

Ce très court DM est là pour attendre que de nouvelles notions soient traitées. Il utilise essentiellement des connaissances et des raisonnements de sup. Il est à rendre pour le 17 septembre.

DM n°2

Exercice 1

On étudie dans cet exercice quelques aspects d'une marche aléatoire symétrique en dimension 1. Une marche aléatoire symétrique en dimension 1 modélise les déplacements successifs d'un point matériel sur une droite qui se font dans un sens ou dans l'autre avec la même probabilité.

Soit $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de variables aléatoires, mutuellement indépendantes qui suivent la loi de Rademacher, définies sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$ ¹. On dit qu'une variable aléatoire suit une loi de Rademacher si elle prend comme valeurs 1 et -1 avec la même probabilité, autrement dit si elle suit la loi uniforme sur $\{-1, 1\}$

On pose pour tout entier $n \geq 1$,

$$S_n = X_1 + X_2 + \dots + X_n.$$

1. Écart à l'origine

On se donne un réel ε strictement positif.

l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev pour la variable aléatoire X s'obtient en appliquant l'inégalité de Markov à $(X - \mathbf{E}(X))^2$, qui est bien une variable positive. Nous allons comparer ce que nous fournit l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev à ce que l'on obtient en appliquant l'inégalité de Markov à $(\exp(t(X - \mathbf{E}(x))))$, alternative très classique à l'inégalité.

- (a) Calculer pour tout entier naturel $n \geq 1$ l'espérance et la variance de S_n .
- (b) En utilisant la formule de Bienaymé-Tchebychev, majorer pour tout entier $n \geq 1$, $\mathbf{P}\left(\frac{|S_n|}{n} \geq \varepsilon\right)$.

Donner un entier naturel n_0 tel que pour tout $n \geq n_0$, $\mathbf{P}\left(\frac{|S_n|}{n} < 10^{-1}\right) \geq 0,99$.

- (c) **3/2** Montrer que pour tout réel x , la série $\sum \frac{x^n}{n!}$ converge de somme e^x .

On pourra consulter les fiches de colles de MPSI.

- (d) En déduire que pour tout réel t , $\text{ch}(t) \leq e^{\frac{t^2}{2}}$.
- (e) Déduire de la question précédente que pour tout réel t et tout entier $n \geq 1$,

$$\mathbf{E}(\exp(tX_1)) \leq \exp\left(\frac{t^2}{2}\right),$$

puis que :

$$\mathbf{E}\left(\exp\left(\frac{tS_n}{n}\right)\right) \leq \exp\left(\frac{t^2}{2n}\right).$$

1. Les 3/2 ne se préoccupons pas de ce qu'est un espace probabilisé.

(f) En déduire que pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, et tout réel t $\mathbf{P}\left(\frac{S_n}{n} \geq \varepsilon\right) \leq \exp\left(\frac{t^2}{2n} - t\varepsilon\right)$.

Montrer que pour tout $n \in \mathbf{N}^*$,

$$\mathbf{P}\left(\frac{S_n}{n} \geq \varepsilon\right) \leq \exp\left(-\frac{n\varepsilon^2}{2}\right).$$

(g) Montrer que :

$$\mathbf{P}\left(\frac{|S_n|}{n} \geq \varepsilon\right) \leq 2 \exp\left(-\frac{n\varepsilon^2}{2}\right).$$

Déterminer un entier naturel n_0 tel que pour tout $n \geq n_0$, $\mathbf{P}\left(\frac{|S_n|}{n} < 10^{-1}\right) \geq 0,99$.

2. Loi de S_n

(a) Pour tout entier $n \geq 1$ on définit les variables aléatoires

$$X_n^* := \frac{X_n + 1}{2}; \quad S_n^* = X_1^* + X_2^* + \dots + X_n^*.$$

Déterminer pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, la loi de X_n^* et de S_n^* .

(b) En déduire la loi de S_n .

3. Retour à l'Origine.

On convient que S_0 est la variable aléatoire presque sûrement nulle. On considère par ailleurs la variable aléatoire N à valeurs dans $\mathbf{R} \cup \{+\infty\}$,

$$N = \sum_{n=1}^{+\infty} \mathbf{1}_{S_n=0}.$$

On convient évidemment dans la définition de N que la somme d'une série à termes positifs divergente vaut $+\infty$ et on rappelle que pour tout $\omega \in \Omega$, $\mathbf{1}_{S_n=0} = \begin{cases} 1 & \text{si } S_n(\omega) = 0, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$

On définit également la variable aléatoire T à valeurs dans $\mathbf{R}_+^* \cup \{+\infty\}$ par :

$$T = \min\{n \in \mathbf{N}^* | S_n = 0\},$$

avec la convention que pour toute partie A de $\mathbf{N}$, $\min(A)$ désigne le plus petit élément de A ou $+\infty$, selon que A soit non vide ou vide. Pour tout $n \in \mathbf{N}$, on notera $p_n = \mathbf{P}(S_n = 0)$, et pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, $f_n = \mathbf{P}(T = n)$

(a) Que représente les variables aléatoires N et T ?

Exprimer l'événement $\{N \neq 0\}$ au moyen des événements $\{S_k = 0\}$, $k \in \mathbf{N}^*$.

(b) Pour tout $n \in \mathbf{N}$ exprimer au moyen des événements $\{S_k = 0\}$, $k \in \mathbf{N}^*$, l'événement E_n défini par :

$$E_n = \{\omega \in \Omega | S_n(\omega) = 0 \text{ et } \forall k \in \llbracket n, +\infty \llbracket, S_k(\omega) \neq 0\}.$$

Interpréter l'événement E_n .

(c) Exprimer l'événement $\{N < +\infty\}$ au moyen des E_n , $n \in \mathbf{N}$

(d) En déduire que :

$$\mathbf{P}(N < +\infty) = \sum_{n \geq 0}^{+\infty} \mathbf{P}(S_n = 0) \mathbf{P}(\forall k \in \mathbf{N}^*, X_1 + X_2 + \dots + X_k \neq 0).$$

- (e) On admet que la série $\sum_{n \geq 0} \mathbf{P}(S_n = 0)$ diverge. Déterminer $\mathbf{P}(N = +\infty)$.
- (f) Montrer que la série $\sum_{n \geq 0} \mathbf{P}(S_n = 0)$ diverge.

On pourra utiliser la formule de Stirling.

4. Temps de premier retour

- (a) Calculer explicitement f_2 et f_4 .

Soient les séries entières :

$$\sum_{n \geq 0} p_n t^n \quad \text{et} \quad \sum_{n \geq 1} f_n t^n,$$

leurs sommes seront respectivement notées S et F .

- (b) Soit $m \in \mathbf{N}^*$, montrer que :

$$p_m = \mathbf{P}\{S_m = 0\} = \sum_{k=1,2,\dots,m} f_k p_{m-k}.$$

La suite de l'exercice est réservée au 5/2

- (c) Pour tout $t \in]-1, 1[$ comparer $S(t)$ et $\frac{1}{\sqrt{1-t^2}}$.
- (d) Établir, pour tout $t \in]-1, 1[$, la relation

$$S(t) = 1 + S(t)F(t).$$

En déduire, pour tout entier $n \geq 1$, la valeur de f_n .

- (e) Donner un équivalent de $f(2k)$ quand $k \rightarrow +\infty$.
- (f) Montrer que la série $\sum_{n \geq 1} f_n$ converge, puis en déduire sa valeur. Interpréter.

Exercice 2

Pour tout entier n supérieur ou égal à 2 on définit le polynôme

$$P_n = X^n - X + 1.$$

1. Soit n un entier pair non nul. Montrer que P'_n admet une et une seule racine réelle, on la notera x_n . Montrer que P_n n'admet pas de racine réelle.
2. Soit n un entier est impair distinct de 1. Montrer que P'_n admet deux et seulement deux racines réelles, opposées, $\pm x_n$. Montrer que P_n admet une et une seule racine réelle. Donner un intervalle de longueur inférieure ou égale à 1 qui contient la racine réelle de P_n .

Pour tout entier m supérieur ou égal à 2, on pose z_m la racine réelle de P_{m+1} et $h_n := -1 - z_n$ de sorte à ce que $z_n = -1 - h_n$

3. Montrer que $z_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} -1$, puis déterminer un équivalent de h_n lorsque n tend vers $+\infty$.
4. Soit n un élément de $\llbracket 2, +\infty \rrbracket$. Posons $\omega = e^{i \frac{2\pi}{n-1}}$. Expliciter les racines complexes de P'_n au moyen de x_n et ω . Puis montrer que les n racines complexes de P_n sont simples.
5. On note r_1, r_2, r_3 les trois racines de P_3 et l'on pose :

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1+r_1 & 1 & 1 \\ 1 & 1+r_2 & 1 \\ 1 & 1 & 1+r_3 \end{vmatrix}.$$

Montrer que $\Delta = -2$.

6. Soient n en entier supérieur ou égal à 2 et $r_1, r_2, \dots, r_n$ les n racines complexes de P_n .
Calculer le déterminant Δ_n , où :

$$\begin{vmatrix} 1+r_1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1+r_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ 1 & \dots & 1 & 1+r_n \end{vmatrix}.$$

Indications pour le DM n°2

Exercice 1

1. Écart à l'origine

- (a) Soit $n \in \mathbf{N}^*$. En premier lieu $E(X_1) = \frac{1}{2}1 + \frac{1}{2}(-1) = 0$ et $V(X_1) = E(X_1^2) - E(X_1)^2 = E(1) - 0^2 = 1$.

Utilisez ensuite la linéarité de l'espérance puis la mutuelle indépendance...

- (b) Utiliser l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev

$$\mathbf{P} \left(\frac{|S_n|}{n} < 10^{-1} \right) \geq 1 - 10^{-2} = 0,99.$$

- (c) Soit $x \in \mathbf{R}$.

Comme la fonction exponentielle est de classe $\mathcal{C}^\infty$ et que pour tout $n \in \mathbf{N}$, sa dérivée $(n+1)^e$ — qui est elle-même — est majoré sur $[0, x]$ par $\exp(|x|)$, par croissance de l'exponentielle, (l'écriture $[0, x]$ ne présage pas que x soit positif), l'inégalité de Taylor-Lagrange donne :

$$\exp(x) = \sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k!} + R_n(x), \text{ et } |R_n(x)| \leq \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!} \exp(|x|)$$

etc. Soit $t \in \mathbf{R}$. Par ce qui précède,

$$\exp\left(\frac{t^2}{2}\right) = 1 + \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{t^{2k}}{2^k k!},$$

$$\text{ch}(t) = \frac{1}{2} \left(\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{t^k}{k!} + \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-t)^k}{k!} \right) = 1 + \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{t^{2k}}{(2k)!}.$$

Il reste à comparer les termes des deux séries.

- (d) Soient un réel t et un entier $n \geq 1$, Par la formule du transfert,

$$E(\exp(tX_1)) = \frac{1}{2} \exp(t \times 1) + \frac{1}{2} \exp(t \times (-1)) = \text{ch}(t) \leq \exp\left(\frac{t^2}{2}\right).$$

Le lemme de coalition fait que $\exp\left(\frac{tX_1}{n}\right), \dots, \exp\left(\frac{tX_n}{n}\right)$ héritent de la mutuelle indépendance de $X_1, \dots, X_n$, donc

$$E\left(\exp\left(\frac{tS_n}{n}\right)\right) = E\left(\prod_{i=1}^n \exp\left(\frac{tX_i}{n}\right)\right) \stackrel{\perp}{=} \prod_{i=1}^n E\left(\exp\left(\frac{tX_i}{n}\right)\right) = E\left(\exp\left(\frac{tX_1}{n}\right)\right)^n \leq \dots$$

- (e) Soit un entier $n \geq 1$. La variable aléatoire $\exp\left(\frac{tS_n}{n}\right)$ est **positive** l'inégalité de Markov s'applique.....

Reste à optimiser en t : pour $t = \frac{\varepsilon n}{2}$, l'inégalité précédente devient.....

$$(f) \text{ D'abord, } \left\{ \frac{|S_n|}{n} \geq \varepsilon \right\} = \left\{ \frac{S_n}{n} \geq \varepsilon \right\} \cup \left\{ -\frac{S_n}{n} \geq \varepsilon \right\}$$

Mais comme les variables aléatoires $-X_1, \dots, -X_n$ suivent la même loi respectivement que $X_1, \dots, X_n$ et restent mutuellement indépendantes (lemme de coalition) $-S_n$ suit la loi de S_n

Pour la fin $n \geq 1060$ convient.

$$\mathbf{P} \left(\frac{|S_n|}{n} < 10^{-1} \right) \geq 0,99.,$$

2. Loi de S_n

$$(a) \quad X_n^* \sim \mathcal{B} \left(\frac{1}{2} \right) \text{ et Le lemme de coalition assurant la mutuelle indépendance de } X_1^*, X_2^*, \dots, X_n^*,$$

$$S_n^* \sim \mathcal{B} \left(n, \frac{1}{2} \right).$$

$$(b) \text{ Pour tout entier } n \geq 1, S_n = 2S_n^* - n, \text{ donc } S_n(\Omega) = \{2k - n, k \in \llbracket -n; n \rrbracket\} \text{ et pour tout } k \in \llbracket -n; n \rrbracket,$$

$$\mathbf{P}(S_n = 2k - n) = \dots\dots$$

Remarque. S_n ne prend que des valeurs de la parité de n .

3. Retour à l'Origine.

$$(a) \text{ Soit } \omega \in \Omega. \text{ Alors } N(\omega) \text{ représente le nombre (éventuellement infini) de termes nuls de la suite } (S_n(\omega))_{n \in \mathbf{N}^*}, \text{ (nombre de « retours à l'origine »).}$$

On a $N(\omega) \neq 0$ si et seulement si il existe $k \in \mathbf{N}^*$ tels que $S_k(\omega) = 0$; donc :

$$\{N \neq 0\} = \bigcup_{n \in \mathbf{N}^*} \{S_k = 0\}.$$

Remarque. A l'opposé, $N(\omega) = +\infty$ si pour tout $n \in \mathbf{N}^*$ il existe un entier k supérieur ou égal à n tel que $S_k(\omega) = 0$; donc :

$$\{N = +\infty\} = \dots\dots\dots$$

$$(b) \text{ Soit } n \in \mathbf{N}.$$

$$E_n = \{S_n = 0\} \cap \bigcup_{k \geq n+1} \overline{\{S_k = 0\}}.$$

L'événement E_n est « la suite $(S_k)_{k \in \mathbf{N}}$ prend la la valeur 0 pour $k = n$ et pour aucun autre indice strictement plus grand » de manière imagée, n est

$$(c) \text{ On a donc}$$

$$\{N < +\infty\} = \bigcup_{n \in \mathbf{N}^*} ? E_n,$$

$$(d) \text{ En modifiant légèrement l'expression des } E_n,$$

$$\begin{aligned} \{N < +\infty\} &= \bigcup_{n=0}^{+\infty} \{S_n = 0, \forall p \in \llbracket n+1, +\infty \rrbracket [S_p - S_n \neq 0]\} = \\ &= \bigcup_{n=0}^{+\infty} \{S_n = 0, \forall k \in \mathbf{N}^*, X_{n+1} + X_{n+2} + \dots + X_{n+k} \neq 0\}. \end{aligned}$$

Donc

$$\mathbf{P}(N < +\infty) = \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbf{P}(S_n = 0, \forall k \in \mathbf{N}^*, X_{n+1} + X_{n+2} + \dots + X_{n+k} \neq 0).$$

Puis, comme le lemme de coalition assure l'indépendance² de S_n et $X_{n+1} + X_{n+2} + \dots + X_{n+k}$, pour tout $n \in \mathbf{N}$, etc.

(e) On a donc :

$$1 \geq \mathbf{P}(N < +\infty) = \sum_{n=0}^{+\infty} \alpha \mathbf{P}(S_n = 0),$$

La série $\sum \mathbf{P}(S_n = 0)$, on l'admet, diverge, donc nécessairement $\alpha = 0$ et donc on a $\mathbf{P}(N < +\infty) = 0$. Donc :

$$\boxed{\mathbf{P}(N = +\infty) = 1.}$$

(f) D'après 2, $\mathbf{P}(S_{2p+1} = 0)$ est nulle tandis que $\mathbf{P}(S_{2p} = 0) = \mathbf{P}(S_{2p}^* = p) = \frac{(2p)!}{2^{2p}(p!)^2} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \dots\dots$
(merci Stirling). Donc la série $\sum \mathbf{P}(S_{2p} = 0)$ diverge, mais pour tout $n \in \mathbf{N}$,

$$\sum_{k=0}^{2n} \mathbf{P}(S_k = 0) = \sum_{p=0}^n \mathbf{P}(S_{2p} = 0)$$

mais comme $\sum \mathbf{P}(S_{2p} = 0)$ est une série positive divergente $\sum_{p=0}^n \mathbf{P}(S_{2p} = 0) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty$.

Donc $\sum \mathbf{P}(S_n = 0)$ diverge (la suite de ses sommes partielles d'indice pair diverge).

4. (a) Comme

$$\{T = 2\} = (\{X_1 = 1\} \cap \{X_2 = -1\}) \cup (\{X_1 = -1\} \cap \{X_2 = +1\}),$$

par indépendance de X_1 et X_2 ,

$$f_2 = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{2}.$$

Sur le même principe,

$$\{T = 4\} = \coprod_{\epsilon \in \{1, -1\}} (\{X_1 = \epsilon\} \cap \{X_2 = \epsilon\} \cap \{X_3 = -\epsilon\} \cap \{X_4 = -\epsilon\})$$

et donc

$$f_2 = \dots\dots\dots$$

(b) Soit $m \in \mathbf{N}^*$. Il est peut-être plus simple de calculer sans se soucier de la parité de m , ni des autres indices.

On a l'inclusion $\{S_m = 0\} \subset \coprod_{k=1,2,\dots,m} \{T = k\}$, donc

$$\{S_m = 0\} = \coprod_{k=1,2,\dots,n} (\{T = k\} \cap \{S_m = 0\}).$$

2. En toute rigueur il faudrait travailler un peu plus pour prendre en compte la présence du « pour tout k », ce qui exigerait que l'on connût des résultats de spé. En général du reste dans la littérature, on se contente de cette évocation de l'indépendance.

Donc en passant aux probabilités,

$$p_m = \mathbf{P}\{S_m = 0\} = \sum_{k=1,2,\dots,m} \mathbf{P}(\{T = k\} \cap \{S_m = 0\}).$$

Distinguons pour plus de clarté les cas $k \neq m$ et $k = m$.

- Pour $k = 1, 2, \dots, m-1$,

$$\{T = k\} \cap \{S_m = 0\} = \left(\bigcap_{i=1}^{k-1} \overline{\{S_i = 0\}}\right) \cap \{S_k = 0\} \cap \{X_{k+1} + X_{k+2} + \dots + X_m = 0\}.$$

Or par coalition $\left(\bigcap_{i=1}^{k-1} \overline{\{S_i = 0\}}\right) \cap \{S_k = 0\}$ et $\{X_{k+1} + X_{k+2} + \dots + X_m = 0\}$ sont indépendants, donc etc., etc., etc...

- $\{T = m\} \cap \{S_m = 0\} = \{T = m\}$ donc

$$\mathbf{P}(\{T = m\} \cap \{S_m = 0\}) = f_m = f_m p_{m-m}.$$

Finalement

$$p_m = \mathbf{P}\{S_m = 0\} = \sum_{k=1,2,\dots,m} \mathbf{P}(T = k) \mathbf{P}(S_{m-k}) = \sum_{k=1,2,\dots,m} f_k p_{m-k}.$$

(c) D'après le cours, pour tout $t \in]-1, 1[$,

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{1-t^2}} &= 1 + \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\left(-\frac{1}{2}\right) \left(-\frac{1}{2} - 1\right) \dots \left(-\frac{1}{2} - (k-1)\right)}{k!} (-1)^k (t^2)^k \\ &\dots\dots\dots \\ &= \dots\dots\dots = S(t). \end{aligned}$$

(d) D'après (b), pour tout $t \in]-1, 1[$,

$$S(t) = 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\sum_{k=1,2,\dots,n} f_k p_{n-k} \right) t^n = 1 + F(t) S(t),$$

par produit de Cauchy, la série entière $\sum p_n t^n$ — nous le vîmes en (c) — a un rayon de convergence égal à 1 et $\sum_{n \geq 1} f_n t^n$ a un rayon de convergence au moins égal à 1, puisque $\sum_{n \geq 1} f_n$ converge par σ -additivité de $\mathbf{P}$, de somme : $1 - \mathbf{P}(T = \infty)$.

Il en résulte que pour tout $t \in]-1, 1[$,

$$F(t) = 1 - \frac{1}{S(t)} = 1 - \sqrt{1-t^2}$$

Pour tout $t \in]-1, 1[$,

$$\sqrt{1-t^2} = 1 + \sum_{k=1}^{+\infty} \binom{\frac{1}{2}}{k} (-t^2)^k,$$

Donc.....

- pour tout $k \in \mathbf{N}^*$, $f_{2k} = \frac{(2(k-1))!}{(2^k k! 2^{k-1} (k-1)!)} ;$
- pour tout $k \in \mathbf{N}$, $f_{2k+1} = 0.$

(e) Grâce à la formule de Stirling,

$$f_{2k} \underset{k \rightarrow +\infty}{\sim} \dots\dots\dots \underset{k \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{2\sqrt{\pi}k^{3/2}}$$

(f) Utiliser le théorème de la double limite Donc $\sum_{n=1}^{+\infty} f_n = 1$.

La variable aléatoire T est presque sûrement à valeurs dans $\mathbf{N}$ et donc $(S_n)_{n \in \mathbf{N}^*}$ s'annule presque sûrement.

Exercice 2

EXERCICE 2
Pour tout entier n supérieur ou égal à 2 on pose $x_n = {}^{n-1}\sqrt{\frac{1}{n-1}}$. Notons que comme $n \geq 2$,

$$0 < x_n < 1.$$

1. CAS PAIR

Comme $P' - n = nX^{n-1} - 1$ on a le tableau de variations suivant

x	$-\infty$	x_n	$+\infty$
$P'_n(x)$	$+$	0	$+$
$P_n(x)$	$+\infty$	$P_n(x_n)$	$+\infty$

Or $nx_n^{n-1} = 1$ donc $P_n(x_n) = \frac{1}{n}x_n - x_n + 1 = 1 - (1 - \frac{1}{n})x_n > 1 - 1 \times 1 = 0$.

Le polynôme P_n n'a pas de racine réelle.

2. CAS IMPAIR

Par parité de $n - 1$, on obtient le tableau de variations

x	$-\infty$	$-x_n$	x_n	$+\infty$	
$P'_n(x)$	$+$	$\emptyset$	$-$	$\emptyset$	$+$
$P_n(x)$	$-\infty$				$+\infty$

On a, comme dans le cas n pair, $P_n(x_n) > 0$, par ailleurs la restriction du polynôme P_n à $] -\infty, -x_n]$ est **continue** sur cet **intervalle** et **strictement croissant** donc par le théorème de la bijection monotone réalise une bijection sur $] -\infty, P_n(-x_n)]$. Conclusions : P_n admet une et une seule racine réelle.

Notons que $P_n(-1) = 1 > 0$ et $P_n(-2) = (-2)^n + 2 + 1 = -2^n + 3 \leq -2^3 + 3 = -5 < 0$.
Donc la racine de P_n est élément de $] -2, -1[$.

3. Par définition de z_n , pour tout entier $n \geq 1$

$$(-z_n)^{2n+1} = -(z_n)^{2n+1} = -z_n + 1,$$

Passer au logarithme ! On trouve $h_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$. Puis

$$h_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{\ln(2)}{2n+1}.$$

On a le développement asymptotique : $z_n = -1 - \frac{\ln(2)}{2n+1} + o_{n \rightarrow +\infty}\left(\frac{1}{n}\right)$.

4. Soit $z \in \mathbf{C}$. On a $P'_n(z) = 0$ si et seulement si : $z^{n-1} = \frac{1}{n} = x^{n-1}$ soit encore, si et seulement si $\frac{z}{x_n} \in \mathbf{U}_{n-1}$. Or $\mathbf{U}_{n-1} = \{\dots\dots\dots\}$, donc l'ensemble des racines de P'_n est :

$$\{\dots\dots\dots\}$$

Pour $k = 0, 1, \dots, n-2$, on montre que : $P_n(x_n \omega^k) \neq 0$.

Donc les n racines complexes de P_n sont simples.

5. Notons, E_i pour $i = 1, 2, 3$, le i^e vecteur de la base canonique de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbf{C})$ et $C = E_1 + E_2 + E_3$.

On note r_1, r_2, r_3 les trois racines de P_3 et l'on pose :

$$\Delta = \det(C + r_1 E_1 \mid C + r_2 E_2 \mid C + r_3 E_3).$$

En utilisant la linéarité par rapport au trois colonnes, Δ s'exprime comme la somme de 2^3 déterminants, parmi ceux-ci tout déterminant ayant deux colonnes C est nul, en utilisant ensuite que $C = E_1 + E_2 + E_3$, on a sans presque de calculs que

$$\Delta = r_1 r_2 r_3 + (r_1 r_2 + r_1 r_3 + r_2 r_3) = (-1) + (-1) = \underline{-2},$$

grâce aux relations coefficients/racines pour le polynôme unitaire P_n .

6. Notons E_i le i^e vecteur de la base canonique de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{C})$ et $C = E_1 + E_2 + E_3$.

En raisonnant comme dans la question précédente, on arrive à

$$\Delta_n = \underline{(-1)^n 2}.$$

Correction du DM n°2

Exercice 1

1. Écart à l'origine

- (a) Soit $n \in \mathbf{N}^*$. En premier lieu $E(X_1) = \frac{1}{2}1 + \frac{1}{2}(-1) = 0$ et $V(X_1) = E(X_1^2) - E(X_1)^2 = E(1) - 0^2 = 1$.

Ensuite par *linéarité* de l'espérance et comme les X_i suivent la loi de X_1 , on a $E(S_n) = 0$.

Enfin par *mutuelle indépendance* des X_i on a

$$V(S_n) = \sum_{i=1}^n V(X_i) = nV(X_1) = n.$$

- (b) Par (a), et l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev

$$\mathbf{P}\left(\frac{|S_n|}{n} \geq \varepsilon\right) = \mathbf{P}\left(\left|\frac{S_n}{n} - E\left(\frac{S_n}{n}\right)\right| \geq \varepsilon\right) \leq \frac{V\left(\frac{S_n}{n}\right)}{\varepsilon^2} = \frac{V(S_n)}{n^2\varepsilon^2} = \frac{1}{n\varepsilon^2}.$$

Pour tout $n \geq 10^4$, on a $\frac{1}{n10^{-2}} \leq 10^{-2}$, et donc $\mathbf{P}\left(\frac{|S_n|}{n} \geq 10^{-1}\right) \leq 10^{-2}$, donc, en passant à l'événement contraire,

$$\mathbf{P}\left(\frac{|S_n|}{n} < 10^{-1}\right) \geq 1 - 10^{-2} = 0,99.$$

- (c) Montrer que pour tout réel x , la série $\sum \frac{x^n}{n!}$ converge de somme e^x .

Remarque. Ce résultat au programme sera vu en cours d'année.

Soit $x \in \mathbf{R}$.

Comme la fonction exponentielle est de classe $\mathcal{C}^\infty$ et que pour tout $n \in \mathbf{N}$, sa dérivée $(n+1)^e$ — qui est elle-même — est majoré sur $[0, x]$ par $\exp(|x|)$, par croissance de l'exponentielle, (l'écriture $[0, x]$ ne présage pas que x soit positif), l'inégalité de Taylor-Lagrange donne :

$$\exp(x) = \sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k!} + R_n(x), \text{ et } |R_n(x)| \leq \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!} \exp(|x|)$$

Or par croissance comparée puissance/factorielle, $\frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!} \exp(|x|) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$. Donc par encadrement $R_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$ si bien que la série $\sum \frac{x^k}{k!}$ converge de somme e^x .

Soit $t \in \mathbf{R}$. Par ce qui précède,

$$\exp\left(\frac{t^2}{2}\right) = 1 + \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{t^{2k}}{2^k k!},$$

$$\text{ch}(t) = \frac{1}{2} \left(\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{t^k}{k!} + \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-t)^k}{k!} \right) = 1 + \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{t^{2k}}{(2k)!}.$$

Mais pour tout $k \in \mathbf{N}^*$,

$$\frac{1}{(2k)!} = \frac{1}{(1 \times 2 \times \dots \times k) \times (k+1) \times (k+2) \cdots \times (k+k)} \leq \frac{1}{k! \underbrace{\times 2 \times 2 \cdots \times 2}_{k \text{ termes}}} = \frac{1}{k! 2^k}.$$

Donc $\text{ch}(t) \leq e^{\frac{t^2}{2}}$.

(d) Soient un réel t et un entier $n \geq 1$, Par la formule du transfert,

$$\underline{E(\exp(tX_1)) = \frac{1}{2} \exp(t \times 1) + \frac{1}{2} \exp(t \times (-1)) = \text{ch}(t) \leq \exp\left(\frac{t^2}{2}\right).}$$

Le lemme de coalition fait que $\exp\left(\frac{tX_1}{n}\right), \dots, \exp\left(\frac{tX_n}{n}\right)$ héritent de la mutuelle indépendance de $X_1, \dots, X_n$, donc

$$\begin{aligned} E\left(\exp\left(\frac{tS_n}{n}\right)\right) &= E\left(\prod_{i=1}^n \exp\left(\frac{tX_i}{n}\right)\right) \stackrel{\text{II}}{=} \prod_{i=1}^n E\left(\exp\left(\frac{tX_i}{n}\right)\right) = \\ &= \underline{E\left(\exp\left(\frac{tX_1}{n}\right)\right)^n \leq \exp\left(\frac{\left(\frac{t}{n}\right)^2}{2}\right)^n = \exp\left(\frac{t^2}{2n}\right).} \end{aligned}$$

(e) Soit un entier $n \geq 1$. La variable aléatoire $\exp\left(\frac{tS_n}{n}\right)$ est **positive** l'inégalité de Markov s'énonce :

$$\mathbf{P}\left(\exp\left(\frac{tS_n}{n}\right) \geq \exp(t\varepsilon)\right) \leq \frac{E\left(\exp\left(\frac{tS_n}{n}\right)\right)}{\exp(t\varepsilon)} \leq \frac{\exp\left(\frac{t^2}{2n}\right)}{\exp(t\varepsilon)} = \exp\left(\frac{t^2}{2n} - t\varepsilon\right),$$

par (d). Mais par croissance de l'exponentielle³, pour tout réel $t > 0$

$$\left\{\frac{S_n}{n} \geq \varepsilon\right\} = \left\{\frac{tS_n}{n} \geq t\varepsilon\right\} \subset \left\{\exp\left(\frac{tS_n}{n}\right) \geq \exp(t\varepsilon)\right\}$$

Donc en passant aux probabilités, pour tout réel t non nul (et trivialement pour $t = 0$), on a :

$$\boxed{\mathbf{P}\left(\frac{S_n}{n} \geq \varepsilon\right) \leq \mathbf{P}\left(\exp\left(\frac{tS_n}{n}\right) \geq \exp(t\varepsilon)\right) \leq \exp\left(\frac{t^2}{2n} - t\varepsilon\right)}.$$

Optimisons en t : pour $t = \frac{\varepsilon n}{2}$, l'inégalité précédente devient :

$$\boxed{\mathbf{P}\left(\frac{S_n}{n} \geq \varepsilon\right) \leq \exp\left(-\frac{n\varepsilon^2}{2}\right)}.$$

(f) D'abord, $\left\{\frac{|S_n|}{n} \geq \varepsilon\right\} = \left\{\frac{S_n}{n} \geq \varepsilon\right\} \cup \left\{-\frac{S_n}{n} \geq \varepsilon\right\}$

Mais comme les variables aléatoires $-X_1, \dots, -X_n$ suivent la même loi respectivement que $X_1, \dots, X_n$ et restent mutuellement indépendantes (lemme de coalition) $-S_n$ suit la loi de S_n , donc

$$\mathbf{P}\left(\frac{|S_n|}{n} \geq \varepsilon\right) \leq \mathbf{P}\left(\frac{S_n}{n} \geq \varepsilon\right) + \mathbf{P}\left(\frac{-S_n}{n} \geq \varepsilon\right) = 2\mathbf{P}\left(\frac{S_n}{n} \geq \varepsilon\right) \leq 2\exp\left(-\frac{n\varepsilon^2}{2}\right),$$

3. La stricte monotonie accorde même, si l'on veut l'égalité.

par (e).

En particulier

$$\mathbf{P}\left(\frac{|S_n|}{n} \geq 10^{-1}\right) \leq 2 \exp\left(-\frac{n10^{-2}}{2}\right).$$

Or pour tout entier $n \geq 1060$, $2 \exp\left(-\frac{n10^{-2}}{2}\right) \leq 10^{-2}$, et donc $\mathbf{P}\left(\frac{|S_n|}{n} \geq 10^{-1}\right) \leq 10^{-2}$.

En passant à l'événement contraire, (cf. 1. (b)), pour tout entier $n \geq 1060$,

$$\mathbf{P}\left(\frac{|S_n|}{n} < 10^{-1}\right) \geq 0,99.,$$

2. Loi de S_n

(a) $X_n^* \sim \mathcal{B}\left(\frac{1}{2}\right)$ et Le lemme de coalition assurant la mutuelle indépendance de $X_1^*, X_2^*, \dots, X_n^*$,

$$S_n^* \sim \mathcal{B}\left(n, \frac{1}{2}\right).$$

(b) Pour tout entier $n \geq 1$, $S_n = 2S_n^* - n$, donc $S_n(\Omega) = \{2k - n, k \in \llbracket -n; n \rrbracket\}$ et pour tout $k \in \llbracket -n; n \rrbracket$,

$$\mathbf{P}(S_n = 2k - n) = \binom{n}{k} \frac{1}{2^n}.$$

Remarque. S_n ne prend que des valeurs de la parité de n .

3. Retour à l'Origine.

(a) Soit $\omega \in \Omega$. Alors $N(\omega)$ représente le nombre (éventuellement infini) de termes nuls de la suite $(S_n(\omega))_{n \in \mathbf{N}^*}$, (nombre de « retours à l'origine »).

On a $N(\omega) \neq 0$ si et seulement si il existe $k \in \mathbf{N}^*$ tels que $S_k(\omega) = 0$; donc :

$$\{N \neq 0\} = \bigcup_{n \in \mathbf{N}^*} \{S_k = 0\}.$$

Remarque. A l'opposé, $N(\omega) = +\infty$ si pour tout $n \in \mathbf{N}^*$ il existe un entier k supérieur ou égal à n tel que $S_k(\omega) = 0$; donc :

$$\{N = +\infty\} = \bigcap_{n \in \mathbf{N}^*} \bigcup_{k \geq n} \{S_k = 0\}.$$

(b) Soit $n \in \mathbf{N}$.

$$E_n = \{S_n = 0\} \cap \bigcup_{k \geq n+1} \overline{\{S_k = 0\}}.$$

L'événement E_n est « la suite $(S_k)_{k \in \mathbf{N}}$ prend la la valeur 0 pour $k = n$ et pour aucun autre indice strictement plus grand » de manière imagée, n est le dernier instant de passage par l'origine.

(c) On a donc

$$\{N < +\infty\} = \bigcup_{n \in \mathbf{N}^*} E_n,$$

cette union est *une union disjointe*

(d) En modifiant légèrement l'expression des E_n ,

$$\{N < +\infty\} = \bigcup_{n=0}^{+\infty} \{S_n = 0, \forall p \in \llbracket n+1, +\infty \llbracket S_p - S_n \neq 0\} = \\ \bigcup_{n=0}^{+\infty} \{S_n = 0, \forall k \in \mathbf{N}^*, X_{n+1} + X_{n+2} + \dots + X_{n+k} \neq 0\}.$$

Donc

$$\mathbf{P}(N < +\infty) = \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbf{P}(S_n = 0, \forall k \in \mathbf{N}^*, X_{n+1} + X_{n+2} + \dots + X_{n+k} \neq 0).$$

Puis, comme le lemme de coalition assure l'indépendance⁴ de S_n et $X_{n+1} + X_{n+2} + \dots + X_{n+k}$, pour tout $n \in \mathbf{N}$,

$$\mathbf{P}(N < +\infty) = \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbf{P}(S_n = 0), \mathbf{P}(\forall k \in \mathbf{N}^*, X_{n+1} + X_{n+2} + \dots + X_{n+k} \neq 0).$$

Mais les X_n étant mutuellement indépendantes et de même loi pour tout entier $n \geq 0$,

$$\mathbf{P}(\forall k \in \mathbf{N}^*, X_{n+1} + X_{n+2} + \dots + X_{n+k} \neq 0) = \mathbf{P}(\forall k \in \mathbf{N}^*, X_1 + X_2 + \dots + X_k \neq 0),$$

quantité indépendante de n , que nous baptiserons pour la suite α .

(e) On a donc :

$$1 \geq \mathbf{P}(N < +\infty) = \sum_{n=0}^{+\infty} \alpha \mathbf{P}(S_n = 0),$$

La série $\sum \mathbf{P}(S_n = 0)$, on l'admet, diverge, donc nécessairement $\alpha = 0$ et donc on a $\mathbf{P}(N < +\infty) = 0$. Donc :

$$\boxed{\mathbf{P}(N = +\infty) = 1.}$$

(f) D'après 2, $\mathbf{P}(S_{2p+1} = 0)$ est nulle tandis que $\mathbf{P}(S_{2p} = 0) = \mathbf{P}(S_{2p}^* = p) = \frac{(2p)!}{2^{2p}(p!)^2} \underset{p \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{\sqrt{\pi p}}$ (merci Stirling). Donc la série $\sum \mathbf{P}(S_{2p} = 0)$ diverge, mais pour tout $n \in \mathbf{N}$,

$$\sum_{k=0}^{2n} \mathbf{P}(S_k = 0) = \sum_{p=0}^n \mathbf{P}(S_{2p} = 0)$$

mais comme $\sum \mathbf{P}(S_{2p} = 0)$ est une série positive divergente $\sum_{p=0}^n \mathbf{P}(S_{2p} = 0) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty$.

Donc $\sum \mathbf{P}(S_n = 0)$ diverge (la suite de ses sommes partielles d'indice pair diverge).

4. (a) Comme

$$\{T = 2\} = (\{X_1 = 1\} \cap \{X_2 = -1\}) \amalg (\{X_1 = -1\} \cap \{X_2 = +1\}),$$

par indépendance de X_1 et X_2 ,

$$f_2 = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{2}.$$

4. En toute rigueur il faudrait travailler un peu plus pour prendre en compte la présence du « pour tout k », ce qui exigerait que l'on connût des résultats de spé. En général du reste dans la littérature, on se contente de cette évocation de l'indépendance.

Sur le même principe,

$$\{T = 4\} = \prod_{\epsilon \in \{1, -1\}} (\{X_1 = \epsilon\} \cap \{X_2 = \epsilon\} \cap \{X_3 = -\epsilon\} \cap \{X_4 = -\epsilon\})$$

et donc

$$f_2 = \left(\frac{1}{2}\right)^4 + \left(\frac{1}{2}\right)^4 = \frac{1}{8}.$$

(b) Soit $m \in \mathbf{N}^*$. Il est peut-être plus simple de calculer sans se soucier de la parité de m , ni des autres indices.

On a l'inclusion $\{S_m = 0\} \subset \prod_{k=1,2,\dots,m} \{T = k\}$, donc

$$\{S_m = 0\} = \prod_{k=1,2,\dots,n} (\{T = k\} \cap \{S_m = 0\}).$$

Donc en passant aux probabilités,

$$p_m = \mathbf{P}\{S_m = 0\} = \sum_{k=1,2,\dots,m} \mathbf{P}(\{T = k\} \cap \{S_m = 0\}).$$

Distinguons pour plus de clarté les cas $k \neq m$ et $k = m$.

• Pour $k = 1, 2, \dots, m-1$,

$$\{T = k\} \cap \{S_m = 0\} = \left(\bigcap_{i=1}^{k-1} \overline{\{S_i = 0\}} \cap \{S_k = 0\}\right) \cap \{X_{k+1} + X_{k+2} + \dots + X_m = 0\}.$$

Or par coalition $\left(\bigcap_{i=1}^{k-1} \overline{\{S_i = 0\}} \cap \{S_k = 0\}\right)$ et $\{X_{k+1} + X_{k+2} + \dots + X_m = 0\}$ sont indépendants, donc

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(\{T = k\} \cap \{S_m = 0\}) &= \mathbf{P}\left(\bigcap_{i=1}^{k-1} \overline{\{S_i = 0\}} \cap \{S_k = 0\}\right) \mathbf{P}(\{X_{k+1} + X_{k+2} + \dots + X_m = 0\}) \\ &= \mathbf{P}(\{T = k\}) \mathbf{P}(\{X_{k+1} + X_{k+2} + \dots + X_m = 0\}). \end{aligned}$$

Mais comme la suite $(X_n)_{n \in \mathbf{N}}$ est i.i.d., les variables aléatoires $X_{k+1} + X_{k+2} + \dots + X_m$ et S_{m-k} ont même loi, donc $\mathbf{P}(\{X_{k+1} + X_{k+2} + \dots + X_m = 0\}) = \mathbf{P}(S_{m-k} = 0)$, et donc

$$\mathbf{P}(\{T = k\} \cap \{S_m = 0\}) = f_k p_{m-k}.$$

• $\{T = m\} \cap \{S_m = 0\} = \{T = m\}$ donc

$$\mathbf{P}(\{T = m\} \cap \{S_m = 0\}) = f_m = f_m p_{m-m}.$$

Finalement

$$p_m = \mathbf{P}\{S_m = 0\} = \sum_{k=1,2,\dots,m} \mathbf{P}(T = k) \mathbf{P}(S_{m-k}) = \sum_{k=1,2,\dots,m} f_k p_{m-k}.$$

(c) D'après le cours, pour tout $t \in]-1, 1[$,

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\sqrt{1-t^2}} &= 1 + \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\left(-\frac{1}{2}\right) \left(-\frac{1}{2} - 1\right) \dots \left(-\frac{1}{2} - (k-1)\right)}{k!} (-1)^k (t^2)^k \\
&= 1 + \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1 \times 3 \times 5 \times \dots \times (2k-1)}{2^k k!} t^{2k} \\
&= 1 + \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(2k)!}{(2^k k!)^2} t^{2k} = \sum_{k=0}^{+\infty} \binom{2k}{k} \left(\frac{1}{2}\right)^{2k} t^{2k} \\
&= \sum_{k=0}^{+\infty} p_{2k} t^{2k} = \sum_{n=0}^{+\infty} p_n t^n = S(t).
\end{aligned}$$

(d) D'après (b), pour tout $t \in]-1, 1[$,

$$S(t) = 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\sum_{k=1,2,\dots,n} f_k p_{n-k} \right) t^n = 1 + F(t)S(t),$$

par produit de Cauchy, la série entière $\sum p_n t^n$ — nous le vîmes en (c) — a un rayon de convergence égal à 1 et $\sum_{n \geq 1} f_n t^n$ a un rayon de convergence au moins égal à 1, puisque $\sum_{n \geq 1} f_n$ converge par σ -additivité de $\mathbf{P}$, de somme : $1 - \mathbf{P}(T = \infty)$.

Il en résulte que pour tout $t \in]-1, 1[$,

$$F(t) = 1 - \frac{1}{S(t)} = 1 - \sqrt{1-t^2}$$

Pour tout $t \in]-1, 1[$,

$$\sqrt{1-t^2} = 1 + \sum_{k=1}^{+\infty} \binom{\frac{1}{2}}{k} (-t^2)^k,$$

Donc pour tout $t \in]-1, 1[$,

$$\begin{aligned}
F(t) &= - \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\left(\frac{1}{2}\right) \left(\frac{1}{2} - 1\right) \dots \left(\frac{1}{2} - (k-1)\right)}{k!} (-1)^k (t^2)^k \\
&= - \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1 \times (-1)^{k-1} 1 \times 3 \times 5 \times \dots \times (2(k-1)-1)}{2^k k!} (-1)^k t^{2k} \\
&= \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(2(k-1))!}{(2^k k! 2^{k-1} (k-1)!) } t^{2k}.
\end{aligned}$$

Par unicité du développement en série entière :

- pour tout $k \in \mathbf{N}^*$, $f_{2k} = \frac{(2(k-1))!}{(2^k k! 2^{k-1} (k-1)!)}$;
- pour tout $k \in \mathbf{N}$, $f_{2k+1} = 0$.

(e) Grâce à la formule de Stirling,

$$\begin{aligned}
 f_{2k} &\underset{k \rightarrow +\infty}{\sim} \sqrt{\frac{2\pi 2(k-1)}{2\pi k 2\pi(k-1)}} \exp(2(k-1) - (k + (k-1))) \frac{(2(k-1))^{2(k-1)}}{k^k (k-1)^{k-1}} 2^{-k-(k-1)} \\
 &\underset{k \rightarrow +\infty}{\sim} \sqrt{\frac{2}{2\pi k}} \exp(-1) \frac{2^{2(k-1)} (k-1)^{k-1}}{k^k} 2^{-2k+1} \\
 &\underset{k \rightarrow +\infty}{\sim} \sqrt{\frac{1}{\pi k}} \exp(-1) \left(1 - \frac{1}{k}\right)^k \left(1 - \frac{1}{k}\right)^{-1} \frac{1}{k} 2^{-1} \\
 &\underset{k \rightarrow +\infty}{\sim} \sqrt{\frac{1}{\pi}} \exp(-1) \exp(1) \times 1 \times \frac{1}{k} 2^{-1} \underset{k \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{2\sqrt{\pi} k^{3/2}}
 \end{aligned}$$

(f) On a déjà mentionné la convergence de $\sum_{n \geq 1} f_n$. La série entière $\sum_{n \geq 1} f_n t^n$ converge donc normalement sur $[0, 1[$, et donc par le théorème de la double limite

$$F(t) = 1 - \sqrt{1-t^2} \xrightarrow[t \rightarrow 1-]{+\infty} \sum_{n=1}^{+\infty} f_n$$

Donc $\sum_{n=1}^{+\infty} f_n = 1$.

La variable aléatoire T est presque sûrement à valeurs dans $\mathbf{N}$ et donc $(S_n)_{n \in \mathbf{N}^*}$ s'annule presque sûrement.

Exercice 2

Pour tout entier n supérieur ou égal à 2 on pose $x_n = n^{-1} \sqrt{\frac{1}{n-1}}$. Notons que comme $n \geq 2$,

$$0 < x_n < 1.$$

1. CAS PAIR

Comme $P' - n = nX^{n-1} - 1$ on a le tableau de variations suivant

x	$-\infty$	x_n	$+\infty$
$P'_n(x)$	+	0	+
$P_n(x)$	$+\infty$	$P_n(x_n)$	$+\infty$

Or $nx_n^{n-1} = 1$ donc $P_n(x_n) = \frac{1}{n}x_n - x_n + 1 = 1 - \left(1 - \frac{1}{n}\right)x_n > 1 - 1 \times 1 = 0$.

Le polynôme P_n n'a pas de racine réelle.

2. CAS IMPAIR

Par parité de $n-1$, on obtient le tableau de variations

x	$-\infty$	$-x_n$	x_n	$+\infty$	
$P'_n(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$P_n(x)$	$-\infty$				$+\infty$

On a, comme dans le cas n pair, $P_n(x_n) > 0$, par ailleurs la restriction du polynôme P_n à $] -\infty, -x_n]$ est **continue** sur cet **intervalle** et **strictement croissant** donc par le théorème de la bijection monotone réalise une bijection sur $] -\infty, P_n(-x_n)]$. Conclusions : P_n admet une et une seule racine réelle.

Notons que $P_n(-1) = 1 > 0$ et $P_n(-2) = (-2)^{n+2} + 1 = -2^n + 3 \leq -2^3 + 3 = -5 < 0$. Donc la racine de P_n est élément de $] -2, -1[$.

3. Par définition de z_n , pour tout entier $n \geq 1$

$$(-z_n)^{2n+1} = -(z_n)^{2n+1} = -z_n + 1,$$

en passant au logarithme ($-z_n$ est positif) on a :

$$\ln(-z_n) = \frac{1}{2n+1} \ln(-z_n + 1), \quad (1)$$

mais $z_n \in] -2, -1[$ donc

$$0 \leq \ln(-z_n) \leq \frac{\ln(3)}{2n+1}.$$

Donc par encadrement, $\ln(-z_n) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$, et donc, par continuité de l'exponentielle :

$$\underline{z_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} -1}$$

Il en résulte que $h_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$. Donc que :

$$\ln(-z_n) = \ln(1 + h_n) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} h_n.$$

comme d'après le premier point $\frac{1}{2n+1} \ln(-z_n + 1) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{\ln(2)}{2n+1}$, par (1) on a :

$$\underline{h_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{\ln(2)}{2n+1}}.$$

On a le développement asymptotique : $z_n = -1 - \frac{\ln(2)}{2n+1} + o_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{n} \right)$.

4. Soit $z \in \mathbf{C}$. On a $P'_n(z) = 0$ si et seulement si : $z^{n-1} = \frac{1}{n} = x_n^{n-1}$ soit encore, si et seulement si $\frac{z}{x_n} \in \mathbf{U}_{n-1}$. Or $\mathbf{U}_{n-1} = \{\omega^k, k = 0, \dots, n-2\}$, donc l'ensemble des racines de P'_n est :

$$\underline{\{x_n \omega^k, k = 0, \dots, n-2\}}$$

Pour $k = 0, 1, \dots, n-2$,

$$P_n(x_n \omega^k) = x_n^n \omega^{kn} - x_n \omega^k + 1 = x_n x_n^{n-1} \omega^{k(n-1)+k} - x_n \omega^k + 1 = 1 - \left(1 - \frac{1}{n}\right) x_n \omega^k,$$

or

$$\left| \left(1 - \frac{1}{n}\right) x_n \omega^k \right| = \left(1 - \frac{1}{n}\right) |x_n| < 1 \times 1 = 1,$$

donc $P_n(x_n \omega^k) \neq 0$.

Donc les n racines complexes de P_n sont simples.

5. Notons, E_i pour $i = 1, 2, 3$, le i^e vecteur de la base canonique de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbf{C})$ et $C = E_1 + E_2 + E_3$.

On note r_1, r_2, r_3 les trois racines de P_3 et l'on pose :

$$\Delta = \det(C + r_1 E_1 \mid C + r_2 E_2 \mid C + r_3 E_3).$$

En utilisant la linéarité par rapport au trois colonnes, Δ s'exprime comme la somme de 2^3 déterminants, parmi ceux-ci tout déterminant ayant deux colonnes C est nul, si bien que :

$$\begin{aligned} \Delta = & r_1 r_2 r_3 \det(E_1 \mid E_2 \mid E_3) + \\ & r_1 r_2 \det(E_1 \mid E_2 \mid C) + r_1 r_3 \det(E_1 \mid C \mid E_3) + r_2 r_3 \det(C \mid E_2 \mid E_3) \end{aligned}$$

Or par linéarité par rapport à la troisième colonne, et toujours le caractère alterné du déterminant,

$$\det(E_1 \mid E_2 \mid C) = \det(E_1 \mid E_2 \mid E_1 + E_2 + E_3) = 0 + 0 + \det(E_1 \mid E_2 \mid E_3) = 1$$

et de même $\det(E_1 \mid C \mid E_3) = 1$, $\det(C \mid E_2 \mid E_3) = 1$. Donc

$$\Delta = r_1 r_2 r_3 + (r_1 r_2 + r_1 r_3 + r_2 r_3) = (-1) + (-1) = \underline{-2},$$

grâce aux relations coefficients/racines pour le polynôme unitaire P_n .

6. Notons E_i le i^e vecteur de la base canonique de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{C})$ et $C = E_1 + E_2 + E_3$.

En raisonnant comme dans la question précédente,

$$\begin{aligned} \Delta_n = & \prod_{i=1}^n r_i \det(E_1 \mid \cdots \mid E_n) + \\ & \sum_{j=1}^n \prod_{\substack{1 \leq i \leq n \\ i \neq j}} r_i \det(E_1 \mid \cdots \mid E_{j-1} \mid C \mid E_{j+1} \mid \cdots \mid E_n) \\ = & \prod_{i=1}^n r_i + \sum_{j=1}^n \prod_{\substack{1 \leq i \leq n \\ i \neq j}} r_i \det(E_1 \mid \cdots \mid E_{j-1} \mid E_j \mid E_{j+1} \mid \cdots \mid E_n) \\ = & \prod_{i=1}^n r_i + \sum_{j=1}^n \prod_{\substack{1 \leq i \leq n \\ i \neq j}} r_i. \\ = & (-1)^n \times 1 + (-1)^{n-1} \times (-1) = \underline{(-1)^n 2}. \end{aligned}$$