# DM n°4

**Chaînes de Markov**

Dans tout le sujet $n$ est un entier supérieure ou égal à 2.
On étudie une suite $(S_k)_{k\in\mathbf{N}}$ de variables aléatoires définies sur un même espace probabilisé et à valeurs dans l'ensemble $[\![1,p]\!]$. On suppose que pour tout $k\in\mathbf{N}$, la probabilité que $S_{k+1}$ prenne une valeur $j$ ne dépend que de la valeur de $S_k$, (On dit que ≪ l'avenir ne dépend que du présent et non du passé ≫). Précisément on suppose l'existence d'une matrice $T$ élément de $\mathcal{M}_n(\mathbf{K})$ (appelée matrice de transition) telle que pour tout couple $(i,j)$ d'éléments de $[\![1,n]\!]$ :

$$\forall k\in\mathbf{N},\, \mathbf{P}(S_{k+1}=i|S_k=j)=t_{i,j}.$$

On pose $A=T^\top$ et pour tout $k\in\mathbf{N}$ on note $X_k$ l'élément de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{R})$.

$$X_k=\begin{pmatrix}\mathbf{P}(S_k=1)\\ \vdots\\ \mathbf{P}(X_k)=n\end{pmatrix}.$$

## 1 Préliminaires

1. Justifier que pour tout entier naturel $k$,
$$X_{k+1}=TX_k.$$
2. Montrer que la somme des coefficients d'une ligne de la matrice $A$ est 1. En déduire que 1 est valeur propre de $T$.

   Dans la suite on dit qu'un élément $M$ de $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ est une **matrice stochastique** si :
   i. les coefficients de $M$ sont positifs ;
   ii. la sommes des coefficients de toute ligne de $M$ vaut 1.

   La matrice $A$ est donc stochastique. Le sous-ensemble de $\mathcal{M}_n(\mathbf{K})$ constitué des matrices stochastiques sera noté $\mathcal{E}$.
   Nous dirons aussi qu'une matrice ligne $L=(\lambda_1,\dots,\lambda_n)$ élément de $\mathcal{M}_{1,n}(\mathbf{R})$ est **stochastique** lorsque ses coefficients $\lambda_i$ sont tous positifs ou nuls, et de somme égale à 1.
3. Montrer que l'ensemble $\mathcal{E}$ est une partie fermée et convexe de l'espace vectoriel $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$.
4. Montrer que $\mathcal{E}$ est stable par produit.
   *on pourra utiliser le vecteur colonne $U$, dont tous les $n$ coefficients sont égaux* à 1.

## 2 Un exemple

Une société de location de voitures possède trois agences, une à Rennes, une à Lyon, une à Marseille. Lorsqu'un client loue une voiture, un jour donné, dans une des trois villes, il la restitue le jour même dans une des trois agences. On suppose qu'une voiture donnée n'est louée qu'une seule fois dans la journée.
Une étude statistique a permis de montrer que, pour une voiture donnée :

- si elle est louée à Rennes un certain jour, alors elle est laissée le soir à Lyon avec la probabilité $\frac{1}{4}$, tandis qu'elle est laissée à Marseille avec la probabilité $\frac{3}{4}$ ;
- si elle est louée à Lyon, alors elle est laissée à Rennes avec la probabilité $\frac{1}{2}$, laissée à Marseille avec la probabilité $\frac{1}{4}$, et ramenée à Lyon avec la probabilité $\frac{1}{4}$ ;
- si elle est louée à Marseille, elle est laissée à Rennes avec la probabilité $\frac{1}{2}$, laissée à Lyon avec la probabilité $\frac{1}{4}$, et ramenée à Marseille avec la probabilité $\frac{1}{4}$.

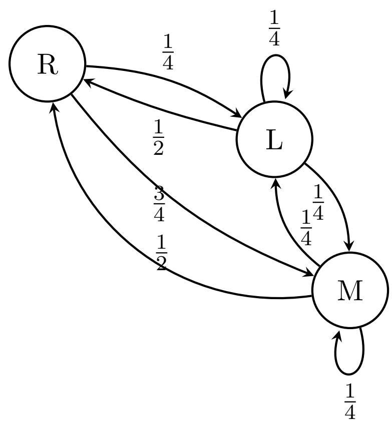


FIGURE 1 – Graphe de la transition d'un jour à l'autre

Pour tout élément $k$ de $\mathbf{N}$, on définit la variable aléatoire $S_k$ qui vaut 1 si la voiture le matin du jour $k$ est à Rennes, 2 si elle est à Lyon, 3 si elle est à Marseille, et on introduit la matrice colonne

$$X_k = \begin{pmatrix} \mathbf{P}(S_k = 1) \\ \mathbf{P}(S_k = 2) \\ \mathbf{P}(S_k = 3) \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbf{R})$$

5. Expliciter la matrice $T$ de transition.
6. On pose $U^* = \frac{1}{12}\begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix}$. On suppose dans cette question que que $X_0 = U^*$.
7. Montrer qu'alors la probabilité que la voiture soit dans une des trois villes donnée est la même tous les jours.
8. Est-ce que les variables aléatoires $S_0$ et $S_1$ sont indépendantes ?
9. Déterminer la dimension de $E_1(T)$.
10. En examinant le rang de $B$ déterminer le spectre $\{1, \lambda, \mu\}$ de $B$, on vérifiera que $\lambda \neq \mu$. Montrer que $B$ est diagonalisable.
11. Montrer que les sous-espaces propres de $B$ associés aux valeurs propres de $B$ autres que 1, sont dans l'hyperplan $H$ de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbf{R})$ d'équation :

$$x + y + z = 0.$$

    *On évitera de déterminer les espaces propres et on reviendra à la définition d'un vecteur propre*
12. On note $V$ et $W$ des vecteurs propres associés respectivement à $\lambda$ et $\mu$. On pose $Q = (U^*|V|W)$ et $D = \operatorname{diag}(1, \lambda, \mu)$.
13. Montrer que $(U^*, V, W)$ est une base de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbf{R})$, vérifier que la première coordonnée de $U_0$ dans cette base est 1.

    Pour tout entier $n \geq 0$, exprimez le vecteur $U_n$ au moyen de $Q$, $U_0$ et $D$.
14. Étudier le limite de $X_n$ lorsque $n$ tend vers $+\infty$.

    *On évitera de calculer $X_n$.*

## 3 Matrice stochastiques

On identifiera les élément de $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ est les endomorphismes de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{R})$ canoniquement associés. Soit $A$ l'élément de $\mathcal{E}$ défini en début de sujet.

15. Montrer que pour tout $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{R})$,

$$\|AX\|_\infty \leq \|X\|_\infty.$$

Pour tout $k$ entier naturel non nul, on pose

$$R_k = \frac{1}{k}\sum_{l=0}^{k-1} A^l$$

16. Montrer que, pour tout $k \in \mathbf{N}^*$, la matrice $R_k$ est stochastique.
17. Montrer que $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{R}) = \mathrm{Ker}(A - I_n) \oplus \mathrm{Im}(A - I_n)$.
*On pourra étudier l'existence de la limite de $(R_kX)_{k\in\mathbf{N}}$ pour $X$ élément de $\mathrm{Ker}(A - I_n)$ puis de $\mathrm{Im}(A - I_n)$.*
18. Montrer que la suite $(R_k)_{k\in\mathbf{N}}$ converge vers $P$, matrice de la projection sur $\mathrm{Ker}(A - I_n)$ selon $\mathrm{Im}(A - I_n)$.
*On pourra étudier la limite de $(E_i^\top R_k E_j)_{k\in\mathbf{N}}$, où $E_k$ est le $k^e$ vecteur de la base canonique de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{R})$.*
19. Montrer que $P$ est stocastique.
On suppose dans la suite qu'il existe un entier naturel non nul $p$ tel que $A^p$ ait **tous ses coefficients strictement positifs.**
20. Montrer que $\mathrm{Ker}(A^p - I_n)$ est de dimension 1.
21. En déduire que que $P$ est de rang 1 et que son image est dirigée par $U$, rappelons que $U = (1, 1, ..., 1)^\top$.
22. En déduire que l'on peut écrire $P = UL$, où $L$ est un élément de $\mathcal{M}_{1,n}(\mathbf{R})$ stochastique.
23. Montrer que $PA = P$. En déduire que $L$ est la seule matrice ligne stochastique vérifiant $LA = L$.
24. Montrer que les coefficients de la matrice ligne $L$ sont tous strictement positifs.
25. Montrer que le réel 1 est valeur propre simple de $A$.

## 4 Application à l'exemple

On approfondit l'étude commencée dans la partie **2** en exploitant les résultats de la partie **3**.

Un calcul qui n'est pas demandé montre que pour cet exemple les coefficients de la matrice $A^2$ sont tous strictement positifs.

26. Expliciter la limite $P$ de la suite de matrices $(R_k)_{k\in\mathbf{N}^*}$ définie en (2).
27. Montrer qu'il existe une unique loi de probabilité sur l'ensemble $[\![1, 3]\!]$ telle que, si a variable aléatoire $S_0$ suit cette loi, alors les variables $S_k$ suivent toutes la même loi (autrement dit, telle la présence dela voiture dans une des trois villes soit la même tous les matins).

# Indications pour le DM n°2

**Marche aléatoire dans un labyrinthe**

## 5 Préliminaires

## 6 Un exemple

## 7 Matrice stochastiques

10. Immédiat.
11. Résulte de la convexité de $\mathcal{E}$, ou « à la main ».
12. En regardant la limite de $R_k X$ dans les deux cas $X \in \mathrm{Ker}(A - I)$ et $X \in \mathrm{Im}(A - I)$ on a que la somme est directe, la supplémentarité découle de la formule du rang.

13 La question 12 donne $R_k X \underset{k\to+\infty}{\to} PX$ pour tout $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{R})$. Jusrtifier alors que

$$R_k[i,j] = E_i^\top R_k E_j \underset{k\to+\infty}{\to} E_i^\top P E_j = P[i,j]$$

pour conclure

14. Résulte du caractère fermé de $\mathcal{E}$
15. Notons $B = A^p = (b_{i,j})$. $B$ est une matrice stochastique (question 12) à coefficients $> 0$. Soit $X \in \mathrm{Ker}(B - I_n)$ et $s$ un indice tel que $x_s$ soit le maximum des $x_i$. On a $BX = X$ et, en regardant le coefficient d'indice $s$ de cet élément de $\mathbf{R}^n$,

$$x_s = \sum_{j=1}^{n} b_{i,j} x_j \leq x_s \sum_{j=1}^{n} b_{i,j} = x_s$$

(on a utilisé la positivité des $b_{i,j}$ pour dire que $b_{i,j} x_j \leq b_{i,j} x_s$). Le résultat en découle

16 On sait déjà que $\mathrm{Vect}(U) \subset \mathrm{Ker}(A - I_n)$ car $A$ est stochastique. Pour l'autre inclusion comparer $\mathrm{Ker}(A - I_n)$ et $\mathrm{Ker}(A^p - I_n)$.

17. Toutes les colonnes de $P$ sont ainsi multiples de $U$...

$$P = UL \text{ avec } L \text{ matrice ligne stochastique car } P \text{ l'est....}$$

18 Remarquons que

$$R_k A = ...\frac{k+1}{k} R_{k+1} - \frac{1}{k} I_n$$

En faisant tendre $k$ vers $+\infty$, on obtient

$$PA = P$$

$P$ est une matrice dont toutes les lignes sont égale à $L$. $PA$ est ainsi une matrice dont toutes les lignes sont $LA$. L'égalité $PA = P$ donne ainsi $LA = L$.

Reste à transposé $YA = A$ et utiliser que $A^\top - I_n$ est de rang $n - 1$...

19. On montre que $LA^p = L$. Si, par l'absurde, on avait $L_i = 0$ alors en regardant le $i^{\text{e}}$ coefficient de $LA^p = L$, on aurait une contradiction

20. On sait que $\mathrm{Ker}(A-I_n)\oplus\mathrm{Im}(A-I_n)=\mathbf{R}^n$. Les espaces $F=\mathrm{Ker}(A-I_n)$ et $G=\mathrm{Im}(A-I_n)$ sont stables par l'endomorphisme canoniquement associé à $A$. En notant $u_F\in\mathcal{L}(F)$ et $u_G\in\mathcal{L}(G)$ les endomorphismes induits, comme $F\oplus G=\mathbf{R}^n$,

$$\chi_u=\chi_{u_F}\chi_{u_G}$$

$F$ est de dimension 1 et $u_F=\mathrm{Id}_F$ donc $\chi_{u_F}=(X-1)$. Comme $F\cap G=\{0\}$, $u_G-\mathrm{Id}_G$ est inversible et 1 n'est pas racine de $\chi_{u_G}$. De tout cela, on déduit que 1 est racine simple de $\chi_u$, c'est- à-dire :

1 est valeur propre simple de $A$.