f la fonction numérique de la variable réelle x définie par, $f(x) = \frac{2x}{(x+1)(x+2)^2}$. Développer f en série entière au voisinage de 0.

10. Calculer la somme de la série entière de la variable réelle t, $\sum (n^3 + 2n + 5) t^n$, puis de $\sum \frac{n+1}{(n+2)n!} t^n$.

11. ⋆⋆ Soit f une application d'un un ouvert convexe dans $\mathbf{C}$ développable en série entière au voisinage de chaque point. On veut montrer que si $|f|$ admet un maximum local en un point z_0, alors f est constante.

   (a) On suppose que f n'est pas constante. Soit $\sum a_n(z-z_0)^n$ la série de Taylor de f au voisinage de z_0. Montrer qu'il existe un entier $n \geq 1$ tel que $a_n \neq 0$. On note k le plus petit élément n de $\mathbf{N}^*$ tel que $a_n \neq 0$.

   (b) On notera, pour tout entier naturel n, ρ_n le module de a_n, θ_n son argument, élément de $]-\pi,+\pi]$, Pour $r \in \mathbf{R}_+^*$ et $\phi \in]-\pi,+\pi]$, montrer que

$$f(z_0+re^{i\phi}) = \rho_0 e^{i\theta_0} + \rho_k r^k e^{i(\theta_k+k\phi)} + \mathrm{o}(r^k)(r \to 0).$$

   (c) Conclure par un choix inspiré de ϕ.

   (d) A quelle condition $|f|$ peut-elle admettre un minimum local.

12. ⋆⋆ — Théorème de Biberbach réel (Dieudonné) —
Soit f la somme d'une série entière $\sum\limits_{n\geq 1} a_n z^n$, de rayon de convergence R supérieur ou égal à 1 de la variable complexe z, On suppose que tous les coefficients de la série entière sont **réels**, que $a_1 = 1$ et que la restriction de f à $\mathrm{D_o}(0,1)$ est injective.

   (a) Soit z_0 un élément de $\mathrm{D_o}(0,1)$; montrer que $f(z_0)$ est réel si et seulement si z_0 est réel. En déduire que si $\mathrm{Im}(z_0) \geq 0$ alors $\mathrm{Im}(f(z_0)) \geq 0$.

   (b) Calculer pour tout élément de $]0,1[$ et tout entier $n \geq 0$,

$$\int_0^{\pi} \mathrm{Im}(f(r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}) \sin(n\theta)\,\mathrm{d}\theta.$$

   (c) Déduire de ce qui précède que pour tout $n \in \mathbf{N}$, $|a_n| \leq n$.
   Indication on poura montrer que $|\sin(n\theta| \leq n|\sin(\theta)|$, pour tout $n \in \mathbf{N}$ et tout réel θ.

   (d) La majoration est-elle optimale ?

   (e) ⋆⋆⋆⋆ Montrer le résultat sans supposer les a_n réels.

Programme de colles n°18

62 Polynômes d'endomorphismes

Par u on désigne un endomorphisme d'un espace vectoriel de dimension n et par M un élément de $\mathcal{M}_n(\mathbf{K})$.

— Polynôme en u en M : la substitution dans un polynôme de l'indéterminée par U ou M est un morphisme d'algèbres.

— Si λ est valeur propre de u (M) alors $p(\lambda)$ est valeur propre de $P(u)$ $(p(M)$.

— Idéal annulateur de u (M). Définition du polynôme minimal μ_u. Polynôme minimal d'un endomorphisme induit, les valeurs propre de u (M) sont racines de tout polynôme anulateur. Les racines du polynôme minimal sont les valeurs propres. Si d est le degré de μ_u, $(u^0, \ldots, u^{d-1})$ est une base de $\mathbf{K}[u]$. Théorème de Cayley-Hamilton.

— Lemme des noyaux. Si u admet un polynôme caractéristique scindé, alors $\mathbf{E}$ est la somme d'espaces stables sur lesquels, u induit la somme d'un endomorphisme diagonalisable et d'un endomorphisme nilpotent, application matricielle, dimension des sous-espaces caractéristiques.

— Un endomorphisme est trigonalisable si et seulement si il annule un polynôme scindé.

— l'endomorphisme u (la matrice M) est diagonalisable si et seulement si il annule un polynôme simplement scindé. Un endomorphisme induit par un endomorphisme est diagonalisable, u (M) est diagonalisable si et seulement si son polynôme minimal est simplement scindé.

— *À venir : intégrale à paramètre.*

Les questions de cours ou exercices avec un astérisque $\star$ pour : C. Brévignon, Malo Le Grognec, Augustin Ravasse, Lucas Pan, Anaël Pelé, Arthur Quendo, Noémie Manach, Martin Pina-Silas, Kevynn Boucher, Thomas Jézequel Ilies Le Marc Brieg Ollivier, Vincent Nouaille -Degorce, Pauline Wadier, Virgile Marrec, Fabien Goutray.

Les questions de cours ou exercices avec deux astérisques $\star\star$ pour : C. Brévignon, Malo Le Grognec, Augustin Ravasse, Martin Pina-Silas, Lucas Pan, Thomas Jézequel, **Arthur Quendo**.

63 Questions de cours

1. L'ensemble des polynômes annulateurs d'un endomorphisme est un idéal non trivial, définition du polynôme minimal, racine de celui-ci.
2. Lemme des noyaux (pour deux polynômes).
3. $\star$ L'endomorphisme u est diagonalisable si et seulement si il annule un polynôme simplement scindé.
4. *Révision.* Soit $M \in \mathcal{M}\ (R)$. Montrer que : $\mathbf{R} \to \mathcal{M}_n(\mathbf{R})\,;\ t \mapsto \exp(tM)$ est de classe $\mathcal{C}^1$ et donner sa dérivée.

64 Exercice

1. Soit M un élément de $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ Déterminer les application Φ de $\mathbf{R}$ dans $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ de classe $\mathcal{C}^1$ tels que

$$\Phi' = M\Phi - \Phi M.$$

2. Soient $(X_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ une suite de variables aléatoires, mutuellement indépendantes, de même loi à valeurs dans $\mathbf{N}$, et T une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbf{N}$ indépendante des précédentes. On note G_X la fonction génératrice commune à toutes les X_n.
   Pour $n \in \mathbf{N}$ et $\omega \in \Omega$, on pose $S_n(\omega) = \sum_{k=1}^n X_k(\omega)$ et $S_0(\omega) = 0$, puis $S(\omega) = S_{T(\omega)}(\omega)$.
   (a) Montrer l'égalité $G_S = G_T \circ G_X$.
   (b) En déduire que, si T et les X_n sont d'espérance finie, alors S aussi et $\mathrm{E}(S) = \mathrm{E}(T)\mathrm{E}(X_1)$.

3. $\star$ Soient r un élément de $\mathbf{N}^*$ et $(a_1, \dots, a_r)$ un élément de $(\mathbf{N}^*)^r$. Pour tout entier naturel n, on note p_n le nombre de solutions dans $\mathbf{N}^r$ de l'équation d'inconnue $(x_1, x_2, \dots, x_r)$,

$$a_1x_1 + \cdots + a_rx_r = n. \tag{8}$$

   Montre que la somme de la série génératrice de la suite $(p_n)_{n\in\mathbf{N}}$ coïncide sur $]-1, 1[$ avec une fraction rationnelle à préciser. *Application* : Déterminer, pour tout entier naturel n, l'entier $p(n)$ dans le cas où $r = 2$, $a_1 = 1$ et $a_2 = 2$.

4. On garde les notations précédentes
   (a) Déterminer dans le cas où $a_1 = a_2 = ... = a_r = 1$, pour tout $n \in \mathbf{N}$, le nombre p_n, en utilisant la série génératrice puis en utilisant les mots à $n + r - 1$ lettres sur l'alphabet $\{|, -\}$.
   (b) $\star\star$ On suppose $a_1, a_2, \dots, a_r$ premiers entre eux dans leur ensemble. Montrer que $p_n \underset{n\to+\infty}{\sim} cn^{r-1}$, où c est un réel à déterminer.

5. Soit M un élément de $\mathrm{GL}_n(\mathbf{C})$. On suppose que M^3 est diagonalisable. Montrer que M est diagonalisable.
   (*Version* $\star$) Soit M un élément de $\mathcal{M}_n(\mathbf{C})$. On suppose que M^3 est diagonalisable et que $\mathrm{Ker}(M) = \mathrm{Ker}(M^3)$. Montrer que M est diagonalisable.
   (*Version* $\star\star$) Soit q un élément de $\mathbf{C}[X]$. On suppose que $q(M)$ est diagonalisable et $q'(M)$ inversible. On se propose de montrer que M est diagonalisable.
   (a) On considère un élément p de $\mathbf{C}[X]$ à racines simples tel que $p \circ q(M) = 0_n$. On note β_1, β_2...,β_k les racines, deux à deux distinctes de p. En considérant les polynômes $(q - \beta_1)$, $(q - \beta_2)$,...,$(q - \beta_k)$, montrer que toute valeur propre α de M est racine simple de $p \circ q$.
   (b) Conclure en considérant le polynôme minimal de M.

6. Soit n un entier strictement positif et soient A et B des éléments de $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ tous deux diagonalisables. On suppose que $A^5 = B^5$ (resp. version $\star$, $\exp(A) = \exp(B)$). En comparant les espaces propres de A et de A^5 (resp. $\exp(A)$) montrer que $A = B$. Reprendre la question précédente en montrant que A est un polynôme en A^5 (resp. $\exp(A)$).

7. Soit M un élément non nul de $\mathcal{M}_3(\mathbf{R})$, tel que $M^3 = -M$. Montrer que M est semblable à

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

   On donnera une méthode par diagonalisation dans $\mathcal{M}_3(\mathbf{C})$.
   $\star$ Donner une méthode n'utilisant que $\mathcal{M}_3(\mathbf{R})$.

8. Soient n un entier strictement positif, A un élément de $\mathcal{M}_n(\mathbf{K})$ et B l'éléments de $\mathcal{M}_{2n}(\mathbf{K})$, $\begin{pmatrix} 0_n & 2A \\ 4A & -2A \end{pmatrix}$. Montrer que A est diagonalisable si et seulement si B est diagonalisable.

9. Déterminer les sous-espaces de $\mathcal{M}_{4,1}(\mathbf{R})$ stables par l'endomorphisme canoniquement associé à A où :
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

10. $\star$
   (a) Montrer que l'ensemble des matrices nilpotentes éléments de $\mathcal{M}_n(\mathbf{C})$ est un fermé. Montrer que 0_n est adhérent à la classe de similitude d'un élément M de $\mathcal{M}_n(\mathbf{C})$ si et seulement si M est nilpotente.
   (b) Soit M un élément de $\mathcal{M}_n(\mathbf{C})$. Montrer que M est diagonalisable si et seulement si sa classe de similitude est fermée.

11. Soit u et v des endomorphismes diagonalisables d'un $\mathbf{K}$-espace vectoriel $\mathbf{E}$ de dimension finie n non nulle, qui commutent. Montrer qu'ils sont codiagonalisables. Même question pour une famille quelconque $(u_i)_{i\in I}$ d'endomorphismes diagonalisables.

12. $\star\star$ Soit l'application $\varphi\ :\ \mathcal{M}_n(\mathbf{R}) \to \mathcal{M}_n(\mathbf{R})\,;\ M \mapsto (\mathrm{tr}(M), \mathrm{tr}(M^2), \dots, \mathrm{tr}(M^n))$.
   (a) Montrer que φ est différentiable et calculer sa différentiel en un point quelconque M de $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$.
   (b) Montrer que pour tout $M \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R})$, $\mathrm{rg}(\mathrm{d}\varphi)(M) = \deg(\mu_M)$.
   (c) Montrer que l'ensemble des matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ dont le polynôme minimal est le polynôme caractéristique est un ouvert de $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$.

13. ⋆⋆ Soit u un endomorphisme d'un espace vectoriel de dimension finie non nulle n sur le corps $\mathbf{K} = \mathbf{R}$ ou $\mathbf{C}$.

   (a) Montrer que tout vecteur $\vec{x}$ de $\mathbf{E}$, l'ensemble $\mathfrak{I}_{\vec{x}}$ des polynômes P, éléments de $\mathbf{K}[X]$ tels que $P(u)(\vec{x}) = \vec{0}$ est un idéal non nul de $\mathbf{K}[X]$.
   On notera $\pi_{\vec{x}}$ son générateur unitaire.

   (b) Montrer qu'il existe un élément $\vec{a}$ de $\mathbf{E}$ tel que $\pi_{\vec{a}} = \mu$.

   (c) Montrer que l'ensemble A des éléments $\vec{x}$ tel que $\pi_{\vec{x}} = \mu$ est un ouvert dense.

CORRECTION DE LA QUESTION 9

La détermination des sous-espaces stables par un endomorphisme diagonalisable est simple. Nous verrons prochainement le cas général qui offre plus de difficultés ?

Les éléments de $\mathbf{R}^4$ seront notés en colonne.

L'endomorphisme f de $\mathbf{R}^n$ canoniquement associé à A laisse stable les deux plans $\text{vect}(E_1, E_2)$ et $\text{vect}(E_3, E_4)$ l'examen des endomorphismes induits sur ces plans fournit une base de vecteurs propres et les trois valeurs propres 1,2 et 3 :

$$\mathbf{E}_1(f) = \text{vec}((0,0,1,1)^\top)\,; \mathbf{E}_2(f) = \text{vec}((1,1,0,0)^\top)\,; \mathbf{E}_3(f)\text{vec}((1,2,0,0)^\top;,(0,0,1,-1).$$

• Droite stables

Le cas des droites stables est particulièrement simple que la matrice soit ou non diagonalisable.

Les droite stables, sont les droites dirigées par un vecteur propre (droites propres). En effet une droite propre est stable (les espaces propres sont des sous-espaces vectoriels) ; soit réciproquement D une droite stable, en appelant U un de ses vecteurs directeurs, on a AU élément de D donc de la forme kU, avec k un réel, ce qui fait de U un vecteur propre.

On obtient ainsi toute les droites propres :

— $D = \text{vec}((0,0,1,1)^\top)$;
— $D' = \text{vec}((1,1,0,0)^\top)$;
— les droites D_t, avec $t \in \mathbf{R} \cup \{\infty\}$, où $D_t = \text{vec}(t(1,2,0,0)^\top + (0,0,1,-1)^\top)$ pour tout réel t et $D_\infty = \text{vec}((1,2,0,0)^\top)$.

Soit plus généralement un sous-espace F stable par f. Alors le corollaire du théorème de diagonalisation par annulation d'un polynôme simplement scindé dit que l'endomorphisme g, induit par f sur F est diagonalisable.

Donc $F = \bigoplus_{\lambda \in \text{sp}(g)} \mathbf{E}_\lambda(g)$.

Mais pour élément λ de $\text{sp}(g)$ est *a fortiori* élément de $\text{sp}(f)$ et

$$\mathbf{E}_\lambda(g) = \mathbf{E}_\lambda(f) \cap F.$$

Donc

$$F = F_1 \oplus F_2 \oplus F_3, \tag{9}$$

où pour $i = 1,2,3$ F_i est un sous-espace vectoriel de $\mathbf{E}_i(f)$ éventuellement nul dans le cas ou i n'est pas valeurs propre de g.

Réciproquement tout sous-espace vectoriel de $\mathbf{C}^4$ de la forme (9) est clairement stable par f.

Appliquons.

• Plans stables

Les plans stables pas f sont les sous-espaces vectoriels suivants :

— $D \oplus D'$;
— $D \oplus D_t$; $t = \in \mathbf{R} \cup \{\infty\}$;
— $D' \oplus D_t$; $t = \in \mathbf{R} \cup \{\infty\}$;
— $\mathbf{E}_3(f)$.

• Hyperlans stables

Les espaces stables pas f de dimension 3 sont les sous-espaces vectoriels suivants :

— $D \oplus D' \oplus D_t$; $t = \in \mathbf{R} \cup \{\infty\}$;
— $D \oplus \mathbf{E}_3(f)$;
— $D' \oplus \mathbf{E}_3(f)$.

Programme de colle n°19

65 Complément sur l'intégrale

- Théorème de convergence dominée de Lebesgue.
- Théorème de Fubini-Tonelli pour l'interversion $\int/\sum$ (fonctions positives).
- Théorème d'interversion d'une intégrale et de la somme d'une série de fonctions $\sum u_n$, lorsque pour tout entier naturel n, u_n est continue par morceaux intégrable et $\sum \int_I |u_n|$ converge.
- Utilisation du théorème de Lebesgues pour l'interversion $\int/\sum$.
- Explicitation du reste pour l'interversion $\int/\sum$ (cas géométrique).
- Théorème de continuité d'une intégrale sur un intervalle quelconque dépendant d'un paramètre.
- Théorème de dérivation d'une intégrale sur un intervalle quelconque dépendant d'un paramètre, généralisation à la classe $\mathcal{C}^k$.

Les questions de cours ou exercices avec un astérisque $\star$ pour : C. Brévignon, Malo Le Grognec, Augustin Ravasse, Lucas Pan, Anaël Pelé, Arthur Quendo, Noémie Manach, Martin Pina-Silas, Kevynn Boucher, Thomas Jézequel Ilies Le Marc Brieg Ollivier, Vincent Nouaille -Degorce, Pauline Wadier, Virgile Marrec, Fabien Goutray.

Les questions de cours ou exercices avec deux astérisques $\star\star$ pour : C. Brévignon, Malo Le Grognec, Augustin Ravasse, Martin Pina-Silas, Lucas Pan, Thomas Jézequel, **Arthur Quendo**.

66 Questions de cours

1. *Révision.* Montrer que les les espaces caractéristiques d'un endomorphisme dont le polynôme cractéristique est scindé sont supplémentaire. Application à la diagonalisation par bloc d'une matrice, on donnera le lien entre la taille des blocs et le polynôme caractéristique.

67 Exercices

1. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R})$. On note les éléments de $\mathbf{R}^n$ en colonne, et on muni cet espace du produit scalaire canonique.
   (a) Soient F un sous-espace vectoriel de $\mathbf{R}^n$. Monter que F est stable par A si et seulement si $F^\perp$ est stable par $A^\top$.
   (b) **Application.** On suppose que $A = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 1 & \frac{3}{2} \end{pmatrix}$. Déterminer les plans stables par A.
   (c) Soit u un endomorphisme d'un espace vectoriel de dimension 3. Montrer qu'il admet un plan stable.
   (d) $\star$ Soit $A_1, A_2, ...A_p$ des éléments de $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ trigonalisables et qui commutent deux à deux. En utilisant la question 1. montrer qu'ils sont cotrigonalisables.
2. $\star$ Donner une condition nécessaire et suffisante pour qu'une matrice de permutation soit diagonalisable.
3. $\star$ Soient $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbf{C})$ à valeur et $p \in \mathbf{N}$. Montrer qu'il existe $B \in \mathcal{M}_n(\mathbf{C})$ tel que $B^p = A$.
4. $\star$ Par G on désigne un sous-groupe de $\mathrm{GL}_n(\mathbf{K})$. Nous supposerons donc qu'il existe un enier naturel N non nul tel que pour tout élément A de G, $A^N = I_n$.

   Soit F le sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbf{C})$ engendré par G .On se donne $(M_1, ...M_m)$ une base de $\mathbf{F}$, *constituée d'éléments de* G et l'application $f \ : \ G \to \mathbf{C}^m \ ; \ A \mapsto (\mathrm{Tr}(AM_1), ..., \mathrm{Tr}(AM_m))$
   (a) Soient A et B des éléments de G tels que $f(A) = f(B)$. Montrer que pour tout élément M de F, $\mathrm{Tr}(AM) = \mathrm{Tr}(BM)$.
   (b) Montrer que f est injective.
   (c) Montrer que G est fini.
5. Soit f une application de $\mathbf{R}_+$ dans $\mathbf{R}$, continue et bornée. Pour tout entier naturel n, justifier l'existence de $J_n = n\int_0^{+\infty} e^{-n^2t^2} f(t)\mathrm{d}t$.

   Montrer que la suite $(J_n)_{n\in\mathbf{N}}$ a une limite à déterminer.

6. QUAND FUBINI SÉRIE/INTÉGRALE NE S'APPLIQUE PAS ! —

   Montrer l'existence de $\int_0^1 \frac{t^{a-1}}{1+t^b}$ et donner deux méthodes pour exprimer cette intégrale à l'aide de la somme d'une série.

7. Montrer que la fonction de la variable réelle x définie par $f(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\cos(tx)}{\text{ch}t}\text{d}t$, est définie sur $\mathbf{R}$.

   Montrer que f est développable en séries entières et exprimer son développement.

8. FUBINI INTÉGRALE/INTÉGRALE — Soit f une application de $[a, b] \times [c, d]$ dans $\mathbf{R}$ continue, où $[a, b]$ et $[c, d]$ sont des ségments non réduits à un point.

   Montrer que
$$\int_a^b \left(\int_c^d f(x,y)\text{d}y\right)\text{d}x = \int_c^d \left(\int_a^b f(x,y)\text{d}x\right)\text{d}y.$$

9. Soient k un entier supéreur ou égal à 2, f une application de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$ de classe $\mathcal{C}^k$ et a un réel. On suppose que $f(a) = 0$.
   (a) Montrer qu'il existe g élément de $\mathcal{C}^{k-1}(\mathbf{R}, \mathbf{R})$ tel que pour tout réel x, $f(x) = (x-a)\,g(x)$
   (b) On suppose de plus que $f'(a) = 0$, Montrer qu'il existe g élément de $\mathcal{C}^{k-2}(\mathbf{R}, \mathbf{R})$ tel que pour tout réel x, $f(x) = (x-a)^2\,g(x)$

10. Montrer la convergence de l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2}\text{d}t$ et donner sa valeur.

    Indication : on étudiera les applications $F(x) = \int_0^x e^{-t^2}\text{d}t$ et $G(x) = \int_0^1 \frac{e^{-(t^2+1)x^2}}{t^2+1}\text{d}t$

11. Soit la fonction de la variable réel x définie par : $\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} t^{x-1}e^{-t}\text{d}t$. Déterminer son domaine de définition D et montrer qu'elle est $\mathcal{C}^\infty$ sur son domaine de définition. Pour tout $x \in D$ montrer que $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$. Donner les variations de Γ ainsi que la limite en $+\infty$ et un équivalent en 0^+.

12. . On note les n-uplets de réels en colonne et on munit $\mathbf{R}^n$ du produit scalaire canonique $(\cdot|\cdot)$.

    Soit F une application de $\mathbf{R}^n$ dans $\mathbf{R}^n$ de classe $\mathcal{C}^2$
    (a) On suppose $n = 2$ que pour tout $X \in \mathbf{R}^2$, la matrice $\text{J}_F(X)$ est symétrique.
    Montrer que F dérive d'un potentiel.
    (b) *Version ⋆ de (a)* On garde n quelconue et F est définie sur un ouvert étoilé de $\mathbf{R}^n$.
    (c) ⋆ On suppose (pour n quelconque) que pour tout $X \in \mathbf{R}^n$, la matrice $\text{J}_F(X)$ est antisymétrique.
    Montrer que $\mathbf{F}\ :\ \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}\,;\ X \mapsto BX + C$, où $B \in \mathcal{A}_n(\mathbf{R})$ et $C \in \mathbf{R}^n$.

13. ⋆ Soit un réel $x > 0$. Pour tout entier $n \geq 0$, on considère l'application
$$u_n\ :\ \mathbf{R}_+^* \to \mathbf{R}\,;\ t \mapsto \begin{cases} t^{x-1}\left(1 - \frac{t}{n}\right)^n, & \text{si } t \leq n, \\ 0, & \text{sinon.} \end{cases}.$$
    Montrer que $\int_0^{+\infty} u_n(t)\text{d}t$ tend vers $\Gamma(x)$ lorsque n tend vers $+\infty$. En déduire : $\Gamma(x) = \lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{n!n^x}{x(x+1)\ldots.(x+n)}\right)$.

14. ⋆⋆ ÉTUDE DE $\exp(\mathcal{M}_n(\mathbf{R}))$

    On admettra que les projecteurs sur les espaces caractéristiques d'une matrice sont polynomiaux en la matrice
    (a) Montrer que $\exp(\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ est inclus strictement dans $\text{GL}_n^+(\mathbf{R})$.
    (b) Soit $M \in \text{GL}_n(\mathbf{C})$. Montrer qu'il existe $p \in \mathbf{C}[X]$ tel que $\exp(p(M)) = M$. Que vaut $\exp[\mathcal{M}((\mathbf{C}))$
    (c) Déduire de ce qui précède que :
$$\exp(\mathcal{M}_n(\mathbf{R})) = \left\{A \in \text{GL}_n(\mathbf{R}), \exists B \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R}), A = B^2\right\}.$$
    (d) Montrer que le groupe G engendré par $\exp(\mathcal{M}_n(\mathbf{R}))$ dans $\text{GL}_n(\mathbf{R})$ est $\text{GL}_n^+(\mathbf{R})$.

15. (a) Soit M un élément de $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$. On note μ sont polynôme minimal et $\mu_{\mathbf{C}}$ son polynôme minimal lorsque l'on considère cette matrice comme élément de $\mathcal{M}_n(\mathbf{C})$. Montrer que $\mu = \mu_{\mathbf{C}}$.
    (b) ⋆⋆ Soit M un élément de $\mathcal{M}_n(\mathbf{Q})$. On note μ sont polynôme minimal et $\mu_{\mathbf{R}}$ son polynôme minimal lorsque l'on considère cette matrice comme élément de $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$. Montrer que $\mu = \mu_{\mathbf{R}}$.

16. ⋆⋆ Soit A élément de $\mathcal{M}_n(\mathbf{C})$. On appelle commutant de A l'ensemble, noté $\mathcal{C}(A)$, des éléments M de $\mathcal{M}_n(\mathbf{C})$ tels que $AM = MA$.
    (a) Montrer que $\mathcal{C}(A)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbf{C})$ qui contient $\mathbf{C}[A]$. Montrer que la dimension de $\mathcal{C}(A)$ est au moins n.
    Indication : on pourra par exemple étudier la dimension de $\mathcal{C}(A) \cap \mathcal{T}_n^+(\mathbf{C})$.
    (b) Montrer que si $\mathcal{C}(A) = \mathbf{C}[A]$ alors $\chi_A = \mu_A$. Que dire de la réciproque.

Indications pour la question 7.

Soient $x \in \mathbf{R}$ et $g\ :\ \mathbf{R}_+ \to \mathbf{R}\,;\ t \mapsto \frac{\cos(tx)}{\operatorname{ch} t}$ L'application g est continue (par morceaux) et intégrable au voisinage de $+\infty$ puisque majorée par $2\exp(-\,\cdot)$, application notoirement intégrable au voisiange de $+\infty$.

Par ailleurs en posant pour tout $n \in \mathbf{N}$,

$$u_n\ :\ \mathbf{R}_+ \to \mathbf{R}\,;\ t \mapsto \frac{(-1)^n x^{2n} t^{2n}}{(2n)!\operatorname{ch} t},$$

la série $\sum u_n$ converge simplement de somme g. Pour tout $n \in \mathbf{N}$ la fonction u_n est intégrable, car lorsque t tend vers $+\infty$, on a $u_n(t) = \mathrm{o}\left(\frac{1}{t^2}\right)$. Enfin pour tout $n \in \mathbf{N}^*$,

$$\int_0^{+\infty} \Big|u_n(t)\mathrm{d}t\Big| \leq \frac{2x^{2n}}{(2n)!}\int_0^{+\infty} t^{2n}\exp(-t)\mathrm{d}t = \frac{2x^{2n}}{(2n)!}\Gamma(2n) = 2\frac{x^{2n}}{2n} \leq x^{2n}, \tag{10}$$

et donc en supposant $|x| < 1$, la série $\sum \int_{\mathbf{R}_+} |u_n|$ converge car son terme général est majorée par celui d'une série géométrique convergeante.

Le théorème d'interversion série/intégrale affirme que, toujours dans le cas où $|x| < 1$:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n,$$

où $a_n = \int_0^{+\infty} \frac{(-1)^n t^{2n}}{(2n)!\operatorname{ch} t}\mathrm{d}t$.

Donc f est développable en séries entières au moins sur $]-1, 1[$.

Indications pour la question 13.

Soit $x \in \mathbf{R}_+^*$

Soit $t_0 \in \mathbf{R}_+^*$. Pour tout $n \geq t_0$, on a :

$$f(t_0) = t_0^{x-1}\left(1 - \frac{t_0}{n}\right)^n \underset{n\to+\infty}{\to} t_0^{x-1}\mathrm{e}^{-t_0}.$$

Autant dire que la suite $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ converge simplement vers f, où $f\ :\ \mathbf{R}_+^* \to \mathbf{R}, t \mapsto t^{x-1}\mathrm{e}^{-t}$.

Soient $t \in \mathbf{R}_+^*$ et $n \in \mathbf{N}$, par convexité du logarithme et croissance de l'exponentiel, si $t \leq n$ alors

$$u_n(t) = t^{x-1}\exp\left(n\ln\left(1 - \frac{t}{n}\right)\right) \leq t^{x-1}\exp\left(n - \frac{t}{n}\right) = f(t)\,;$$

si $t \geq n$ alors la précédente majoration est trivialement vraie ($f \geq 0$). De plus f est — on l'a vu — intégrable sur $\mathbf{R}_+^*$.

Donc $\int_0^{+\infty} u_n(t)\mathrm{d}t$ tend vers $\int_0^{+\infty} f = \Gamma(x)$, lorsque n tend vers $+\infty$, par le théorème de convergence de Lebesgue.

La fin est asinitrottante.

Indication pour la question 8.

1. Introduisons l'appliaction

$$F\ :\ [a, b] \to \mathbf{R}\,;\ x \mapsto \int_0^x \left(\int_c^d f(t, y)\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}t.$$

Le théorème de continuité d'une intégrale à paramètre nous apprend que

$$[a, b] \to \mathbf{R}\,;\ t \mapsto \int_c^d f(t, y)\mathrm{d}y$$

est continue, la domination est ici élémentaire, elle est confiée à l'application constante de valeur $\|f\|_\infty$ qui est intégrable sur le segment $[c, d]$. Le théorème fondamental de l'analyse nous dit que F est dérivable et que : $F'(x) = \int_c^d f(x, y)\mathrm{d}y$, pour tout $x \in [a, b]$.

2. Introduisons

$$G\ :\ [a, b] \to \mathbf{R}\,;\ x \mapsto \int_c^d \left(\int_a^x f(t, y)\mathrm{d}t\right)\mathrm{d}y.$$

Par le théorème fondamental de l'analyse, l'application pour tout $y \in [c, d]$,

$$[a, b] \to \mathbf{R}\,;\ x \mapsto \int_a^x f(t, y)\mathrm{d}t$$

est $\mathcal{C}^1$ de dérivée $f(x,y)$. On peut alors appliquer le théorème de dérivation d'une intégrale à paramètre pour montrer que G est dérivable de dérivée en tout point x de $[a,b]$,

$$G'(x) = \int_c^d f(x,y)\mathrm{d}y.$$

La domination de la dérivée partielle de l'intégrande ce fait, là encore par $\|f\|_\infty$.

Donc $G' = F'$; or $G(a) = F(a)$ donc $F = G$ et en particulier $F(b) = G(b)$, ce qui est le résultat voulu.

Indication pour la question 12. (a) On note $F = (f_1, f_2)$. On pose :

$$U \ : \ \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}\,;\ (x,y) \mapsto \int_0^1 x f_1(tx,ty) + y f_2(tx,ty)\mathrm{d}t.$$

Notons que $U(x,y)$ est travail du champs F le long du segment joignant $(0,0)$ à (x,y).

Fixons y dans $\mathbf{R}$.

Le théorème de dérivation sous le signe intégrale, assure l'existence de de $\frac{\partial U}{\partial x}$ et pour tout $(x,y) \in \mathbf{R}^2$,

$$\frac{\partial U}{\partial x}(x,y) = \int_0^1 \int_0^1 f_1(tx,ty) + xt\frac{\partial f_1}{\partial x}(tx,ty) + yt\frac{\partial f_2}{\partial x}(tx,ty)\mathrm{d}t.$$

Justifions. Posons $\psi \ : \ \mathbf{R} \times [0,1] \to \mathbf{R}\,;\ (x,t) \mapsto x f_1(tx,ty) + y f_2(tx,ty)$

① Pour tout réel x, $\psi(x,\cdot)$ est continue (par morceaux) par continuité de (f_1, f_2) (et de l'application à composante polynomiales $t \mapsto (tx,ty)$), son intégrabilité sur le segment $[0,1]$ est sans objet.

② Pour tout réel t, $\psi(\cdot,t)$ est $\mathcal{C}^1$, essentiellement par ce que (f_1,f_2) est $\mathcal{C}^1$, et pour tout $(x,t) \in \mathbf{R} \times [0,1]$,

$$\frac{\partial \psi}{\partial x}(x,t) = f_1(tx,ty) + xt\frac{\partial f_1}{\partial x}(tx,ty) + yt\frac{\partial f_2}{\partial x}(tx,ty)$$

③ On a notamment par le caractère $\mathcal{C}^1$ de f que $\frac{\partial \psi}{\partial x}(x,\cdot)$ est, pour tout réel x, continue par morceaux.

① Soit M un réel strictement positif. Pour tout $t \in [0,1]$ et $x \in [-M,M]$, $(tx,ty) \in [-M,M] \times [0,y]$ donc on a, grâce à la *continuité* de f_1, $\frac{\partial f_1}{\partial x}$ et $\frac{\partial f_2}{\partial x}$, et en notant K le *compact* $[-M,M] \times [0,y]$,

$$\forall (x,t) \in [-M,M] \times [0,1]\,; \ \left|\frac{\partial \psi}{\partial x}(x,t)\right| \leq \|f_1\|_{\infty,K} + M\left\|\frac{\partial f_1}{\partial x}\right\|_{\infty,K} + |y|\left\|\frac{\partial f_2}{\partial x}\right\|_{\infty,K}\,;$$

intégrabilité sur le segment $[0,1]$ de la fonction constante majorante est sans objet.

Comme tout réel x admet un voisinage de la forme $[-M,M]$, Le théorème de dérivation sous le signe intégrale s'applique bien.

Ensuite grâce à la symétrie de la matrice jacobienne de F :

$$\frac{\partial U}{\partial x}(x,y) = \int_0^1 f_1(tx,ty) + xt\frac{\partial f_1}{\partial x}(tx,ty) + yt\frac{\partial f_1}{\partial y}(tx,ty)\mathrm{d}t.$$

Soit $(x,y) \in \mathbf{R}^2$. En posant $\phi \ : \ [0,1] \to \mathbf{R}\,;\ t \mapsto t f_1(tx,ty)$,

$$\frac{\partial U}{\partial x}(x,y) = \int_0^1 \phi'(t)\mathrm{d}t = \phi(1) - \phi(0) = f_1(x,y).$$

De même $\frac{\partial U}{\partial x}$ existe et vaut f_2. Comme f_1 et f_2 sont continues, U est de classe $\mathcal{C}^1$ et $\vec{f} = \vec{\nabla} U$.

Programme de colle n^{o}20

68 Complément sur l'intégrale

Révision du programme de la précédente semaine.

69 Complément sur l'intégrale

70 Révisions de MPSI sur les espaces préhilbertiens

— Produit scalaire, propriétés, formules de polarisations, égalité du parallélogramme. Formule de Cauchy-Schwarz cas d'égalité, norme associée à un produit scalaire.
— Supplémentaire orthogonal, quand il existe il est unique et c'est l'orthogonal, existence pour un sous-espace de dimension finie, théorème de projection sur un sous-espace de dimension finie.
— Étude sur des exemples de familles de polynômes orthogonaux.
— *Les suites totales orthonormées, inégalité de Bessel, égalité de Parseval ne sont plus au programme.*
— *Á venir, Espaces euclidien*

Les questions de cours ou exercices avec un astérisque $\star$ pour : C. Brévignon, Malo Le Grognec, Augustin Ravasse, Lucas Pan, Anaël Pelé, Arthur Quendo, Noémie Manach, Martin Pina-Silas, Kevynn Boucher, Thomas Jézequel Ilies Le Marc Brieg Ollivier, Vincent Nouaille -Degorce, Pauline Wadier, Virgile Marrec, Fabien Goutray.

Les questions de cours ou exercices avec deux astérisques $\star\star$ pour : C. Brévignon, Malo Le Grognec, Augustin Ravasse, Martin Pina-Silas, Lucas Pan, Thomas Jézequel, **Arthur Quendo**.

71 Questions de cours

1. Inégalité de Cauchy et Schwarz pour une forme bilinéaire positive. Cas d'égalité.
2. Existence d'un supplémentaire orthogonal d'un sous-espace de dimension finie d'un espace préhilbertien. Théorème de projection sur ce sous-espace.

72 Récitation d'exercice

1. $\star$ On suppose qu'il existe un réel p_0 tel que l'intégrale $\int_0^{+\infty} f(x)\exp(-p_0x)\mathrm{d}x$ converge.
   (a) Montre que pour tout réel $p > p_0$, l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(x)\exp(-p)\mathrm{d}x$ converge.
   (b) Montrer que l'application $\mathcal{L}(f)\ :\ [p_0, +\infty[\to \mathbf{R}\,;\ p \mapsto \int_0^{+\infty} f(x)\exp(-px)\mathrm{d}x$, est continue en p_0.
2. Montrer que la convergence et donner la valeur de l'intégrale $\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x$ (intégrale de Dirichlet), on utilisera la précédente question.
3. $\star$ En considérant les suites $(I_n)_{n\in\mathbf{N}}$ et $(J_n)_{n\in\mathbf{N}}$ définies par : $\forall n \in \mathbf{N}\,;\ I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin((2n+1)x)}{x}\mathrm{d}x,\ J_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin((2n+1)x)}{\sin(x)}\mathrm{d}x$, retrouver la valeur de l'intégrale de Dirichlet.
4. Transformée de Fourier — Soit l'application. $f\ :\ \mathbf{R} \to \mathbf{C}\ ;\ x \mapsto \exp\left(-x^2\right)$, Montrer que pour tout réel k est définie la quantité : $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\exp(-i2\pi kt)\,\mathrm{d}t$, noté $\hat{f}(k)$. Montrer que l'application $\hat{f}\ :\ \mathbf{R} \to \mathbf{C}\,;\ k \mapsto \hat{f}(k)$ est dérivable et donner sa dérivée. En déduire $\hat{f}$.
5. $\star$ Montrer que
$$\tilde{\Gamma}\ :\ \mathbf{R}\setminus\mathbf{Z}_- \to \mathbf{R}\,;\ x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n!(n+x)} + \int_1^{+\infty} t^{x-1}e^{-t}\mathrm{d}t.$$
   est un prolongement indéfiniment dérivable de Γ.

Soit f une application de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$, continue et 2π-périodique. On considère les suites d'applications réels $(S_n)_{n\in\mathbf{N}}$ et $(M_n)_{n\in\mathbf{N}}$ où pour tout $n \in \mathbf{N}$,

$$S_n \ : \ \mathbf{R} \ni x \mapsto \int_{-\pi}^{\pi} f(x-t) D_n(t) \,; M_n \ : \ \mathbf{R} \ni x \mapsto \int_{-\pi}^{\pi} f(x-t) F_n(t),$$

où D_n et F_n sont les éléments de $\mathcal{C}^0)(\mathbf{R})$ tels que pour tout réel x non congru à 0 modulo 2π,

$$D_n\left(x\right) = \frac{1}{2\pi} \frac{\sin\left(\left(n+\frac{1}{2}\right)x\right)}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)} \ ; \ F_n\left(x\right) = \frac{1}{2\pi} \frac{\sin^2\left(n\frac{x}{2}\right)}{n\sin^2\left(\frac{x}{2}\right)}.$$

Ona admet que $\int_{[-\pi,\pi]} D_n = \int_{[-\pi,\pi]} F_n = 1$.

6. On supose de plus f de classe $\mathcal{C}^1$. Montrer que pour tout réel x, $S_n(x) \underset{n\to+\infty}{\to} f(x)$.
7. $\star$ On ne suppose plus f de classe $\mathcal{C}^1$, montrer en utilisant le théorème de convergence dominée que pour tout réel x, $M_n(x) \underset{n\to+\infty}{\to} f(x)$.
8. $\star$ Montrer que $(M_n)_{n\in\mathbf{N}}$ converge uniformément vers f.
9. Soit $(\mathbf{E}, \langle \cdot \mid \cdot \rangle)$ un espace préhilbertien réel. On appelle déterminant de Gram d'une famille $(\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_n)$ d'éléments de $\mathbf{E}$ (où $n \in \mathbf{N}^*$), le déterminant de la matrice $(\langle x_i \mid x_j \rangle)_{\substack{i=1,\dots,n \\ i=1,\dots,n}}$ (matrice de Gram), on le notera $\mathrm{Gram}\left(\vec{x}_1, \vec{x}_2, ..., \vec{x}_n\right)$.

   a) Soit $(\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_n)$ une famille d'éléments de de $\mathbf{E}$. Montrer que cette famille est libre si et seulement si, $\mathrm{Gram}\left(\vec{x}_1, \vec{x}_2, ..., \vec{x}_n\right) \neq 0$.

   b) Soit $\mathbf{F}$ un sous-espace vectoriel de $\mathbf{E}$. Soient $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, ..., \vec{e}_n)$ une base de $\mathbf{F}$, et $\vec{a}$ un élément de $\mathbf{E}$ montrer que :

$$\frac{\mathrm{Gram}\left(\vec{a}, \vec{e}_1, \vec{e}_2, ..., \vec{e}_n\right)}{\mathrm{Gram}\left(\vec{e}_1, \vec{e}_2, ..., \vec{e}_n\right)} = \mathrm{d}\left(\vec{a}, \mathbf{F}\right)^2.$$

10. Soit $(\vec{x}_1, \vec{x}_2, ..., \vec{x}_n)$ une famille de vecteurs d'un espace préhilbertien. Soit $\mathbf{F}$ un espace de dimension n contenant ces vecteurs et $\mathcal{B}$ une base orthonormée de $\mathbf{F}$. On note A la matrice de la famille $(\vec{x}_1, \vec{x}_2, ..., \vec{x}_n)$ dans $\mathcal{B}$. Exprimer $\mathrm{Gram}\left(\vec{x}_1, \vec{x}_2, ..., \vec{x}_n\right)$ en fonction de A. Retrouver le 32. a)

    Interpréter pour $n = 2$ géométriquement le (b).

    Par un choix judicieux de $\mathcal{B}$ montrer que

$$0 \leq \mathrm{Gram}\left(\vec{x}_1, \vec{x}_2, ..., \vec{x}_n\right) \leq \prod_{i=1}^{n} \|\vec{x}_i\|^2.$$

    Dans quel cas a-t-on égalité !
11. On note $\mathbf{E} = \mathcal{C}^0([0,1], \mathbf{R})$. On munit $\mathbf{E}$ du produit scalaire $\langle \cdot|\cdot \rangle$ défini par $\langle f|g \rangle = \int_{[-1,1]} fg$, la norme associée sera notée $\|\cdot\|$. Montrer qu'il existe une et une seule famille $(p_n)_{n\in\mathbf{N}}$ de polynômes unitaires, orthogonale et échelonnée. Donner une formule de récurrence définissant la famille.
12. (*Suite de la question précédente*) Soit $f \in \mathbf{E}$. Montrer que si l'on pose pour tout $n \in \mathbf{N}$, $p_n^* = \frac{p_n}{\|p_n\|}$ et $c_n(f) = \langle f | p_n^* \rangle$, alors la série $\sum c_n(f) p_n^*$ converge dans l'espace vectoriel normé $(\mathbf{E}, \|\cdot\|)$ vers f.

    Montrer la convergence de la série $\sum c_n(f)^2$ et donner sa somme, puis celle de $\sum c_n(f) c_n(g)$ $(g \in \mathbf{E})$.
13. Soit $(\Omega, \mathbf{P})$ un espace probabilisé fini. Montrer que $|\mathrm{P}(A\cap B) - \mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B)| \leq \frac{1}{4}$.
14. Montrer que l'ensemble

$$\left\{ \int_0^{+\infty} e^{-x} \left|x^2 + ax + b\right|^2 \mathrm{d}x, \ (a,b) \in R^2 \right\}$$

    admet une borne inférieure à déterminer.
15. $\star\star$ Notons $\mathbf{E} = \mathcal{C}^0([0,1], \mathbf{R})$. Soient un réel $C > 0$ et $\mathbf{F}$ un sous espace vectoriel de $\mathbf{E}$ tel que :

$$\|f\|_\infty \leq C \|f\|_2,$$

    pour tout élément f de $\mathbf{F}$.

    (a) Montrer que les restrictions de $\|\cdot\|_2$ et $\|\cdot\|_\infty$ à $\mathbf{F}$ sont équivalentes.

    (b) Montrer que $\mathbf{F}$ est de dimension finie inférieure ou égale à C^2.
16. $\star\star$ — LEMME DE MORSE.—

    Soit f une application de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$ de classe $\mathcal{C}^3$. On suppose que $f(0) = f'(0) = 0$ et $f''(0) > 0$.

(a) Montrer qu'il existe une application g de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$ telle que pour tout réel x,

$$f(x) = x^2 g(x)$$

(b) Montrer qu'il existe des intervalles ouverts I et J contenant 0, un $\mathcal{C}^1$-difféomorphisme ϕ de I sur J tels que pour tout $x \in I$,

$$f(x) = \frac{1}{2} f''(0)\, \phi(x)^2$$

(c) On considère le système différentiel :

$$\begin{cases} x' = y, \\ y' = -f'(x). \end{cases}$$

On admet que pour tout couple (x_0, y_0) de réel le système admet une et une seule solutionsur $\mathbf{R}$ vérifiant la condition initiale $x = x_0, y = y_0$. qui sera notée $\Phi_{(x_0,y_0)}$

Montrer que pour tout réel $\varepsilon > 0$ il existe $\delta > 0$ tel que si $\|(x_0, y_0)\| < \delta$ alors pour tout réel $t \geq 0$,

$$\|\Phi_{(x_0,y_0)}(t)\| \leq \varepsilon.$$

17. $\star\star$ Soient $(\mathbf{E}, \langle \cdot | \cdot \rangle)$ un espace de Hilbert, c'est-à-dire un espace dans lequel, toute série absolument convergnte converge et C un convexe fermé de E (l'espace est muni de la norme associé au produit scalaire).

Soit x un élément de $\mathbf{E}$. Montrer qu'il existe un et un seul élément c de C tel que $\|c - x\| = \mathrm{d}(x, C)$.

En déduire que tout sous-espace vectoriel $\mathbf{F}$ de $\mathbf{E}$ fermé admet un supplémentaire orthogonal.

Programme de colle n°21

Dernière semaine de colles. Merci à tous les colleurs pour leur aide.

73 Equations différentielles linéaires

On désigne par $\mathbf{K}$ le corps des réels ou des complexes, par $\mathbf{E}$ un $\mathbf{K}$-espace vectoriel de dimension finie n et par I un intervalle d'intérieur non vide.

- Équation différentielle linéaire du premier ordre vectorielle à coefficient constant.

$$\frac{\mathrm{d}\vec{y}}{\mathrm{d}t} = a \cdot \vec{y} + \vec{b}(t), \tag{11}$$

avec $a \in \mathcal{L}(\mathbf{E})$, $b \in \mathcal{C}^0(I, \mathbf{E})$.

— Définitions des solutions sur un intervalle, de la solution d'un problème de Cauchy, de l'équation homogène associée.

— Expression grâce à une exponentielle, de la solution de l'équation homogène et de la solution d'un problème de Cauchy. L'ensemble des solutions de l'équation homogène associée sur un intervalle J est un espace vectoriel de dimension n. Application au calcul de l'exponentielle de la somme de deux matrices ou endomorphismes qui commutent.

— Résolution pratique de la forme matricielle de l'équation homogène associée à (11) par réduction de la matrice (aucune technicité n'est exigible en dehors des cas où a est diagonalisable).

La résolution de l'équation (11) par abaissement du degré (« variation de la constante ») n'est plus au programme.

- Équation différentielle linéaire du premier ordre vectorielle à coefficient non constant

$$\frac{\mathrm{d}\vec{y}}{\mathrm{d}t} = a(t) \cdot \vec{y} + \vec{b}(t), \tag{12}$$

avec $a \in \mathcal{C}^0(I, \mathcal{L}(\mathbf{E}))$, $b \in \mathcal{C}^0(I, \mathbf{E})$.

— Définitions des solutions sur un intervalle, de la solution d'un problème de Cauchy, de l'équation homogène associée.

— Théorème de Cauchy-Lipschitz linéaire (admis, mais la mise sous forme intégrale du problème de Cauchy est au programme). L'ensemble des solutions sur un intervalle donné de l'équation homogène associée à (12) est un espace vectoriel de dimension n (isomorphismes entre cet espace et $\mathbf{E}$, l'ensemble des solutions sur un intervalle donné de l'équation (12) est un espace affine.

Aucune autre connaissance n'est au programme.

- Équation différentielle linéaire du deuxième ordre scalaire à coefficients non constants

$$a(t)\frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}t^2} + b(t)\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} + c(t)y = d(t), \tag{13}$$

avec a, b, c et d éléments de $\mathcal{C}^0(I, \mathbf{R})$.

— Définitions des solutions sur un intervalle, de la solution d'un problème de Cauchy, de l'équation homogène associée. Système linéaire du premier ordre associé.

— Structure de l'ensemble des solutions de (13) et de l'équation homogène associée sur un intervalle J sur lequel a ne s'annule pas, théorème de Cauchy-Lipschitz linéaire.

— Wronskien d'une famille (φ_1, φ_2) de deux solutions de l'équation homogène associée à (13). Equation différentielle vérifiée par le wronskien. Caractérisation de la liberté de (φ_1, φ_2).

— Résolution de l'équation (13), lorsque l'on dispose d'une famille (φ_1, φ_2) de deux solutions sur J de l'équation homogène associée : méthode de la base mobile.

— Étude sur des exemples, de solutions sur un intervalle sur lequel a s'annule.

— les Sturmeries ne seront vues que lundi (en TD)

Les questions de cours ou exercices avec un astérisque $\star$ pour : C. Brévignon, Malo Le Grognec, Augustin Ravasse, Lucas Pan, Anaël Pelé, Arthur Quendo, Noémie Manach, Martin Pina-Silas, Kevynn Boucher, Thomas Jézequel Ilies Le Marc Brieg Ollivier, Vincent Nouaille -Degorce, Pauline Wadier, Virgile Marrec, Fabien Goutray.

Les questions de cours ou exercices avec deux astérisques $\star\star$ pour : C. Brévignon, Malo Le Grognec, Augustin Ravasse, Martin Pina-Silas, Lucas Pan, Arthur Quendo.

74 Questions de Cours

1. Montrer, en admettant le théorème de Cauchy-Lipschitz linéaire, que l'ensemble des solutions sur un intervalle donné de l'équation homogène associée à (12) est un espace vectoriel de dimension n, l'ensemble des solutions sur un intervalle donné de l'équation (12) est un espace affine. Donner une norme simple sur l'ensemble des solutions de l'équation homogène associée à (12).
2. $\star\star$ Preuve du théorème de Cauchy-Lipschitz linéaire pour (12), on se limitera à un segment.

75 Exercice

1. Soit I un intervalle de $\mathbf{R}$ non vide, et w une application de I dans $\mathbf{R}$, continue, à valeurs strictement positives. On note $\mathbf{E}$ l'espace vectoriel des applications f de I dans $\mathbf{R}$, continues telles que wf^2 soit intégrable sur I. On suppose de plus que $\mathbf{E}$ contient les applications polynomiales de I dans $\mathbf{R}$. Montrer que l'application suivante est bien définie sur $\mathbf{E}^2$ et est un produit scalaire.
$$\varphi \; : \; \mathbf{E} \times \mathbf{E} \to \mathbf{R}, \; (f,g) \mapsto \int_I fgw$$
Montrer qu'il existe une et une seule suite d'éléments unitaires de $\mathbf{R}[X]$, orthogonale, étagée, on la note $(p_n)_{n\in\mathbf{N}}$.
Montre que pour tout $n \in \mathbf{N}$, p_n admet n racines distinctes, éléments de I.
2. Vérifier que $I =]-1,1[$ et $w \; : \; I \to \mathbf{R}\,; \; t \mapsto \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}$ rentre dans le cadre de la question précédente. Vérifier que pour tout $n \in \mathbf{N}$,
$$p_n\left(x\right) = \frac{1}{2^{n-1}} \cos\left(n \arccos x\right),$$
pour tout élément x de $[-1,1]$ (polynômes de Tchebychev).

   On note U_n l'ensemble des applications polynomiales de $[-1,1]$ dans $\mathbf{R}$ de degré égal à n, unitaires. Montrer que
$$\inf\left\{\|p\|_\infty, p \in U_n\right\} = \|p_n\|_\infty.$$
3. Soit l'équation différentielle
$$x'' + q\left(t\right) x = 0, \tag{14}$$
où q est une application de $\mathbf{R}_+$ dans $\mathbf{R}$ intégrable. Montrer l'existence de solutions non bornées.
4. $\star$ Soient I un intervalle d'intérieur non vide, t_0 un point de I et, pour $j = 1,...,n$, Φ_j la solution sur I de
$$\frac{\mathrm{d}X}{\mathrm{d}t} = A(t)X, \; X(t_0) = E_i \tag{MHnc}$$
où A est une application continue de I dans $\mathcal{M}_n(\mathbf{K})$; soit enfin t_0 un point de I.
   (a) Montrer que $(\Phi_1, \Phi_2, \ldots, \Phi_n)$ est une base de $\mathcal{S}_{MHnc}(I)$ si et seulement si $(\Phi_1(t_0), \Phi_2(t_0), \ldots, \Phi_n(t_0))$ est une base de $\mathcal{M}_{n,1}(K)$. Soit enfin
$$W \; : \; I \to \mathbf{K}\,; \; t \mapsto \det_{\mathcal{B}_c}\left(\Phi_1(t), \Phi_2(t), \ldots, \Phi_n(t)\right).$$
   (b) Montrer que pour tout $t \in I$ il existe un élément $\mathrm{R}_{t_0}^t$ de $\mathcal{M}_n(\mathbf{K})$ tel que pour tout élément X_0 de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{K})$, $\mathrm{R}_{t_0}^t X_0$ soit la valeur en t de la solutionsur I de (MHnc) qui en t_0 vaut X_0. Que vaut son déterminant.
   (c) Soient t_1 et t_2 des éléments de J. Montrer que $\Phi_{t_1}^{t_2} \circ \Phi_{t_0}^{t_1} = \Phi_{t_0}^{t_2}$; en déduire que $\Phi_{t_0}^{t_1}$ est inversible.
5. $\star\star$ On garde le contexte de la précédente question. Montrer que W est dérivable et que pour tout $t \in J$,
$$W'(t) = \mathrm{tr}(A(t))W(t).$$
En déduire une expression intégrale du Wronskien. Donner une interprétation géométrique de ce résultat.
6. $\star\star$ Déterliner les applications A de $\mathbf{R}$ dans $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ dérivables telles que
$$\forall t \in \mathbf{R}, \; A'(t) = A(t)B(t) - B(t)A(t) = [A(t), B(t)],$$
où B est une application de $\mathbf{R}$ dans $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ continue. (on pourra utiliser les questions précédentes)

7. (a) Soit $\vec{\psi}$ une solution de (12) définie sur $I = \mathbf{R}$. On suppose que et que a et b sont impaires. Montrer que $\vec{\psi}$ est paire.
   (b) On suppose que les coefficients a, b, c et d de l'équation (13) sont définis sur $\mathbf{R}$, 2π-périodiques et que a ne s'annule pas. Montrer qu'une solution ψ sur $\mathbf{R}$ de (13) est 2π-périodique si et seulement si $\psi(0) = \psi(2\pi)$, et $\psi'(0) = \psi'(2\pi)$.
8. Déterminer des solutions de l'équation différentielle $\left(1 + x^2\right) \ y'' \ + x \ y' - \ \frac{1}{4} \ y = 0$, développables au voisinage de 0 en série entière.

   En déduire la forme générale des solutions de l'équation sur $]-1, 1[$.
9. Soit a un réel, et b une application de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$ continue bornée.

   Soit l'équation différentielle : $\frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}t^2} = ay + b(t)$. On suppose que a est positif strictement. Montrer qu'il existe une et une seule solution de cette équation sur $\mathbf{R}$ qui soit bornée. Que dire si a est négatif ?

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{C})$, B de $\mathbf{R}_+$ dans $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{C})$ continue et bornée. On considère l'équation différentielle

$$\frac{\mathrm{d}X}{\mathrm{d}t} = AX. \tag{H}$$

10. On suppose A diagonalisable. Montrer que toute solution sur $\mathbf{R}_+$ non nulle de (H) tend vers 0 en $+\infty$, si et seulement si toutes les valeurs propre de A ont une partie réelle strictement négative.
11. $\star$ Même question sans supposer A diagonalisable.
12. $\star\star$ Soit A une application continue de $\mathbf{R}_+$ dans $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ telle que pour tout réel $t > 0$, $A(t)$ ait tous ses coefficients strictement positifs. On s'intéresse à l'équation différentielle :

$$\frac{\mathrm{d}X}{\mathrm{d}t} = -A(t)X. \tag{15}$$

   (a) On note $\mathbf{1}$ l'élément de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{R})$ ayant tous ses coefficients égaux à 1. Pour tout entier $k \geq 1$, on note Φ_k la solution sur $\mathbf{R}_+$ du problème de Cauchy $\begin{cases} (15), \\ X(k) = \mathbf{1}. \end{cases}$ Montrer que pour tout $t \in [0, k]$, les n composantes de $\Phi_k(t)$ sont supérieures ou égales à 1.
   (b) En déduire l'existence d'une solution Φ de (15) sur $\mathbf{R}_+$, non identiquement nulle et dont toutes les composantes sont à valeurs dans $\mathbf{R}_+$.

   Indication : On peut considérer la suite $\left(\frac{\Phi_k}{\|\Phi_k(0)\|}\right)_{k \in \mathbf{N}^*}$, où $\| \cdot \|$ est une norme sur $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{R})$.

Corrections et indications

Question 8
Notons pour tout réel c, e_c l'application $\exp(c\cdot)$.
L'ensemble des solutions de l'équation homogène est $\mathrm{vect}(e_r, e_{-r})$, avec $r=\sqrt{a}$.
Soit ϕ une application de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$ de classe $\mathcal{C}^2$. Il existe deux application de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$, ψ_1 et ψ_2, (coordonnées de $\begin{pmatrix}\phi\\ \phi'\end{pmatrix}$ dans la base mobile $\left(\begin{pmatrix}e_r\\ e_r'\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}e_{-r}\\ e_{-r}'\end{pmatrix}\right)$, telles que :

$$\begin{aligned}\phi &= \psi_1 e_r + \psi_2 e_{-r}\\ \phi' &= \psi_1 e_r' + \psi_2 e_{-r}'\end{aligned}$$

En dérivant la première égalité et en retranchant la seconde, vient :

$$\psi_1' e_r + \psi_2' e_{-r} = 0.$$

En dérivant la seconde [7] :

$$\phi'' = \psi_1' e_r' + \psi_2' e_{-r}' + \cdots$$

Donc ϕ est solution de l'équation avec second membre si et seulement si

$$\begin{cases}\psi_1' e_r + \psi_2' e_{-r} = 0\\ \psi_1' e_r' + \psi_2' e_{-r}' = b\end{cases},$$

Soit si et seulement si :

$$\psi_1' = \frac{-be_{-r}}{-2r},\ \psi_2' = \frac{be_r}{-2r}.$$

Remarquons alors que $e_{-r}b$ est intégrable au voisinage de $+\infty$, puisque b étant bornée, $|b(t)\mathrm{e}^{-rt}| = \underset{t\to+\infty}{O}(\mathrm{e}^{-rt})$ et que de même $e_r b$ est intégrable au voisinage de $-\infty$. Donc ϕ est solution si et seulement si, il existe des réels c_1 et c_2 tels que pour tout réel t :

$$\psi_1'(t) = -\frac{1}{2r}\int_t^{+\infty} \mathrm{e}^{-rs}b(s)\mathrm{d}s + c_1;\ \psi_2'(t) = -\frac{1}{2r}\int_{-\infty}^{t} \mathrm{e}^{rs}b(s)\mathrm{d}s + c_2,$$

L'ensemble des solutions de l'équation avec second membre est : $\{\phi_{c_1,c_2}, (c_1,c_2)\in\mathbf{R}^2\}$, avec :

$$\phi_{c_1,c_2}\ :\ t\mapsto -\frac{1}{2r}\int_t^{+\infty} \mathrm{e}^{-rs}b(s)\mathrm{d}s\ \mathrm{e}^{t} + \frac{-1}{2r}\int_{-\infty}^{t} \mathrm{e}^{rs}b(s)\mathrm{d}s\ \mathrm{e}^{-t} + c_1\mathrm{e}^{t} + c_2\mathrm{e}^{-t}.$$

Montrons que $\phi_{0,0}$ est bornée, alors comme pour tout élément (c_1,c_2) de $\mathbf{R}^2$, non nul, $c_1e_r + c_2e_{-r}$ a une limite infinie en $+\infty$ ou en $-\infty$, ce sera l'unique solution bornée.
Comme b est bornée,en posant $M = \|b\|_\infty$,

$$\left|\int_t^{+\infty} \mathrm{e}^{-rs}b(s)\mathrm{d}s\ \mathrm{e}^{t}\right| \leq \int_t^{+\infty} \mathrm{e}^{-rs}M\mathrm{d}s\ \mathrm{e}^{t} \leq \frac{M\mathrm{e}^{-t}}{r}\mathrm{e}^{t} \leq \frac{M}{r}.$$

De même

$$\left|\int_{-\infty}^{t} \mathrm{e}^{rs}b(s)\mathrm{d}s\ \mathrm{e}^{-t}\right| \leq \frac{M}{r}.$$

Finalement $\varphi_{0,0}$ est bornée et est la seule solution bornée.
Question 6 La question 4 Pour tout $X_0\in\mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{R})$ et tout réel t_0, le système linéaire

$$\begin{cases}X' = -B(t)X\\ X(t_0) = X_0.\end{cases}\tag{16}$$

admet une unique solution sur $\mathbf{R}$, qui dépend linéairement de X_0, celle-ci peut donc s'écrire :

$$t\mapsto R_{t_0}^{t}X_0,$$

où pour $R_{t_0}^{t}$ est élément de $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ tout réel t.
On a immédiatement que $R_{t_0}^{\bullet}$ est la solution sur $\mathbf{R}$ du problème de Cauchy *matriciel*

$$\begin{cases}M' = -B(t)M\\ M(t_0) = I_n.\end{cases}\tag{17}$$

7. Je n'écris pas les termes en ψ_i.

Notons, dans un soucis de simplicité $R = R_0^\bullet$.

Nous aurons besoins du résultat suivant :

Lemme. R^{-1} est solution sur $\mathbf{R}$ de

$$\begin{cases} M' = MB(t) \\ M(0) = I_n. \end{cases} \tag{18}$$

La preuve découle directement de l'expression de la différentielle de

$$f \; : \; \mathrm{GL}_n(\mathbf{R}) \to \mathcal{M}_n(\mathbf{R}), ; \; M \mapsto M^{-1},$$

$$\mathrm{d}f(u) : \mathcal{M}_n(\mathbf{R}) \to \mathcal{M}_n(\mathbf{R}), H \mapsto -M^{-1}HM^{-1}.$$

En effet pour tout réel t,

$$(R^{-1})' = \mathrm{d}f(R(t)) \cdot R'(t) = -R^{-1}(t)R'(t)R^{-1}(t) = -R^{-1}(t)(-B(t)R(t))R^{-1}(t) = R^{-1}(t)B(t),$$

et bien sûr $R^{-1}(0) = I_n$.

Proposition.

$$A \; : \; t \mapsto R^{-1}(t)A(0)R(t).$$

Preuve

La fonction matricielle A est la solution sur $\mathbf{R}$ du problème de Cauchy

$$\begin{cases} M' = -B(t)M + A(t)B(t) \\ M(0) = A(0). \end{cases} \tag{Cau. 2}$$

Variation de la constante.

Posons[8] $\Lambda = R^{-1}A$ de sorte que

$$A = R\Lambda$$

Réinjectons dans (Cau. 2)

$$\Lambda' = R^{-1}AB = R^{-1}R\Lambda B = \Lambda B \text{ et } \Lambda(0) = A(0)$$

D'où, d'après le lemme $\Lambda = A(0)R^{-1}$. Et donc $A = RA(0)R^{-1}$.

8. Notons que pour B constante $R(t) = \exp(-tB)$.

Programme de colles fantôme n°22

76 Espaces euclidien

$(\mathbf{E}, \langle \cdot \mid \cdot \rangle)$ est un espace euclidien.

— Représentation des formes linéaires d'un espace euclidien, adjoint d'un endomorphisme.
— Endomorphisme autoadjoint. Structure d'espace vectoriel et dimension de $\mathcal{S}(\mathbf{E})$.
— Endomorphismes autoadjoints positifs et définis-positifs, caractérisation par les valeurs propres, version matricielle.
— Automorphismes orthogonaux, matrices orthogonales, cas de la dimension 2.
— Diagonalisation des endomorphisme autoadjoints dans une base orthonormée ; diagonalisation des matrices symétriques réelles dans le groupe orthogonal.
— Réduction des isométries vectorielles, forme réduite des matrices orthogonales, Cas de la dimension 3.
— *Á venir, Calcul ifférentiel, optimisation, mise au point finale sur les probas...*

77 Questions de Cours

1. Théorème spectral.
2. Étude de l'adjoint.

78 Exercices

1. Soit $a \in \mathbf{R}$. Étudier le problème de Cauchy

$$\begin{cases} \frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2} - |x| = 0, \\ x\ (0) = a, \\ \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\ (0) = 0. \end{cases} \tag{†}$$

2. Problème de Dirichlet — Soient f et g des application de $[a, b]$ dans $\mathbf{R}$ continues. On considère l'équation différentielle

$$y'' + f(t)y = g(t). \tag{19}$$

   (a) On suppose que f est négative. Montrer que (19) possède une et une seule solution φ sur $[a, b]$ telle que $\varphi(a) = \varphi(b) = 0$.
   (b) On suppose que f est l'application constante égale à 1, que $a = 0$ et que $b = 2\pi$. Donner un exemple d'application g telle que :
   — il n'existe pas de solution de (19) sur $[a, b]$ nulle en a et b ;
   — il existe une infinité de de solutions de (19) sur $[a, b]$ nulle en a et b.
3. Montrer que $\mathrm{SO}_n(\mathbf{R})$ est connexe par arcs. $\mathrm{O}_n(\mathbf{R})$ l'est-il ?
4. Soit $\mathbf{E}$ un espace euclidien de dimension 3. A quelle condition deux rotations r et r' distinctes et différentes de l'identité commutent-elles ?
5. On considère un espace euclidien $(\mathbf{E}, \langle \cdot | \cdot \rangle)$
   (a) Une symétrie de $\mathbf{E}$ est-elle un endomorphisme symétrique ?
   (b) Une projection orthogonale de $\mathbf{E}$ est-elle un endomorphisme orthogonal ?
   (c) Quelles sont les matrices, éléments de $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$, orthogonales et symétriques ?
   (d) Quelles sont les matrices de $\mathrm{O}_n(\mathbf{R})$ diagonalisables.
6. Soit A une matrice symétrique réelle d'ordre n n'ayant que des valeurs propres strictement positives. Montrer qu'il existe une unique matrice triangulaire supérieure à coefficients diagonaux strictement positifs, T, telle que $A = T^\top T$.
7. $(\mathbf{E}_3, \langle \cdot \mid \cdot \rangle)$ désigne un espace euclidien de dimension 3 orienté. Soient $\vec{w}$ un vecteur non nul de $\mathbf{E}_3$ et θ un réel, On désigne par r la rotation de $\mathbf{E}_3$ d'axe $\mathrm{vect}(\vec{x})$, d'angle de mesure θ (l'axe étant orienté par $\vec{x}$). φ désigne un automorphisme orthogonal de $\mathbf{E}_3$. Etudier l'endomorphisme $\varphi \circ r \circ \varphi^{-1}$.

8. $(\mathbf{E}, \langle \cdot \mid \cdot \rangle)$ désigne un espace euclidien de dimension n supérieure ou égale à 2. On note $\mathcal{S}$, l'ensemble des symétries orthogonales de $\mathbf{E}$ par rapport à un hyperplan (rélféxion) et $\mathcal{R}$ celui des symétries orthogonales par rapport à des droites (retournement).
   (a) Montrer pour $n = 3$ que $\mathcal{S}$ engendre $\mathrm{O}(\mathbf{E})$, par des considérations géométriques et que $\mathcal{R}$ engendre $\mathrm{SO}_3(\mathbf{E})$
   (b) $\star$ Pour n quelconque montrer que $\mathcal{S}$ engendre $\mathrm{O}(\mathbf{E})$, par des considérations géométriques et une récurrence, puis matriciellement.
9. $\star\star$ Montrer que $\mathrm{SO}_3(\mathbf{R})$ est simple.
10. (a) Montrer que pour tout élément A de $\mathcal{S}_n^{++}(\mathbf{R})$, il existe un et un seul élément B de $\mathcal{S}_n^{++}(\mathbf{R})$ tel que $B^2 = A$.
   (b) Soit $\phi\ :\ \mathrm{O}_n(\mathbf{R}) \times \mathcal{S}_n^{++}(\mathbf{R}) \to \mathrm{GL}_n\mathbf{R}\,;\ (O, S) \times OS$. Montrer que ϕ est une bijection.
   (c) $\star$ En déduire que $\mathrm{GL}_n^+(\mathbf{R})$ est connexe par arcs.
   (d) $\star$ Montrer que ϕ est un homéomorphisme.
   (e) $\star\star$ Montrer que pour tout élément M de $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ il existe un couple $\mathrm{O}_n(\mathbf{R}) \times \mathcal{S}_n^+(\mathbf{R})$ tel que $M = OS$. Ce couple est-il unique ?
11. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R})$. Posons $B =^{\mathrm{t}} AA$ et notons a et b les endomorphismes de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{R})$ canoniquement associés respectivement à a et b. On munit $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{R})$ de sastructure euclidienne canonique.
   (a) Montrer que $\mathrm{Ker}(b) = \mathrm{Ker}(a)$ et que les valeurs propres de b sont positives ou nulles. On notera r le rang de b, donc aussi celui de a.
   (b) $\star$ Montrer qu'il existe des matrices orthogonales P et Q et une matrice diagonale D à coefficients positifs ou nuls telles que :
   $$A = PDQ.$$
   Retrouver 10.(e).