Travaux dirigés n° 1

I. Matrices et endomorphismes nilpotents

Soit n un entier strictement positif et M une matrice d'ordre n à coefficients dans un sous-corps $\mathbf{K}$ de $\mathbf{C}$. Nous dirons que M est nilpotente si, par définition, il existe un entier strictement positif, k, tel que : $M^k = 0_n$. Quand M est nilpotente, on appelle ordre de nilpotence de M le plus petit élément de l'ensemble des entiers strictement positif k , tels que $M^k = 0_n$.

Soit $\mathbf{E}$ un espace vectoriel sur $\mathbf{K}$ de dimension n, et u un endomorphisme de $\mathbf{E}$. Nous dirons que u est nilpotente si, par définition, il existe un entier strictement positif, k, tel que : $u^k = 0_{\mathcal{L}(\mathbf{E})}$. Quand u est nilpotente on appelle ordre de nilpotence de u le plus petit élément de l'ensemble des entiers strictement positifs k, tels que $u^k = 0_{\mathcal{L}(\mathbf{E})}$.

1. Montrer que si M est la matrice de u dans une base de $\mathbf{E}$, alors M est nilpotente d'ordre p si et seulement si u est nipotent d'ordre p.
2. Nous supposons dans cette question que u est de rang 1, montrer que u est diagonalisable ou bien est nilpotent.
3. Pour tout entier naturel i on pose $N_i = \mathrm{Ker}(u^i)$ et $I_i = \mathrm{Im}(u^i)$.
   (a) Montrer que les suites $(N_i)_{i\in\mathbf{N}}$ et $(I_i)_{i\in\mathbf{N}}$ sont monotones, pour l'inclusion, on précisera leur monotonie.
   (b) Montrer qu'il existe un entier naturel j tel que $N_j = N_{j+1}$. Montre alors que pour tout entier $i \geq j$, $N_i = N_{i+1}$ et $I_i = I_{i+1}$.
   (c) Soit j un entier naturel non nul. Montrer que $N_j = N_{j+1}$ si et seulement si $N_j \oplus I_j = \mathbf{E}$.
   (d) On suppose u nilpotent d'ordre p. On note j_0 le plus petit entier j tel que $N_j = N_{j+1}$, que vaut j_0 et N_{j_0}.
4. Montrer que si M est triangulaire supérieure stricte alors elle est nilpotente. Donner une matrice nilpotente qui n'est ni triangulaire supérieure stricte ni triangulaire inférieure stricte.
5. Nous supposons que M est nilpotent d'ordre n (n désigne toujours la dimension de $\mathbf{E}$).

   Montrer que M est semblable à la matrice $\begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 1 & 0 & \ddots & & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.
6. Montrer que l'élément de $\mathcal{M}_4(\mathbf{R})$,

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

   est nilpotent d'ordre 2. Déterminer une autre élément de $\mathcal{M}_4(\mathbf{R})$, nilpotent d'ordre 2, non semblable au précédent.

La fin du I est réservée à un public averti

Notons pour tout entier $k \geq 1$, J_k l'élément [1] de $\mathcal{M}_k(\mathbf{K})$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 1 & 0 & \ddots & & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

et convenons que $J_1 = O_1$.

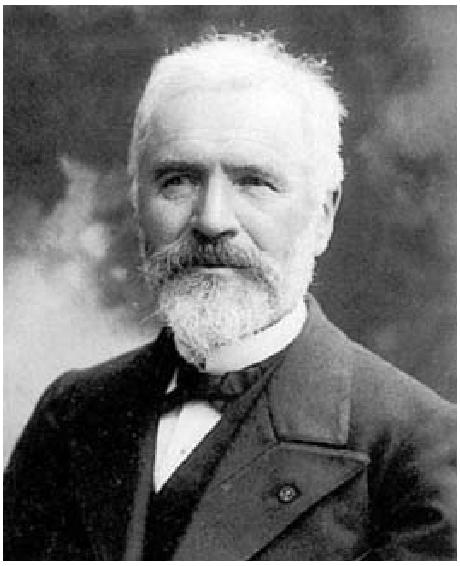

FIGURE 1 – CAMILLE JORDAN 1838–1922.
Professeur à l'École polytechnique puis au Collège de France ; on lui doit en autre la forme réduite des matrices qui porte son nom ainsi que la notion d'arc réctifiable.

Nous supposons que M est nilpotente d'ordre $p \geq 2$. On prend $E = \mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{K})$ et l'on note u l'endomorphisme de $\mathbf{E}$ canoniquement associé à M. Par r nous désignerons le rang de M.

7. Montrer que $p \leq n$.
8. CAS $p = 2$
   On suppose dans cette question que $p = 2$.
   (a) Montrer que $2r \leq n$.
   (b) Montrer que M est semblable à la matrice $\text{dig}(\underbrace{J_2, J_2, ...J_2}_{r \text{ termes}}, 0_{n-2r})$
9. FORME DE JORDAN DES MATRICES NILPOTENTES
   On revient au cas général.
   (a) Montrer que $\text{Im}(u)$ est stable par u et que l'endomorphisme induit par u sur $\text{Im}(u)$ est nilpotent d'ordre p' à déterminer.
   (b) Montrer qu'il existe un entier naturel $k \geq 1$, un élément $(\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_k)$ de $(\mathbf{N}^*)^k$ vérifiant :

$$\alpha_1 \leq \alpha_2 \leq ... \leq \alpha_k, \quad \text{et } \alpha_1 + \alpha_2 + ... + \alpha_k = n,$$

1. Le J est en l'honneur de Camille Jordan (1838–1922), et cette notation ne doit pas être confondue avec celle du cours J_r pour l'élément de $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$, $\text{diag}(I_r, O_{n-r})$

tel que M soit semblable à la matrice

$$\mathrm{diag}(J_{\alpha_1}, J_{\alpha_2}, ..., J_{\alpha_k}).$$

Indication : raisonner par récurence sur l'ordre de nilpotence de u.

10. UNICITÉ DE LA FORME DE JORDAN
    (a) Déterminer pout tout entier $j \geq 2$ et tout entier $\alpha \geq 1$ déterminer de ${J_\alpha}^j$. En déduire la valeur de α_1.
    (b) On suppose qu'il existe un entier naturel $h \geq 1$, un élément $(\beta_1, \beta_2, ..., \beta_h)$ de $(\mathbf{N}^*)^h$ vérifiant :
    $$\beta_1 \leq \beta_2 \leq ... \leq \beta_h, \quad \text{et } \beta_1 + \beta_2 + ... + \beta_h = n,$$
    tel que M soit semblable à la matrice
    $$\mathrm{diag}(J_{\beta_1}, J_{\beta_2}, ..., J_{\beta_h}).$$
    Montrer que $h = k$ puis que $(\beta_1, \beta_2, ..., \beta_h) = (\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_k)$.
    Indication : étudier successivement le rang de $M^0, M^1, \ldots, M^{p-1}$
11. Montrer que M, $2M$ et ${}^{\mathrm{t}}M$ sont semblables.

Nous reprendrons cette étude dans un prochain T.D. en vue d'établir la réduction de Jordan d'une matrice quelconque

II. Matrices semblables

1. Les matrices suivantes, éléments de $\mathcal{M}_3(\mathbf{R})$ sont-elles semblables ?
$$A := \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ -2 & 0 & 2 \\ -3 & 4 & -1 \end{pmatrix}, \quad B := \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -2 & 0 & 1 \\ 1 & -3 & 2 \end{pmatrix}.$$
2. Même question pour
$$C := \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & -1 \end{pmatrix}, \quad D := \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -2 & 0 & 1 \\ 1 & -3 & 0 \end{pmatrix}.$$
3. Même question pour les éléments de $\mathcal{M}_4(\mathbf{R})$:
$$E := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad F := \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$
4. Même question pour les éléments de $\mathcal{M}_3(\mathbf{R})$:
$$G := \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}, \quad H := \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$
   G et H sont-elles semblables ?
5. Montrer que E est semblable à sa transposée.

III. Equivalence à J_r

1. Montrer que tout hyperplan de $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ rencontre $\mathrm{GL}_n(\mathbf{R})$.
2. Pour tout couple (A,B) d'éléments de $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ on note

$$P_{A,B}\ :\ \mathbf{R}\to\mathbf{R}\,;\ \lambda\mapsto \det(B+\lambda A).$$

   (a) Montrer que pour tout couple (A,B) d'éléments de $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$, $P_{A,B}$ est une application polynomiale.
   (b) Soit $A\in\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$. Montrer que $\mathrm{rg}(A)=\max\{\deg P_{A,B}|B\in\mathcal{M}_n(\mathbf{R})\}$.
   (c) Montrer qu'un endomorphisme de $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ qui conserve le déterminant conserve le rang.

IV. Espace vectoriel de matrices nilpotentes, pour 5/2
Soit $n\in\mathbf{N}^*$.

1. Déterminer les éléments nilpotents de $\mathcal{S}_n(\mathbf{R})$.
2. Déterminer la plus grande dimension d'un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ ne contenant que des matrices nilpotentes.
3. Déterminer la plus grande dimension d'un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ ne contenant que des matrices diagonalisables.

V. Sous-espace vectoriel de matrices
Par n on désigne un entier naturel non nul. Les éléments de $\mathbf{R}^n$ seront notés en colonne.
On s'intéresse aux sous-espaces vectoriels $\mathbf{F}$ de $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ tels que $\mathbf{F}\setminus\{O_n\}$ soit inclus dans $\mathrm{GL}_n(\mathbf{R})$.

1. On suppose dans cette question et seulement dans cette question que $n=2$. Exhiber un sous-espace vectoriel $\mathbf{F}$ de $\mathcal{M}_2(\mathbf{R})$ de dimension 2 tels que $\mathbf{F}\setminus\{O_2\}$ soit inclus dans $\mathrm{GL}_2(\mathbf{R})$.

   Dans toute la suite $\mathbf{F}$ désigne un sous-espaces vectoriels de $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ tels que $\mathbf{F}\setminus\{O_n\}$ soit inclus dans $\mathrm{GL}_n(\mathbf{R})$.
2. (a) En considérant

$$\phi\ :\ \mathbf{F}\to\mathbf{R}^n\,;\ M\mapsto MX_0,$$

   où X_0 est un élément non nul de $\mathbf{R}^n$, montrer que $\dim(\mathbf{F})\leq n$.
   (b) Retrouver ce résultat en considérant l'ensemble $\mathbf{H}$ des éléments de $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ dont la première colonne est nulle.
3. (**5/2 très provisoirement...**) On suppose que n est impaire. Montrer que $\dim\mathbf{F}\leq 1$.

⋆ ⋆
⋆

VI. Conjugaisons isométriques pour la norme de Frobenius
Par n sera désigné un entier naturel supérieur ou égal à 2.

1. Montrer que l'application

$$\Phi\ :\ \mathcal{M}_n(\mathbf{R})\to\mathbf{R}\,;\ M\mapsto\sqrt{\mathrm{Tr}({}^{\mathrm{t}}M\,M)}$$

   est une norme.
2. Soient i et j des éléments de $\{1,...,n\}$ et $A\in\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$. Calculer $E_{i,j}A$ et $AE_{i,j}$.
3. Déterminer les éléments P de $\mathrm{GL}_n(\mathbf{R})$ tels que pour tout $M\in\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$,

$$\Phi(PMP^{-1})=\Phi(M).$$

Travaux dirigés n° 2

I. PRÉLUDE

Soient A un élément de $\mathbf{R}[X]$ et B un élément de $\mathbf{R}[X]$ de degré $n+1$, scindé à racines simples. Soit l'application φ de $\mathbf{R}[X]_n$ dans lui-même qui à un polynôme P, élément de $\mathbf{R}[X]_n$, associe le reste dans la division euclidienne de AP par B.

1. Montrer que φ est un endomorphisme.
2. Déterminer les valeurs propres et les espaces propres de φ.

II. MATRICES COMPAGNONS

Nous allons étudier des matrices d'une forme particulière qui jouent, comme nous le verrons, un rôle important en mathématiques. Nous verrons leur utilisation dans une preuve du théorème de Cayley-Hamilton. Elles se rencontrent également dans l'étude des équations différentielles linéaire d'ordre n à coefficients constants.

Par $\mathbf{K}$ on désigne indifféremment le corps des nombres complexes ou celui des nombres réels. Soient n un réel supérieur ou égal à 2 et $a_0, a_1, \ldots a_{n-1}$ des éléments du corps $\mathbf{K}$. On désigne par A l'élément de $\mathcal{M}_n(\mathbf{K})$ suivant

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \ldots & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & 1 & 0 \\ 0 & \ldots & \ldots & \ldots & 0 & 1 \\ a_0 & a_1 & \ldots & \ldots & a_{n-2} & a_{n-1} \end{pmatrix}.$$

1. Calculer le polynôme caractéristique de la matrice A.
2. Soit λ une valeur propre de A. Déterminer E_λ l'espace propre associé.
3. On suppose ue $\mathbf{K} = \mathbf{C}$. Montrer que la matrice A est diagonalisable si et seulement si toutes ses valeurs propres sont d'ordre de multiplicité 1.
4. APPLICATION AUX SUITES À RÉCURRENCE LINÉAIRE. Soit l'ensemble

$$S = \left\{ u \in \mathbf{C}^{\mathbf{N}} | \forall k \in \mathbf{N}; u_{k+n} + a_{n-1}u_{k+n-1} + ... + a_1 u_{k+1} + a_0 u_k = 0 \right\}.$$

Soit $u \in \mathbf{C}^N$. On pose U la suite à valeurs dans $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{C})$ dont le terme d'indice k est $(u_k, u_{k+1}, ..., u_{k+n-1})^\top$.

(a) Donner une condition nécessaire et suffisante portant sur U pour que u soit élément de S.

(b) On suppose A diagonalisable. Déterminer S. Montrer que S est un sous-espace vectoriel de $\mathbf{C}^{\mathbf{N}}$ dont on précisera la dimension et dont on fournira un base.

III. Théorème de Kronecker (5/2)

Les 3/2 admettront le résultat suivant qui sera vu très prochainement. Si le spectre d'un élément M de $\mathcal{M}_n(\mathbf{C})$ est $\{\lambda_1, \lambda_2, ...\lambda_p\}$, alors celui de M^k est, pour tout entier $k \geq 0$, $\{\lambda_1^k, \lambda_2, ..., \lambda_p^k\}$. Il le vérifierons pour une matrice diagonalisable cependant.

1. Soient z_1, z_2,...,z_n des nombres complexes, et P le polynôme
$$P = (X - z_1)(X - z_2) \dots (X - z_n)$$
On suppose que P est à coefficients entier. Soit un entier $q \geq 2$. Montrer que
$$Q = (X - z_1^q)(X - z_2^q) \dots (X - z_n^q).$$
est à coefficients entiers.

On se propose de montrer le théorème de Kronecker : *Soit P un polynôme unitaire de $\mathbf{Z}[X]$ dont les racines complexes sont toutes de module inférieur ou égal à 1. on suppose de plus que $P(0) \neq 0$. Montrer que toutes les racines de P sont des racines de l'unité.*

2. Exprimer les coefficients de P au moyen de ses racines.
3. Montrer que l'ensemble de tels polynômes est fini.
4. On note z_1, z_2,...z_n les racines de P. Montrer que
$$(X - z_1^k)(X - z_2^k)...(X - z_n^k)$$
vérifie pour tout $k \in \mathbf{N}^*$, les propriétés de P.
5. Montrer que toutes les racines de P sont des racines de l'unité.

IV. ENDOMORPHISME DE $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$

Soit A un élément de $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$.
Soit l'application
$$\Phi_A \ : \mathcal{M}_n(\mathbf{C}) \to \mathcal{M}_n(\mathbf{C})\,;\ M \mapsto AM.$$

1. Montrer que Φ_A est un endomorphisme.
2. Donner le rang de Φ_A en fonction de celui de A.
3. En déduire que Φ_A est diagonalisable si et seulement si A l'est.
4. (5/2) Retrouver ce résultat grâce au cours sur les polynômes d'endomorphisme.
5. Donner la trace de Φ_A.
6. Donner χ_{Φ_A}.

Soient A et B des éléments de $\mathcal{M}_n(\mathbf{C})$. On se propose de montrer que l'équation d'inconnue X,
$$AX - XB = Y \tag{1}$$
admet une solution dans $\mathcal{M}_n(\mathbf{C})$, quel que soit l'élément Y de $\mathcal{M}_n(\mathbf{C})$, dans $\mathcal{M}_n(\mathbf{C})$ si et seulement si A et B n'ont pas de valeurs propre commune.

7. On suppose A et B sans valeur propre commune. On considère l'endomorphisme de $\mathcal{M}_n(\mathbf{C})$,
$$\Phi \ : \ X \mapsto AX - XB.$$
   (a) Montrer que $\chi_A(B)$ et $\chi_B(A)$ sont inverisbles.
   (b) Soit Z un élément du noyau de Φ. Montrer que $\chi_B(A)Z = Z\chi_B(B)$. En déduire que Φ est injectif.
   (c) Montrer que pour tout $Y \in \mathcal{M}_n(\mathbf{C})$l'équation (1) admet une solution.
8. On suppose que A et B ont une valeur propre λ en commun. Et soit X_1 (resp. X_2) un vecteur propre de A (resp. B) associé à λ.

(a) En considérant $M = X_1 X_2^\top$ montrer que le noyau de Φ est non nul.

(b) Montrer qu'il existe des éléments $Y \in \mathcal{M}_n(\mathbf{C})$ tels que l'équation (1) n'admette pas de solution.

9. Conclure.

Par A on désigne toujours un élément de $\mathcal{M}_n(\mathbf{C})$. On considère l'endomorphisme de $\mathcal{M}_n(\mathbf{C})$,

$$\Psi_A \; : \; X \mapsto AXA.$$

10. Montrer que Ψ_A est diagonalisable si et seulement si A est diagonalisable.

11. En supposant A réelle, montrer que l'endomorphisme de $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ induit par Ψ_A est une isométie pour la norme euclidienne canonique, si et seulement si A est orthogonale.

VI. MÉTHODE DES PUISSANCES POUR LE CALCUL DE VALEURS PROPRES

Par n on désigne un entier supérieur ou égal à 2. Les éléments de $\mathbf{R}^n$ sont notés en colonne. et $\mathbf{R}^n$ est muni de la norme euclidienne canonique, notée $\|\cdot\|$.

Soit M un élément de $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ ayant n valeurs propres réelles distinctes λ_1, λ_2,...,λ_n non nulles dont les modules sont classés dans l'ordre inverse :

$$0 < |\lambda_n| < |\lambda_{n-1}| < ... < |\lambda_2| < |\lambda_1|$$

Pour $i = 1, \ldots, n$ V_i désigne un vecteur propre unitaire associé à λ_i.
On se propose de calculer numériquement λ_1 et V_1
Soit A un élément de $\mathbf{R}^n$ qui n'est pas élément de vect$(V_2, V_3, ..., V_n)$ [2]

1. Montrer que $(V_1, V_2, ..., V_n)$ est une base de $\mathbf{R}^n$. On note a_i la i^{e} coordonnée de A dans la base $(V_1, V_2, ..., V_n)$, pour $i = 1, 2, ..., n$.
2. On définit les suites $(X_k)_{k\in\mathbf{N}}$ $(Y_k)_{k\in\mathbf{N}}$ et $(r_k)_{k\in\mathbf{N}}$ par :
   $X(0) = A$, $Y_0 = \frac{X_0}{\|X_0\|}$, $r_0 = {}^{\mathrm{t}}\, Y_0 M Y_0$ et pour tout entier $k \geq 1$,

$$\begin{cases} X_k = M(Y_{k-1}), \\ Y_k = \frac{X_k}{\|X_k\|}, \\ r(k) = {}^{\mathrm{t}}\, Y_k M Y_k. \end{cases}$$

   Exprimer Y_k, pour tout entier naturel k au moyen des a_i et de $\|X_1\|X_2\|...\|X_k\|$.
3. Etudier le comportement de Y_k lorsque k tend vers $+\infty$.
4. Montrer que r_k tend vers λ_1 lorsque k tend vers $+\infty$.

2. Il y a très peu de risque que A, choisi au hasard ne vérifie pas cette condition et les erreurs d'arrondie de tout manière sont ici une chance

VII. LEMME DE SCHUR (pour un public averti)

Notons $\mathcal{A} = \mathcal{M}_n(\mathbf{C})$ et $E = \mathbf{C}^n$. Soit G un sous-groupe fini de $\mathrm{GL}_n(\mathbf{C})$. Pour tout $B \in G$, on note $i(B)$l'application :

$$i(B) : \left\{ \begin{array}{l} \mathcal{M}_n(\mathbf{C}) \longrightarrow \mathcal{M}_n(\mathbf{C}) \\ M \longmapsto BMB^{-1} \end{array} \right.$$

Soit F un sous-espace vectoriel de E. On dit que F est **stable** par G si quels que soient $M \in G$, $X \in F$, on a $MX \in F$ et on dit que E est **irréductible** pour G si ses seuls sous-espaces stables par G sont E et $\{0_{\mathbf{E}}\}$.

1. Montrer que $i : B \longmapsto i(B)$ est un morphisme de groupes de G dans $\mathrm{GL}(\mathcal{M}_n(\mathbf{C}))$, et que i est injectif si et seulement si G ne contient pas d'homothéties autres que l'identité.

   On note $\widetilde{G}$ l'image par i de G et $\mathcal{M}_n(\mathbf{C})^{\widetilde{G}}$ l'ensemble des matrices $M \in \mathcal{A}$ telles que $i(B)(M) = M$ pour tout B dans G.
2. Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbf{C})^{\widetilde{G}}$. Démontrer que $\ker(M)$ et $\mathrm{im}(M)$ sont des sous-espaces stables par G.
3. On suppose que E est irréductible pour G. Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbf{C})^{\widetilde{G}}$; démontrer que M est soit nulle, soit inversible. En déduire que $\mathcal{M}_n(\mathbf{C})^{\widetilde{G}}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbf{C})$ de dimension 1.
4. Soient $M, N \in \mathcal{M}_n(\mathbf{C})$. On considère l'endomorphisme de $\mathcal{M}_n(\mathbf{C})$ suivant,
$$\Phi : X \longmapsto MXN$$
   Démontrer que $\mathrm{Tr}(\Phi) = \mathrm{Tr}(M)\mathrm{Tr}(N)$.
5. Soit $P = \dfrac{1}{|G|} \displaystyle\sum_{B \in G} B$.
   (a) Démontrer que $P^2 = P$. En déduire que P est diagonalisable.
   (b) On note E^G l'ensemble des éléments de $\mathbf{E}$ invariant par tout élément de G :
$$E^G = \{X \in \mathbf{E} | \forall M \in G, MX = X\}.$$
   Démontrer que $\mathrm{Im}(P) = E^G$ et en déduire que $\dim\left(E^G\right) = \frac{1}{|G|} \displaystyle\sum_{B \in G} \mathrm{tr} B$.
6. Démontrer que $\dim\left(\mathcal{M}_n(\mathbf{C})^{\widetilde{G}}\right) = \dfrac{1}{|G|} \displaystyle\sum_{B \in G} \mathrm{tr}\left(B^{-1}\right) \mathrm{tr}(B)$. On pourra considérer d'abord le cas où i est injectif.

⋆ ⋆
⋆

Travaux dirigés n° 4

Par $\mathbf{K}$ on désigne le corps des réels ou celui des complexes.

I. NORMES n_p SUR $\mathbf{K}^n$
Soient $(a_1, \ldots, a_n)$ et $(b_1, \ldots, b_n)$ des n-uplet de réels positifs.
Soient p et q des réels *conjugués*, c'est-à-dire tels que

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1.$$

1. Montrer que pour tout a et tout b réels positifs,

$$ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q} \text{ (inégalité de Young).}$$

Cette inégalité trouvera place dans le cours sur les fonctions convexes.

Pour $k \in \mathbf{R}_+^*$, on considère

$$\phi_k \ : \ \mathbf{R}_+ \to \mathbf{R}\,;\ t \mapsto \begin{cases} \exp(k\ln(t) & \text{si } t > 0, \\ 0 & \text{sinon,} \end{cases}$$

cette application est continue et pour tout réel $t \geq 0$, la quantité $\phi_k(t)$ sera noté simplement t^k.

2. Montrer que :

$$\sum_{i=1}^{n} a_i b_i \leq \left(\sum_{i=1}^{n} a_i^p\right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{i=1}^{n} b_i^q\right)^{\frac{1}{q}} \text{ (inégalité de Hölder).}$$

Que dire du cas $p = q = 2$?

3. En déduire que pour tout réel p strictement supérieurs à 1,

$$\left(\sum_{i=1}^{n} (a_i + b_i)^p\right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\sum_{i=1}^{n} a_i^p\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{i=1}^{n} b_i^p\right)^{\frac{1}{p}} \text{ (inégalité de Minkowski).}$$

4. Montrer qu'avec les notations du cours, n_p est une norme sur $\mathbf{K}^n$.
5. Montrer que pour tout élément $\vec{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ de $\mathbf{K}^n$,

$$\lim_{p + \infty} n_p(\vec{x}) = n_\infty(\vec{x}).$$

II. NORMES N_p SUR $\mathcal{C}^0([a, b], \mathbf{C})$ —
Soient p un réel strictement supérieur à 1, a et b des réels tels que $a < b$;

1. Montrer, qu'avec les notations du cours, N_p est une norme sur $\mathcal{C}^0\left([a, b], \mathbf{K}\right)$, en utilisant la partie I.3, pour prouver l'inégalité triangulaire.
2. Montrer l'inégalité triangulaire en reproduisant pour l'intégrale le raisonnement fait en I.1, I.2 et I.3.

3. Montrer que pour tout élément f de $\mathcal{C}^0([a,b],\mathbf{K})$,

$$\lim_{p+\infty} N_p(f) = N_\infty(f).$$

4. Soient f et g des éléments de $\mathcal{C}^0([a,b],\mathbf{K})$ et p et q des réels conjugués. Montrer que :

$$\left|\int_a^b f(t)g(t)\mathrm{d}t\right| \leq N_p(f)N_q(g).$$

5. (**5/2**)) Soient ϕ et f des applications de $[a,b]$ dans $\mathbf{R}$ continues. On supose ϕ à valeurs dans $\mathbf{R}_+^*$ et f à valeurs dans $\mathbf{R}_+$. On pose pour tout entier $n \geq 0$, $I_n = \int_{[a,b]} \phi f^n$.
   (a) Montrer que le suite $(\sqrt[n]{I_n})_{n\in\mathbf{N}}$ converge de limite à déterminer.
   (b) Montrer que le suite $\left(\frac{I_{n+1}}{I_n}\right)_{n\in\mathbf{N}}$ converge de limite à déterminer.

II. FONCTIONS HÖLDERIENNES —

Pour tout réel $\alpha > 0$, on notz E_α l'ensemble des fonctions f de $[0,1]$ dans $\mathbf{C}$ telles qu'il existe K, réel positif, tel que pour tout $(x,y) \in [0,1]^2$,

$$|f(x) - f(y)| \leq K|x-y|^\alpha.$$

Soit $\alpha \in \mathbf{R}_+^*$.

1. Montrer que E_α est un espace vectoriel.
2. Soit g un élément de E_α. Montrer que l'ensemble

$$\{k \in \mathbf{R}_+ | \forall (x,y) \in [0,1]^2, |f(x)-f(y)| \leq k|x-y|^\alpha.\}$$

   admet un plus petit élément noté $k_\alpha(f)$.
3. On supose que $\alpha > 1$. Déterminer $\mathbf{E}_\alpha$.

   Dans la suite $\alpha \in]0,1[$.
4. Vérifier que $\mathcal{C}^1([0,1],\mathbf{C}) \subset E_\alpha \subset \mathcal{C}^0([0,1],\mathbf{C})$.
5. Donner une fonction élément de $\mathbf{E}_\alpha$ qui n'est pas de classe $\mathcal{C}^1$.
6. Soit β un réel tel que $0 < \alpha < \beta < 1$. Comparer E_α et E_β.
7. Montrer que l'application :

$$H_\alpha \ : \ \mathbf{E}_\alpha \to \mathbf{R}_+ \ ; \ f \mapsto \|f\|_\infty + k_\alpha(f)$$

   est une norme. On la notera $\|\cdot\|_\alpha$
8. Soit $(f_n)_{n\in\mathbf{N}}$ une suite d'éléments de $\mathbf{E}_\alpha$ telle que pour tout $\varepsilon \in \mathbf{R}_+^*$ il existe $n_0 \in \mathbf{N}$ tel que :

$$\forall (p,q) \in [\![n_0, +\infty[\![, \|f_p - f_q\|_\alpha \leq \varepsilon. \text{ (suite de Cauchy)}.$$

   Montrer que $(f_n)_{n\in\mathbf{N}}$ converge vers un élément f de $\mathbf{E}_\alpha$ dans $(\mathbf{E}_\alpha, \|\cdot\|_\alpha)$.

Complément pour $\frac{5}{2}$ averti.

III Autour du Théorème de Baire

1. THÉORÈME DE BAIRE —
Soit $\mathbf{E}$ un espace vectoriel de dimension finie ; on désignera par $\|\cdot\|$ une norme sur $\mathbf{E}$. Soit $(U_n)_{n\in\mathbf{N}}$ une suite d'ouverts denses de $\mathbf{E}$. Montrer que $\bigcap_{n\in\mathbf{N}} U_n$ est dense.

   Commentaires :

   (a) *Une intersection dénombrable d'ouverts, (qui en général n'est pas ouverte) s'appelle un G_δ. Le théorème dit qu'une intersection dénombrable d'ouverts denses d'un espace vectoriel de dimension finie est un G_δ dense.*

   (b) *Le théorème de Baire bien que d'énoncé simple admet des conséquences très importantes en analyse. Nous donnerons quelques applications dans la suite*

2. Montre qu'un G_δ dense de $\mathbf{E}$ n'est pas dénombrable.

3. Soit $(F_n)_{n\in\mathbf{N}}$ une suite de fermés de $\mathbf{E}$ telle que $\bigcup_{n\in\mathbf{N}} F_n = \mathbf{E}$. Montrer que $\bigcup_{n\in\mathbf{N}} \overset{\circ}{F}_n$ est un ouvert dense.

   Indication : On poura montrer que le complémentaire de $\bigcup_{n\in\mathbf{N}} \overset{\circ}{F}_n$ est d'intérieur vide.

4. — CONTINUITÉ D'UNE DÉRIVÉE —

   (a) Soit (f_n) une suite d'applications de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$ continues, qui converge simplement vers une application f, c'est-à-dire que pour tout réel x la suite $(f_n(x))_{n\in\mathbf{N}}$ converge vers $f(x)$. Montrons que f est continue sur un G_δ dense.

      i. Soit ε un élément de $\mathbf{R}_+^*$. Pour tout entier nnaturel n, on pose

      $$F_{n,\varepsilon} := \{\ x \in \mathbf{R} | \forall p \in \mathbf{N}, (p \geq n) \Rightarrow (|f_n(x) - f_p(x)| \leq \varepsilon)\}$$

      et

      $$\Omega_\varepsilon := \bigcup_{n\in\mathbf{N}} \overset{\circ}{F}_{n,\varepsilon}.$$

      Montrer que Ω_ε est un ouvert dense.

      ii. Montrer que tout élément a de Ω_ε, admet un voisinage V tel que pour tout élément x de V, $\|f(x) - f(a)\| \leq 3\varepsilon$.

      iii. Conclure.

   (b) Soit g une application de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$ dérivable. Montrer que l'ensemble des points de continuité de g' contient un G_δ dense.

      Commentaires : Une dérivée est donc « assez » continue. On rapprochera ce résultat du théorème qui dit qu'une dérivée, vérifie le théorème de la valeur intermédiaire, ce qui constitue un premier pas vers la continuité.

5. — CONTINUITÉ ET CONTINUITÉ PARTIELLE — On se propose de montrer le résultat :
Théorème — *Soit f une application de $[0,1]^2$ dans $\mathbf{R}$. Si en tout point de $[0,1]^2$, f est continue en la première et en la seconde variable, alors il existe un résiduel G de $\mathbf{R}$ tel que f soit continue en tout point de $[0,1] \times G$.*

   Soit un réel ε strictement positif. Pour tout entier naturel n non nul, on note $F_{\varepsilon,n}$ l'ensemble des éléments y de $[0,1]$ tels que, pour tout x et tout x', éléments de $[0,1]^2$ si $|x - x'| \leq \frac{1}{n}$ alors $|f(x,y) - f(x',y)| \leq \varepsilon$:

   $$F_{\varepsilon,n} := \left\{ y \in [0,1] |\ \forall x \in [0,1], \forall x' \in [0,1]^2, |x - x'| \leq \frac{1}{n} \Rightarrow\ |f(x,y) - f(x',y)| \leq \varepsilon \right\}.$$

(a) Montrer que pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, $F_{\varepsilon,n}$ est un fermé de $[0,1]$.

(b) Montrer que $\bigcup_{n\in\mathbf{N}^*} F_{\varepsilon,n} = [0,1]$.

(c) Montrer que $\bigcup_{n\in\mathbf{N}^*} \overset{\circ}{F}_{\varepsilon,n}$ est un ouvert inclus dans $[0,1]$ dense dans $[0,1]$.
On le notera Ω_ε.

(d) Soient y_0 un élément de Ω_ε et $x_0 \in [0,1]$. Montrer qu'il existe un voisinage W de (x_0, y_0) tel que pour tout $(x,y) \in W \cap [0,1]^2$, $|f(x,y) - f(x_0,y_0)| \leq 2\varepsilon$.

(e) Posons $G := \bigcap_{n\in\mathbf{N}^*} \Omega_{\frac{1}{n}}$. Montrer que l'ensemble G est un résiduel inclus dans $[0,1]$.
Soit (x_1, y_1) un point de $[0,1] \times G$. Montrer la continuité de f en (x_1,y_1). Conclure.

6. Théorème de Banach Steinhauss —

Il s'agit sans doutes d'une des applications les plus spectaculaires de Baire, qui conduit à bon nombre de résultats d'analyse tout à fait remarquables.

Soit $(\mathbf{F}, \|\cdot\|_{\mathbf{F}})$ un e.v.n., $\mathcal{L}_c(\mathbf{E},\mathbf{F})$ sera muni de $|\!|\!|\cdot|\!|\!|$ norme subordonnée à $\|\cdot\|$ et $\|\cdot\|_{\mathbf{F}}$. Soit A une partie de $\mathcal{L}_c(\mathbf{E},\mathbf{F})$, non vide. Montrer que :

(a) ou bien il existe un réel M tel que pour tout $\vec{\ell} \in A$, $|\!|\!|\ell|\!|\!| \leq M$;

(b) ou bien il existe un G_δ dense de $\mathbf{E}$, tel que pour tout élément $\vec{x}$ de ce G_δ,

$$\sup_{\vec{\ell}\in A} \|\vec{\ell}(\vec{x})\|_{\mathbf{F}} = +\infty.$$

En anglais ce théorème porte le nom plus évocateur de *théorème de la « bornaison » uniforme.*

(a) Posons, pour tout élément k de $\mathbf{N}$, $\Omega_k = \{\vec{x} \in \mathbf{E}, \sup_{\vec{\ell}\in A} \|\vec{\ell}(\vec{x})\|_{\mathbf{F}} > k\}$. Montrer que pour tout élément k de $\mathbf{N}$, Ω_k est un ouvert.

(b) Montrer que si, pour tout élément k de $\mathbf{N}$, Ω_k est dense, alors, pour tout élément $\vec{x}$ de $\bigcap_{k\in\mathbf{N}} \Omega_k$, $\sup_{\vec{\ell}\in A} \|\vec{\ell}(\vec{x})\|_{\mathbf{F}} = +\infty$.

(c) Montrer que s'il existe $k_0 \in \mathbf{N}$, tel que Ω_{k_0} ne soit pas dense, alors il existe un réel M. tel que pour tout $\vec{\ell} \in A$, $|\!|\!|\ell|\!|\!| \leq M$.

(d) Conclure.

(e) Soit a une suite réelle telle que pour toute suite réelle b, élément de ℓ^2 la série $\sum a_n b_n$ converge. Montrer que $a \in \ell^2$.

Indication. Considérer l'ensemble $\{L_n, n \in \mathbf{N}\}$ des formes linéaires sur ℓ^2 défini par :

$$\forall n \in \mathbf{N}, L_n \ :\ \ell^2 \to \mathbf{R}\,;\ b \mapsto \sum_{k=0}^{n} a_k b_k$$

Indications pour la question II.8

Soit $\varepsilon \in \mathbf{R}_+^*$. L'hypothése sur $(f_n)_{n\in\mathbf{N}}$ nous fournit $n_0 \in \mathbf{N}^*$ tel que :

$$\forall (p,q) \in [\![n_0, +\infty [\![, \|f_p - f_q\|_\alpha \leq \varepsilon. \text{ (suite de Cauchy).} \tag{2}$$

Étape 1. *La suite $(f_n)_{n\in\mathbf{N}}$ converge simplement.*

• Soit $x \in [0,1]$. Par (2) , pour tout $p \in \mathbf{N}$,

$$|f_p(x)| \leq \max\{|f_{n_0}(x)| + \varepsilon, |f_0(x)|, ..., |f_{n_0-1}(x)|\}$$

la suite $(f_p(x))_{p\in\mathbf{N}}$ est donc bornée.

• Soient ℓ et ℓ' des valeurs d'adhérence de $(f_p(x))_{p\in\mathbf{N}}$. On considère des extractrices ϕ et ψ telles que

$$f_{\phi(p)}(x) \underset{p\to+\infty}{\to} \ell, \text{ et } f_{\psi(p)}(x) \underset{p\to+\infty}{\to} \ell' \ ;$$

quitte à remplacer ϕ par $\phi\circ\psi$, autre extractrice, il est loisible de supposer de surcroît $\phi \geq \psi$. L'inégalité (2) veut que pour tout entier $p \geq n_0$,

$$|f_{\phi(p)}(x) - f_{\psi(p)}(x)| \leq \|f_{\phi(p)} - f_{\psi(p)}\|_\infty \leq \|f_{\phi(p)} - f_{\psi(p)}\|_\alpha \leq \varepsilon,$$

puisque $\phi(p) \geq \psi(p) \geq p \geq n_0$. Laissons tendre p vers $+\infty$, nous obtenons :

$$|\ell - \ell'| \leq \varepsilon.$$

Le caractère arbitraire de ε exige que $\ell = \ell'$.

De ces deux points, et parce que $\mathbf{R}$ est de dimension finie, vient que $(f_p(x))_{p\in\mathbf{N}}$ converge.

D'où la convergence simple de $(f_p)_{p\in\mathbf{N}}$; nous noterons f la limite simple de cette suite.

Étape 2. L'application f est élément de E_α.

Soient x_1 et x_2 des éléments de $[0,1]$. Pour tout entier $p \geq n_0$

$$\begin{aligned} |f_p(x_1) - f_p(x_2)| \leq & |f_{n_0}(x_1) - f_{n_0}(x_2)| + |(f_p - f_{n_0})(x_1) - (f_p - f_{n_0})(x_2)| \leq \\ & (k_\alpha(f_{n_0}) + k_\alpha(f_p - f_{n_0}))|x_1 - x_2|^\alpha \leq \\ & (k_\alpha(f_{n_0}) + \varepsilon)|x_1 - x_2|^\alpha. \end{aligned} \tag{3}$$

Donc en laissant tendre p vers $+\infty$, on a :

$$|f(x_1) - f(x_2)| \leq (k_\alpha(f_{n_0}) + \varepsilon)|x_1 - x_2|^\alpha.$$

Donc f est élément de $\mathbf{E}_\alpha$.

Étape 2. *La suite $(f_p)_{p\in\mathbf{N}}$ converge vers f dans $(E_\alpha, \|\cdot\|_\alpha)$.*

•, pour tout p et tout q entiers tels que $p \geq q \geq n_0$, on a :

$$\forall z \in [0,1], |f_p(z) - f_q(z)| \leq \|f_p - f_q\|_\infty \leq \|f_p - f_q\|_\alpha \leq \varepsilon,$$

et en laissant p tendre vers $+\infty$, pour tout entier $q \geq n_0$ et tout $z \in [0,1]$

$$|f(z) - f_q(z)| \leq \varepsilon,$$

Donc, la borne supérieure étant le plus petit des majorants, pour tout entier $q \geq n_0$.

$$\|f - f_q\|_\infty \leq \varepsilon.$$

- Par ailleurs pour tout p et tout q entiers tels que $p \geq q \geq n_0$, on a

$$k_\alpha(f_p - f_q) \leq \|f_p - f_q\|_\alpha \leq \varepsilon,$$

et donc

$$|(f_p - f_q)(u) - (f_p - f_q)(v)| \leq \varepsilon |u - v|^\alpha.$$

pour tout u et v éléments de $[0, 1]$. En laissant une nouvelle fois tendre p vers $+\infty$, vient que pour tout entier $q \geq n_0$,

$$\forall (u, v) \in [0, 1]^2, |(f - f_q)(u) - (f - f_q)(v)| \leq \varepsilon |u - v|^\alpha.$$

Donc pour tout entier $q \geq n_0$ on a $k_\alpha(f - f_q) \leq \varepsilon$.

De ces deux points, il vient que pour tout entier $q \geq n_0$,

$$\|f - f_q\|_\alpha \leq 2\varepsilon.$$

Donc la suite $(f_q)_{q \in \mathbf{N}}$ converge vers f dans l'e.v.n. $(E_\alpha, \| \cdot \|_\alpha)$.

Travaux dirigés n° 5

Exemples de suites des itérés d'une fonction croissante, rapidité convergence .

I. THÉORÈMES D'ERNESTO CESÀRO

Soit $(\vec{x})_{n\in\mathbf{N}}$ une suite à valeurs dans un e.v.n. $(\mathbf{E}, \|\cdot\|)$, admettant une limite $\vec{\ell}$. Soit alors la suite $(\vec{y}_n)_{n\in\mathbf{N}}$ définie par,

$$\vec{y}_n = \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n}\vec{x}_k,$$

pour tout entier naturel n.
Cette quantité s'interprète comme la moyenne des $n+1$ premiers termes de la suite initiale, du moins lorsque cette dernière est à valeurs dans $\mathbf{R}$, dans le cas général $\vec{y}_n$ en est plus exactement parlant le barycentre, $\mathbf{E}$ étant muni de sa structure canonique d'espace affine. Le théorème de Cesàro affirme que la suite $(\vec{y}_n)_{n\in\mathbf{N}}$ tend vers $\vec{\ell}$; on a coutume de dire que la suite $(x_n)_{n\in\mathbf{N}}$ converge « en moyenne » ou « au sens de Cesàro » vers $\vec{\ell}$. Ce résultat est conforme à notre intuition. En effet, la suite $(\vec{x}_n)_{n\in\mathbf{N}}$ prend des valeurs qui tendent à se confondre avec $\vec{\ell}$, lorsque n croît, face aux nombre toujours plus grand de termes entrant dans le calcul de $\vec{y}$, les premiers termes y jouent un rôle de plus en plus négligeable, conférant ainsi à la moyenne une valeur proche de $\vec{\ell}$.

La preuve se calque sur cette démarche heuristique.

1. Prouver ce résultat. Que dire de la réciproque ?
2. Généralisation. Sous les hypothèses du 1. on considère une suite $(\alpha_n)_{n\in\mathbf{N}}$ de réels *strictement positifs*, telle que la série $\sum\alpha_n$ diverge, c'est-à-dire telle que :

$$\sum_{k=0}^{n}\alpha_k \underset{n\to+\infty}{\to} +\infty.$$

Soit alors la suite $(\vec{z}_n)_{n\in\mathbf{N}}$ définie par,

$$\vec{z}_n = \frac{1}{\sum\limits_{k=0}^{n}\alpha_k}\sum_{k=0}^{n}\alpha_k\cdot\vec{x}_k,$$

pour tout entier naturel n (moyenne pondérée de la suite $(x_n)_{n\in\mathbf{N}}$).
Déterminer la limite de cette dernière suite.

Le théorèle de Cesàro est rentré au programme dans le cas de suites réelles.

II. PREMIER EXEMPLE

Soient a un élément de $]0, \frac{\pi}{2}[$, K un élément de $]0, 1]$.

1. Montrer que la relation de récurrence suivante définie bien une suite réelle $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$:

$$u_0 := a,\ u_{n+1} := K\sin u_n,\ \text{pour tout } n \geq 0 \tag{4}$$

2. Montrer que cette suite converge vers 0.

   On se propose maintenant d'étudier la rapidité de convergence de cette suite.

3. Représenter sur un graphique les premiers termes de la suite pour $K = 0.25$, $K = 0.5$ et $K = 1$. Que constater ?

4. Montrer que la quantitée $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ est définie pour tout entier naturel n et que :

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} \underset{n\to+\infty}{\to} K.$$

5. Cas de convergence rapide

   On supose dans cette question que <u>$K < 1$</u>.

   Pour n grand, d'après la question précédente, la suite se comporte donc à peu près comme une suite géométrique de raison K, d'où pour préciser son comportement l'idée d'étudier la limite de $\sqrt[n]{u_n}$.

   (a) On note pour tout entier naturel n, $w_n := \ln\left(\frac{u_{n+1}}{u_n}\right)$. Montrer que la suite $(w_n)_{n\in\mathbf{N}}$ a une limite que l'on déterminera.

   (b) En étudiant la suite suite $(z_n)_{n\in\mathbf{N}}$, définie par : $z_n = \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n} w_k$, pour tout entier naturel n, déterminer la limite de la suite $\left(\sqrt[n]{u_n}\right)_{n\in\mathbf{N}}$.

   (c) **Réservé aux 5/2**. Donner la forme d'un équivalent du terme général de la suite $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$.

6. Cas de convergence lente

   On supose dans cette question que <u>$K = 1$</u>.

   (a) Déterminer un réel β tel que la suite $(w_n)_{n\in\mathbf{N}}$ définie par $w_n := u_{n+1}^{\beta} - u_n^{\beta}$, pour tout entier naturel n, admette une limite finie non nulle [3].

   (b) En étudiant la suite suite $(z_n)_{n\in\mathbf{N}}$, définie par : $z_n = \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n} w_k$, pour tout entier naturel n, donner un équivalent de u_n, lorsque n tend vers $+\infty$, de la forme cn^p où c et p sont des réels.

   (c) **Réservé aux 5/2**. Donner un équivalent simple de $u_n - cn^p$ lorsque n tend vers $+\infty$, (pour les valeurs de c et de p précédemment trouvées).

III. DEUXIEME EXEMPLE.

Soient a un réel strictement positif.

1. Montrer que la relation de récurrence suivante définie bien une suite réelle $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$:

$$u_0 := a,\ u_{n+1} := u_n + \frac{1}{u_n},\ \text{pour tout } n \geq 0 \tag{5}$$

2. Déterminer la convergence de cette suite.

3. Donner un équivalent du terme général de cette suite.

IV. DERNIER EXEMPLE

Soit a un élément de $]0,1[$.

3. L'introduction d'une telle suite, traditionnelle dans les problèmes, semble très artificielle et relever d'une intuision fertile, nous verons dans un prochain chapitre, la source, bien naturelle, d'une telle idée ; pour le moment retenons la recette !

1. Montrer que la formule de récurrence

$$\begin{cases} u_0 := a \\ u_{n+1} := {}^1\!/_2 \left(1 - \sqrt{1 - u_n}\right), \text{ pour tout entier } n \geq 0, \end{cases} \tag{6}$$

   définie bien une suite réelle $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$.
2. Déterminer la limite de cette suite.
3. Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ a une limite ℓ, indépendante de a, à déterminer.
4. **Réservé aux 5/2**. Donner la forme d'un équivalent du terme général de la suite la suite $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$.

FIGURE 2 – Ernesto Cesàro 1859-1906

Complément pour $\frac{5}{2}$

V. THÉORÈME DE TAUBER

Soit $\sum a_n x^n$ une série entière de la variable réelle x, de rayon de convergence égal à 1. On note S sa somme :

$$S :]-1,1] \to \mathbf{R};\ x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n.$$

On suppose de plus qu'il existe un réel L tel que

$$S(x) \underset{\substack{x\to 1\\ x<1}}{\to} L.$$

On s'intéresse à la convergence de la série $\sum a_n$.

1. Donner un exemple de suite $(a_n)_{n\in\mathbf{N}}$ telle que $\sum a_n$ diverge.
2. On suppose jusqu'à la fin que $a_n = \mathrm{o}\left(\frac{1}{n}\right)$ $(n \to +\infty)$.
   (a) Prouver que pour tout élément x de $]-1,1[$, et tout entier N supérieur ou égal à 1,
   $$\left|S(x) - \sum_{n=0}^{N} a_n\right| \leq N(1-x)\frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N}|na_n| + \frac{1}{N(1-x)}\sup_{n>N}|na_n|.$$
   (b) Conclure !

Le résultat demeure en supposant simplement que $a_n = \mathrm{O}(n)$ $(n \to +\infty)$, mais c'est bien plus difficile.

VI. CESÀRERIES

1. **(X.)** On dit qu'une partie A de $\mathbf{N}$ est de densité nulle si
   $$\frac{\mathrm{card}(A \cap \{0,1,\ldots,n\})}{n} \underset{n\to+\infty}{\to} 0$$
   Soit $(a_n)_{n\in_N}$ une suite de réels positifs, majorée. On note pour tout entier $n \geq 1$,
   $$S_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} a_k.$$
   On se propose de montrer l'équivalence des deux propositions suivantes :
   i. $S_n \underset{n\to+\infty}{\to} 0$;
   ii. Il existe une partie A de $\mathbf{N}$ de densité nulle telle que $a_n \underset{\substack{n\to+\infty\\ n\notin A}}{\longrightarrow} 0$
   (a) On suppose **ii.** ; Montrer **i.**
   (b) On suppose **i.** Pour tout $n \in \_N$ on note $\alpha_n := \sup\{S_p, p \geq n\}$. Montrer que la suite $(\alpha_n)_{n\in^*_N}$ tend vers 0. On considére $A := \{p \in \mathbf{N}^* | a_p \geq \sqrt{\alpha_p}\}$. Montrer que A est de densité nulle, en déduire que **ii.** est vraie.
2. Soit f une application de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$ continue. Pour tout réel a, on définit la suite $(v_n(a))_{n\in\mathbf{N}}$ par : $v_0(a) = a$; pour tout $n \in \mathbf{N}, v_{n+1}(a) = f(v_n(a))$. Enfin pour tout entier naturel n on pose : $u_n(a) = \frac{1}{n+1}\sum\limits_{k=0}^{n} v_k(a)$.
   (a) On suppose qu'il existe un réel a tel que la suite $(u_n(a))_{n\in\mathbf{N}}$ soit bornée. Montrer que f admet un point fixe.
   (b) Trouver un exemple de fonction f de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$ continue, ayant un unique point fixe x_f et telle que pour tout réel a distinct de x_f, $(u_n(a))_{n\in\mathbf{N}}$ converge vers une limite distincte de x_f.

Travaux dirigés n° 6

Interpolation

I. Polynômes d'interpolation de Lagrange

1. Soit n un entier naturel, et soit f une application d'un segment $[a,b]$ $(a<b)$ à valeurs réelles, soient enfin $(x_0, x_1, \ldots, x_n)$, $n+1$ points deux à deux distincts de $[a,b]$. Montrer qu'il existe un unique polynôme à coefficients réels de degré inférieur ou égal à n, que nous noterons P, qui coïncide avec f en chacun des points x_i :

$$P(x_i) = f(x_i), \text{ pour } i = 0, 1, \ldots, n.$$

Pour $i = 0, 1, 2.., n.$, on pose :

$$L_i := \frac{\prod\limits_{j=0,..,n;\ j\neq i} (X - x_j)}{\prod\limits_{j=0,..,n;\ j\neq i} (x_i - x_j)}$$

Exprimera P au moyen des polynômes $L_0, L_1, \ldots L_n$.

P s'appelle le polynôme d'interpolation de Lagrange de f aux points $(x_0, x_1, \ldots, x_n)$.

2. On suppose dans cette question que f est de classe $\mathcal{C}^{n+1}$ Soit x un élément de $[a,b]$ et g l'application :

$$[a,b] \to \mathbb{R};\ t \mapsto (f-P)(t) - A.\frac{\prod\limits_{i=0}^{n}(t-x_i)}{(n+1)!},$$

où A est un paramètre réel.

(a) Montrer que si x n'est pas élément de l'ensemble $\{x_0, x_1, x_2, \ldots, x_n\}$, il existe une valeur de A pour laquelle $g(x) = 0$. Montrer que pour ce choix de A, il existe un élément y de $[a,b]$ tel que $g^{(n+1)}(y) = 0$.

(b) En déduire qu'il existe un élément y de $[a,b]$ tel que :

$$(f-P)(x) = f^{(n+1)}(y)\ \frac{\prod\limits_{i=0}^{n}(x-x_i)}{(n+1)!},$$

(que x soit ou non élément de $\{x_0, x_1, x_2, \ldots, x_n\}$).

3. Méthode des trapèzes — Dans cette question f est seulement supposée de classe $\mathcal{C}^2$. Pour tout naturel non nul n, en notant $a_i := a + i\frac{b-a}{n}$, pour $i = 0, 1, 2, ..., n$, on considère l'application T_n de $[a,b]$ dans $\mathbf{R}$, affine par morceaux, continue, qui prend en a_i la valeur $f(a_i)$, pour $i = 0, 1, 2, ..., n$ et qui est affine sur chacun des intervalles $[a_i, a_{i+1}]$, pour $i = 0, 1, 2, ..., n-1$; on note enfin I_n l'intégrale de T_n sur $[a,b]$:

$$I_n := \int_a^b T_n(t)\ \mathrm{d}t.$$

(a) Donner l'expression de I_n, pour tout entier naturel non nul n.

(b) En utilisant la question 2., donner une majoration de $|I_n - \int_a^b f(t)\mathrm{d}t|$, pour tout entier naturel non nul n, en fonction de n et de $\|f''\|_\infty$.

4. Méthode de Simson — Dans cette question f est supposée de classe $\mathcal{C}^3$. Pour tout entier naturel non nul n, en notant : et $a_i := a + i\frac{b-a}{2n}$, pour $i = 0, 1, 2, ..., 2n$, on définit l'application S_n de $[a, b]$ dans $\mathbf{R}$, par

   (a) Pour $k = 0, 1, 2, \ldots, n-1$, T_n coïncide sur $[a_{2k}, a_{2k+2}[$ avec le polynôme P_k d'interpolation de f en $a_{2k}, a_{2k+1}, a_{2k+2}$, $(\mathrm{d}°(P) \leq 2)$;

   (b) $S_n(a_{2n}) = f(a_{2n})$;

   on note enfin J_n l'intégrale de S_n sur $[a, b]$.

   (a) Donner l'expression de J_n, pour tout entier naturel non nul n.

   (b) Donner une majoration de $|J_n - \int_a^b f(t)\mathrm{d}t|$, pour tout entier naturel non nul n.

II. Polynômes d'interpolation d'Hermite

Nous avons vu qu'il existe un unique polynôme de degré inférieur ou égal à n, qui coïncide en $n+1$ points avec une application donnée. Nous allons généraliser en faisant coïncider en certains points non seulement les valeurs du polynôme et de l'application, mais aussi celles de leurs dérivées successives (interpolation d'Hermite).

Soit k un entier naturel. Soient $x_0, x_1, \ldots, x_k$, $k+1$ points distincts d'un segment $[a, b]$, , et $k+1$ entiers naturels n_0, n_1,. . .,n_k. Nous noterons n la quantité

$$\sum_{i=0}^{k} (n_i + 1) \ - 1.$$

Soit f une application de $[a, b]$ dans $\mathbf{R}$, admettant pour $i = 0, 1, 2, ...k$, une dérivée d'ordre n_i au point x_i.

1. Montrer qu'il existe un unique polynôme Q à coefficients réels tel que pour tout élément i de $\{0, 1, \ldots, k\}$ et tout élément ℓ de $\{0, 1, \ldots, n_i\}$,

$$Q^{(l)}(x_i) = f^{(l)}(x_i).$$

   On prend dans cette question, $k = 1$ et $x_0 = 0$, $x_1 = 1$, $n_1 = n_2 = 1$, donc n=3. Déterminer dans ce cas particulier le polynôme Q.

2. Revenons au cas général, et supposons de surcroît que f est de classe $\mathcal{C}^{n+1}$. Soit x élément de $[a, b]$, montrer qu'il existe un élément y du plus petit intervalle contenant $x_0, x_1, ..., x_k$ et x, tel que :

$$f(x) - Q(x) = \frac{1}{(n+1)!} \prod_{i=0}^{k} (x - x_i)^{n_i+1} f^{(n+1)}(y).$$

3. On suppose maintenant que $k = 0$. Déterminer alors Q. Quel résultat connu devient alors le résultat de la question 4. ?

III. Construction des polynômes d'interpolation de Lagrange

On se replace dans le cadre de la première partie, dont on reprend les notations. On cherche à construire numériquement et de sorte assez « économique »le polynôme P qui interpole f aux points $x_0, x_1, \ldots, x_n$.

On note p_k, pour $k = 0, 1, 2, \ldots, n$, le polynôme qui interpole f aux points $x_0, x_1, \ldots, x_k$, ainsi $P = p_n$; on désigne par $f[x_0, x_1, \ldots, x_k]$ le coefficient de degré k de p_k.

1. (a) Montrer pour $k = 1, \dots, n$, que

$$p_k - p_{k-1} = f[x_0, x_1, \dots, x_k](X - x_0)(X - x_1)\dots(X - x_{k-1}).$$

   (b) Déduire du (a) que :

$$p_n = f(x_0) + \sum_{k=1}^{n} f[x_0, x_1, \dots, x_k](X - x_0)(X - x_1)\dots(X - x_{k-1}).$$

2. On se propose de donner une méthode algorhitmique de calcul des $f[x_0, x_1, \dots, x_k]$. Soit $k \in \{1, 2, \dots, n\}$.

   (a) Montrer :

$$f[x_0, x_1, \dots, x_k] = \frac{f[x_1, x_2, \dots, x_k] - f[x_0, x_1, \dots, x_{k-1}]}{x_k - x_0}.$$

   (b) Déterminer pour $i = 0, 1, \dots, k$, $f[x_i]$.

   (c) Donner un algorithme de calcul de p_n, utilisant les résultats (a) et (b), qui fournit

$$f[x_0], f[x_0, x_1], \dots, f[x_0, x_1, \dots, x_k], \dots, f[x_0, x_1, \dots, x_n].$$

IV. Intégration approchée d'une fonction convexe

Soit f une application de $\mathbf{R}_+$ dans $\mathbf{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$ et convexe.
Soit un entier $n \geq 2$. Montrer que :

$$0 \leq \frac{1}{2}f(0) + f(1) + f(2) + ... + f(n-1) + \frac{1}{2}f(n) - \int_0^n f(t)\mathrm{d}t \leq \frac{1}{8}(f'(n) - f'(0)).$$

V. Pseudo dérivée d'ordre 2

Soit f une application continue de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$. On dit que f admet une pseudo dérivée d'ordre 2 en un point x_0 de $\mathbf{R}$, si

$$\frac{f(x_0 + h) + f(x_0 - h) + 2f(x_0)}{h^2} \underset{h \to 0, h \neq 0}{\longrightarrow} \ell,$$

si c'est le cas ℓ est appelé pseudo dérivée d'ordre 2 en x_0 et est noté $f^{[2]}(x_0)$.

Si f admet en tout point une pseudo dérivée d'ordre 2 $f^{[2]} \ : \ \mathbf{R} \to \mathbf{R}\,;\ x \mapsto f^{[2]}(x)$ est appelée (fonction) pseudo dérivée d'ordre 2.

1. Montrer que si f est de classe $\mathcal{C}^2$ alors f admet en tout point une pseudo dérivée d'ordre 2 à déterminer. Donner un exemple d'application admettant en 0 une pseudo dérivée d'ordre 2, mais pas de dérivée d'ordre 2.
2. On suppose dans cette question que f admet en un point x_0 de $\mathbf{R}$ un minimum local. Si f admet une pseudo dérivée d'ordre 2 en x_0 que dire de son signe ?
3. On suppose que $f^{[2]}$ existe et est nulle, on veut montrer que f est affine.

   (a) On suppose encore f réelle. Soient $[a, b]$ un (vrai) segment et $\varepsilon \in \mathbf{R}_+^*$ et les applications

$$g_\pm \ : \ \mathbf{R} \to \mathbf{R}\,;\ x \mapsto f(x) - f(a) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a) \pm \varepsilon(x - a)(x - b).$$

   Etudier les signes de g_+ et g_- sur $[a, b]$

   (b) Conclure.

4. On suppose que $f^{[2]}$ existe et est positive strictement, montrer que f est convexe

VI. Régularité des fonctions convexes (réservé à un public averti)
Soit f une application d'un intervalle I d'intérieur non vide à valeurs réelles, convexe.

1. Montrer que f admet une dérivée à gauche et une dérivée à droite en tout point intérieur de I. Comparer la dérivée à droite et celle à gauche en un point intérieur à I.
2. Montrer que f est continue en tout point intérieur à I. Donner un exemple d'application convexes non continue.
3. L'intervalle I est supposé dans cette question ouvert. Montrer que si f est convexe alors elle est continue et admet une dérivée à droite sur I croissante.
4. On suppose que f est continue et admet une dérivée à droite sur I croissante. On se propose de montrer que f est convexe.

   (a) Soit g une application d'un intervalle I non réduit à un point, dérivable à droite et continue. On suppose que g'_d est positif montrer que g croît.

   (b) Soient x_0 un point de l'intérieur de I et T l'application « affine tangente à droite en x_0 » :
   $$T\ :\ I \to \mathbf{R}\,;\ y \mapsto f(y) - f(x_0) - (y - x_0)f'_d(x_0).$$
   Montrer que T est dérivable à droite et continue.

   (c) Montrer, en étudiant le signe de T, que :
   $$\forall y \in I\cap]x_0, +\infty[, f'_d(x_0) \leq \frac{f(y) - f(x_0)}{y - x_0}.$$
   Montrer que :
   $$\forall y \in I\cap] - \infty, x_0[, f'_d(x_0) \geq \frac{f(y) - f(x_0)}{y - x_0}.$$

   (d) soient x, y, z trois points de I tels que $x < y < z$, montrer que :
   $$\frac{f(y) - f(x)}{y - x} \leq \frac{f(z) - f(y)}{z - y}.$$
   Conclure.

5. Montrer qu'une fonction localement convexe est convexe.
6. Soient a un point intérieur à I et m un réel. Montrer que la droite D_m de $\mathbf{R}^2$ d'équation :
   $$D_m\ :\ y = f(a) + m(x - a)$$
   est au dessous du graphe de f si et seulement si $f'_g(a) \leq m \leq f'_d(a)$.

Correction de V. 4.

On admet le lemme suivant :

Lemme Soit g une application d'un intervalle I non réduit à un point, dérivable à droite et continue. Si g'_d est positif alors g croît.

Soit x_0 un point de l'intérieur de Iet T l'application « affine tangente à droite en x_0 ».

$$T \ : \ I \to \mathbf{R}\,;\ y \mapsto f(y) - f(x_0) - (y - x_0)f'_d(x_0).$$

L'application hérite de la dérivabilité à droite de f et de sa continuité et $T'_d = f'_d - f'_d(x_0)$. Donc par le lemme et la croissance de f'_d, on a que T croît sur $I\cap]x_0, +\infty[$. Comme T est nulle en x_0, T est positif sur $I\cap]x_0, +\infty[$ et donc :

$$\forall y \in I\cap]x_0, +\infty[, f'_d(x_0) \leq \frac{f(y) - f(x_0)}{y - x_0}.$$

De même

$$\forall y \in I\cap] - \infty, x_0[, f'_d(x_0) \geq \frac{f(y) - f(x_0)}{y - x_0}.$$

Donc si x, y, z sont trois points de I tels que $x < y < z$, on a alors :

$$\frac{f(y) - f(x)}{y - x} \leq \frac{f(z) - f(y)}{z - y}.$$

La convexité en résulte. Redonons la preuve semblable à celle du cours qui dit que si la fonction pente croît, alors la fonction est convexe. Soit y et z des points de I tels que $x < z$. Soit $t \in]0, 1[$ On pose

$$y_t = tx + (1 - t)z.$$

Par le cours de 4e sur les barycentres du siècle passé : $t = \frac{z-y_t}{z-x}$ et $(1 - t) = \frac{y_t-x}{z-x}$. Par ailleurs, la propriété des pentes que l'on vient de prouver donne :

$$\frac{f(y_t) - f(x)}{y_t - x} \leq \frac{f(z) - f(y_t)}{z - y_t}.$$

ce qui s'écrit :

$$\left(\frac{z - x}{(y_t - x)(z - y_t)}\right) f(y_t) \leq \frac{f(x)}{y_t - x} + \frac{f(z)}{z - y_t}$$

Donc, par positivité de $(y_t - x)(z - y_t)$ et $z - x$, on a :

$$f(tx + (1 - t)z) = f(y_t) \leq \frac{z - y_t}{z - x} f(x) + (1 - t) + \frac{y_t - x}{z - x} f(z) = tf(x) + (1 - t)f(z).$$

Voilà prouvée la convexité de f.

Preuve du lemme Soient a et b des points de I tels que $a < b$. Soit $\varepsilon \in \mathbf{R}_+^*$. Posons $E_\varepsilon := \{t \in [a, b] | g(t) \geq g(a) - \varepsilon(t - a)\}$ [4]

Comme $a \in E_\varepsilon$ et que b majore cet ensemble, E_ε admet une borne supérieure inférieure ou égale à b, que nous baptiserons c. La continuité de g veut que E_ε soit fermé et donc que $c \in E_\varepsilon$.

En fait $c = b$. supposons le contraire Comme $g'_d(c) \geq 0$ Il existe un $h > 0$ tel que pour tout $t \in]c, c + h] \cap I$,

$$\frac{g(t) - g(c)}{t - c} \geq -\varepsilon,$$

4. L'objectif est de montrer que $b \in E_\varepsilon$, la définition de la dérivée à droite comme limite d'un taux d'accroissement montre que E_ε contient un voisinage à droite de a.

quitte à diminuer h supposons $c+h \leq b$. On a alors,

$$g(c) - g(a) \geq -\varepsilon(c-a),$$

$$g(c+h) - g(c) \geq -\varepsilon(h),$$

par sommes de ces inégalités :

$$g(c+h) - g(a) \geq \varepsilon(c+h-a)$$

ce qui fait de $c+h$ un point de E_ε, contredisant la définition de c.

Donc $c = b$ et on a $g(b) \geq g(a) - \varepsilon(b-a)$. Comme ε est quelconque :

$$g(b) \geq g(a).$$

Voilà prouvée la croissance de g.

Travaux dirigés n° 7

Compacité

On utilisera le résultat suivant que nous allons voir en cours :
Dans un espace vectoriel de dimension finie, toute partie fermée bornée est compacte.

I UN THEOREME DU POINT FIXE COMPACT

Soit K un compact d'un e.v.n. $(\mathbf{E}, \|.\|)$ et $\vec{f}$ une aplication de K dans K vérifiant pour tout $\vec{x}$ et tout $\vec{y}$, éléments distincts de K :

$$\left\|\vec{f}\,(\vec{x}) - \vec{f}\,(\vec{y})\right\| < \|\vec{x} - \vec{y}\|\,. \tag{7}$$

1. Montrer que $\vec{f}$ admet un unique point fixe.
   INDICATION : Pour l'existence, étudier l'application $g : K \to \mathbf{R}$, $\vec{x} \mapsto \left\|\vec{f}\,(\vec{x}) - \vec{x}\right\|$.
2. Soit $\vec{c}$ un point quelconque de K. On définit la suite $(\vec{x}_n)_{n\in\mathbf{N}}$ par
   $$\begin{cases} \vec{x}_0 = c \\ \vec{x}_{n+1} = \vec{f}\,(\vec{x}_n) \;\; n \geq 0 \end{cases}.$$
   Pour tout entier naturel n on pose $d_n = \left\|\vec{f}\,(\vec{x}_n) - \vec{x}_n\right\|$. Montrer que la suite $(d_n)_{n\in\mathbf{N}}$ converge, nous noterons ℓ sa limite.
3. Montrer qu'il existe une sous suite $\left(\vec{x}_{\varphi(n)}\right)_{n\in\mathbf{N}}$ de la suite $(\vec{x}_n)_{n\in\mathbf{N}}$ qui converge vers un élément $\vec{a}$ de K, et montrer que $\left\|\vec{f}\,(\vec{a}) - \vec{a}\right\| = \vec{\ell}$
4. En considérant la suite $\left(d_{\varphi(n)+1}\right)_{n\in\mathbf{N}}$, montrer que $\vec{\ell} = 0$.
5. Montrer que la suite $(\vec{x}_n)_{n\in\mathbf{N}}$ converge vers l'unique point fixe de $\vec{f}$.
6. Déduire de ce qui précède une méthode numérique pour résoudre l'équation :
   $$\tan x - x = k.$$
7. Donner un exemple d'application $\vec{f}$ vérifiant (7), mais pour laquelle il n'existe pas de réel k , élément de $]0,1[$, tel que $\vec{f}$ soit k-contractante.
8. Montrer que si K est seulement fermé, (mais pas compact) alors $\vec{f}$ n'a pas nécessairement de point fixe.
9. Nous supposons maintenant que K est un compact étoilé de $\mathbf{R}^p$ où p est un entier strictement positif, et que $\vec{g}$ est une aplication de K dans K vérifiant pour tout $\vec{x}$ et tout $\vec{y}$, éléments de K :
   $$\|g\,(x) - g\,(y)\| \leq \|x - y\|\,. \tag{8}$$
   Montrer que $\vec{g}$ admet au moins un point fixe. L'application $\vec{g}$ peut-elle admettre plusieurs points fixes ?
10. Prenons une feuille de papier non perforée, posons la sur une table et dessinons sur la table le rectangle correspondant au pourtour de la feuille. Puis froissons sauvagement la feuille et reposons la dans le rectangle de sorte que chacun des points de la feuille ainsi froissée se projette orthogonalement dans le rectange. Montrer qu'un des points de la feuille au moins se projette orthogonalement sur sa position initiale. Le résultat demeure-t-il pour une feuille perforée ?

II THÉORÈME DU POINT FIXE DE PICARD

Soit F une partie fermée d'un espace vectoriel normé $(\mathbf{E}, \|\cdot\|)$ de dimension finie. Soient k un élément de $[0,1[$, et $\vec{f}$ une application de F dans F, k-contractante.

On se propose de montrer que $\vec{f}$ admet un et un seul point fixe.

1. Montrer que $\vec{f}$ admet au plus un point fixe.
2. Soit $\vec{a}$ un élément de F. On considère la suite $(\vec{x}_n)_{n\in\mathbf{N}}$ des itérés de $\vec{a}$ par f, c'est-à-dire $(\vec{f}^n(\vec{a}))_{n\in\mathbf{N}}$.
   (a) Montrer que pour tout p et tout q entierss tels que $p > q$,
   $$\|\vec{x}_p - \vec{x}_q\| \leq \frac{k^q}{1-k}\|\vec{x}_1 - \vec{x}_0\|.$$
   (b) Montrer que $(\vec{x}_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est bornée.
   (c) Montrer que $(\vec{x}_n)_{n\in\mathbf{N}}$ converge vers un élément $\vec{\ell}$ de F.
   (d) Conclure.
3. (5/2) On se propose de passer par un autre biais. Montrer que,la série $\sum \vec{x}_{n+1} - \vec{x_n}$ est absolument convergente. Conclure.
4. Montrer que pour tout entier $n \geq 0$, $\|\vec{f}^n(\vec{a}) - \vec{\ell}\| \leq \frac{k^n}{1-k}\|\vec{f}(\vec{a}) - \vec{a}\|$.

III DISTANCE À UN COMPACT

On admet le résultat que nous allons prochainement voir en cours : *Toute partie fermée bornée d'un espace vectoriel normé de dimension finie est compacte.*

1. Le cas général : Soient A une partie non vide, compacte d'un e.v.n. $(\mathbf{E}, \|.\|)$ et $\vec{c}$ un élément de $\mathbf{E}$. Montrer qu'il existe au moins un élément $\vec{a}$ de A tel que :
   $$\mathrm{d}\,(\vec{c}, A) = \|\vec{a} - \vec{c}\|.$$
2. Montrer que le résultat demeure si A est seulement un fermé non vide et $\mathbf{E}$ de dimension finie.
3. Application : On munit $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ de la norme euclidienne canonique (norme de Frobenius). Montre que $\mathrm{SL}_n(\mathbf{R})$, ensemble des éléments de $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ de déterminant 1, est un sous-groupe de $\mathrm{GL}_n(\mathbf{R})$), qui est fermé. Est-il compact ? Montrer qu'il existe un élément de $\mathrm{SL}_n(\mathbf{R})$ de norme minimale. *À suivre...*
4. Montrer que le résultat demeure si l'on remplace A, par un sous-espace vectoriel $\mathbf{F}$ de $\mathbf{E}$, de dimension finie, ($\mathbf{E}$ étant de dimension quelconque).
5. Un cas particulier : Soit $[a, b]$ un segment de $\mathbf{R}$ et $\mathbf{E}$ un sous-espace vectoriel de $\mathcal{F}([a, b], \mathbf{R})$ qui contient les applications polynomiales, muni d'une norme notée $\|.\|$. Pour tout entier naturel n, $\mathcal{P}_n$ désigne l'ensemble des applications polynomiales de $[a, b]$ dans $\mathbf{R}$ de degré inférieur ou égal à n.
   a. Montrer que pour toute application f élément de $\mathbf{E}$, il existe au moins un élément p_n de $\mathcal{P}_n$ tel que :
   $$\mathrm{d}\,(f, \mathcal{P}_n) = \|f - p_n\|.$$
   Nous appellerons p_n, « *polynôme de meilleure approximation de f de degré n* ».
   b. Prenons pour $\mathbf{E}$, l'ensemble des applications f de $[-1, 1]$ dans $\mathbf{R}$, continues par morceaux, qui vérifient :
      i. pour tout élément x de $]-1, 1[$, $f(x) = \frac{1}{2}(f(x^+) + f(x^-))$,

ii. $f(1) = f(1^-)$, $f(-1) = f(-1^+)$.

Vérifier que $\mathbf{E}$ est bien un espace vectoriel. Montrer que l'application

$$N_1 : \mathbf{E} \to \mathbf{R},\ f \mapsto \int_{-1}^{1} |f(t)|\, \mathrm{d}t,$$

est bien une norme sur $\mathbf{E}$.

c. - Soit f l'élément de $\mathbf{E}$, défini par :

$$f(x) = -1,\ \text{pour } x < 1,$$

$$f(x) = +1,\ \text{pour } x > 1.$$

Déterminer tous les polynômes de meilleure approximation de degré 0 de f.

IV CONTINUITÉ UNIFORME

1. Soit f une application uniformément continue de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$. Montrer l'existence de deux réels a et b tels que pour tout réel x, $|f(x)| \leq a|x| + b$
2. Notons $\mathbf{E} = \mathcal{C}^0([a,b], \mathbf{R})$, on munit cet espace vectoriel de la norme $\|\cdot\|_\infty$. Soient φ une application de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$, continue et
$$K \;:\; \mathbf{E} \to \mathbf{E} \;\; f \mapsto \varphi \circ f.$$
Montrer que K est continue.
3. Soit f une application de $\mathbf{R}_+$ dans $\mathbf{R}$ uniformément continue [5]. On suppose que pour tout $x \in \mathbf{R}_+^*$ la suite $(f(nx))_{n\in\mathbf{N}}$ converge vers 0.
 montrer que $f(x) \underset{x\to+\infty}{\to} +\infty$.

Compléments pour public averti...

V UNE CARACTÉRISATION DES COMPACTS

Soit $(E; \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé tel que toute série à valeur dans $\mathbf{E}$ absolument convergente soit convergente [6].

Nous allons donné une caractérisation « géométrique » des compacts

Adoptons la définition suivante :

Définition. *Une partie A de $\mathbf{E}$ est dite* plate *si pour tout $\varepsilon \in \mathbf{R}_+^*$, il existe un sous-espace vectoriel* $\mathbf{F}$ *de* $\mathbf{E}$*, de dimension finie, tel que $A \subset \mathbf{F}_\varepsilon$, où $\mathbf{F}_\varepsilon = \mathbf{F} + \mathrm{B_f}(0_\mathbf{E}, \varepsilon)$, ($\varepsilon$-grossissement de F) .*

Nous allons prouver :

Proposition. *Soit une partie A de $\mathbf{E}$. Alors les propriétés suivantes sont équivalentes :*

(i) L'ensemble K est un compact.

(ii) L'ensemble K est fermé, borné et plat.

On désigne dans la suite par A une partie de $(\mathbf{E}, \|\cdot\|)$.

1. Précompacité.
   (a) On suppose dans cette question la partie A compacte. Montrer que pour tout réel $\varepsilon > 0$, il existe des boules fermées de rayon ε, en nombre fini, $B'_1, B'_2, \ldots B'_p$ telles que $A \subset \bigcup_{i=1}^{p} B'_i$. On dit que A peut être recouverte par un nombre fini de boules fermées de rayon ε.
   (b) *Application* Montrer que tout compact K de $(\mathbf{E}, \|\cdot\|)$. possède une partie dense dénombrable.
   (c) On suppose que pour tout réel $\varepsilon > 0$ la partie A peut être recouverte par un nombre fini de boules fermées de rayon ε [7].
   Soit $(x_n)_{n\in\mathbf{N}}$ une suite d'éléments de A.
   Montrer qu'il existe une suite $(\varphi_m)_{m\in\mathbf{N}^*}$ d'applications φ_m de $\mathbf{N}$ dans $\mathbf{N}$ strictement croissantes telle que pour tout entier $m \geq 1$, la suite $(x_{\varphi_1\circ\varphi_2\circ\cdots\circ\varphi_m(n)})_{n\in\mathbf{N}}$ soit à valeurs dans une boule fermée de rayon $\frac{1}{2^m}$.
   En déduire que la suite $(x_n)_{n\in\mathbf{N}}$ admet une suite extraite $(x_{\psi(p)})_{p\in\mathbf{N}}$ convergente.
   (d) Montrer que $\bar{A}$ adhérence de A est compacte si et seulement si pour tout réel $\varepsilon > 0$, la partie A peut être recouverte par un nombre fini de boules fermées de rayon ε.

5. Le résultat demeure lorsque f n'est que continue, mais sa démonstration est difficile.
6. De tels espaces vectoriels normés sont dits de Banach ou complets.
7. On traduit cette propriété en disant que A est précompacte.

2. On suppose la partie A compacte. Montrer que A est fermée bornée plate.
3. On suppose A fermée, bornée et plate.
   Soit $\varepsilon \in \mathbf{R}_+^*$.
   (a) Montrer que sans perte de généralité, on peut supposer que $K \subset \mathrm{B_f}(0_\mathbf{E}, 1)$
   Soit $\varepsilon \in \mathbf{R}_+^*$.
   (b) Par hypothèse de platitude on dispose de $\mathbf{F}$ sous-espace vectoriel de dimension finie tel que $\mathbf{F}_\varepsilon$ contienne K. On note $\mathrm{B}_{\mathrm{f},\mathbf{F}}$ la boule unité fermée de $\mathbf{F}$.
   Montrer qu'il existe d'un entier $N_\varepsilon \in \mathbf{N}^*$ et de $(y_1, \ldots, y_{N_\varepsilon}) \in F^{N_\varepsilon}$ tels que :
$$\mathrm{B}_{\mathrm{f},\mathbf{F}} \subset \bigcup_{i=1}^{N_\varepsilon} \mathrm{B}_{\mathrm{f},F}(y_i, \varepsilon).$$
   (c) On suppose que ε est inférieur à 1. Déduire de la précédente sous-question, que A est recouvert par N_ε boules fermées de rayon 3ε.
   (d) En déduire que A est compact.

VI COMPACTS ET RECOUVREMENT PAR DES OUVERTS (X, ENS)

Soit $(\mathbf{E}, \|\cdot\|)$ un e.v.n. Nous nous proposons de montrer qu'une partie K de $(\mathbf{E}, \|\cdot\|)$ est compact, si et seulement si pour toute famille $(O_i)_{i\in I}$ d'ouverts telle que $K \subset \underset{i\in I}{\cup} O_i$, il existe une partie *finie* J de I telle que $A \subset \underset{i\in J}{\cup} O_i$. On traduit cette dernière propriété en disant que de tout recouvrement de K par des ouverts on peut extraire un sous-recouvrement fini.

1. On suppose que K est un compact de $(\mathbf{E}, \|\cdot\|)$.
   (a) Montrer que pour tout $\varepsilon \in \mathbf{R}_+^*$; il existe un recouvrement fini de K par des boules ouvertes de rayon ε.
   Indication : Raisonner par l'absurde.
   (b) Soit $(O_i)_{i\in I}$ une famille d'ouverts telle que $K \subset \underset{i\in I}{\cup} O_i$. Montrer qu'il existe un réel $\varepsilon > 0$, tel que pour tout $x \in K$, il existe $i \in I$ tel que $\mathrm{B_0}(x, \varepsilon) \cap K \subset O_i$.
   Indication : Raisonner par l'absurde.
   (c) Montrer que de tout recouvrement de K par des ouverts on peut extraire un sous-recouvrement fini.
2. Montrer que si de de tout recouvrement de K par des ouverts, on peut extraire un sous-recouvrement fini, alors K est compact [8].
3. Montrer que K est compact si et seulement si pour toute famille de fermés de $(\mathbf{E}, \|\cdot\|)$, $(F_i)_{i\in I}$ telle que $K \cap \left(\underset{i\in I}{\cap} F_i\right) = \emptyset$, il existe une sous-famille *finie* $(F_i)_{i\in J}$ telle que :
$$K \cap \left(\underset{i\in J}{\cap} F_i\right) = \emptyset.$$

8. C'est cette propriété, qui dans le cas de topologies ne dérivant pas d'une distance, sert à définir un compact.

Travaux dirigés n° 8

Connexité par arcs, convexité

I. CONVEXES

Soit C un convexe non vide fermé de $\mathbf{R}^n$, muni de sa structure euclidienne canonique. le produit scalaire canonique est noté $\langle\cdot|\cdot\rangle$, $\|\cdot\|$ la norme associée.

On appelle hyperplan d'appui de C en un point a de C tout hyperplan $\mathbf{H}$ de $\mathbf{R}^n$ passant par a tel que C soit inclus dans un des demi-espaces fermés définis par $\mathbf{H}$. Un point a de C est dit extrémal si $C - \{a\}$ est convexe, autrement dit si a n'est pas le milieu de deux points distincts de C.

1. Enveloppe convexe. Soit A une partie de $\mathbf{R}^n$ non vide.

   L'enveloppe convexe d'une partie, comme les sous-espace vectoriels ou sous-groupes engendrés par une partie, peut se définir de deux manières :
   — *par intersection ;*
   — *au moyen d'opérations sur les éléments de la partie.*

   (a) Montrer que l'intersection d'une famille non vide de convexes est convexe. En déduire qu'il existe un plus petit convexe contenant A. On l'appelle enveloppe convexe de A, on notera $\mathrm{conv}(A)$.

   (b) Montrer que $\mathrm{conv}(A)$ est l'ensemble $\mathcal{B}_+(A)$ des barycentres d'un nombre quelconque d'éléments de A affectés de coefficients positifs quelconques.

   Soit p un point de $\mathrm{conv}(A)$ barycentre à coefficients positif de d points $a_1, ..., a_d$, affectés des coefficients respectifs $(\alpha_1, ..., \alpha_d)$. On suppose que $d \geq n+2$.

   (c) Montrer que le noyau de l'application linéaire suivante est non trivial

   $$\Phi \ : \ \mathbf{R}^d \to \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}\,;\ (x_1, ..., x_d) \mapsto \left(\sum_{i=1}^{d} x_i a_i, \sum_{i=1}^{d} x_i\right)$$

   En considérant un élément $(z_1, ... z_d)$ du noyau de L non nul et les applications

   $$\mathbf{R} \to \mathbf{R}\,;\ t \mapsto \alpha_i + t z_i,$$

   pour $i = 1, 2, ... d$, montrer que p est barycentre à coefficients positifs de $d-1$ points de A.

   (d) Théorème de Carathéodory —

   Montrer que $\mathrm{conv}(A)$ est l'ensemble des barycentres de $n+1$ éléments de A affectés de coefficients positifs quelconques.

   (e) On suppose que la partie A est compacte. Montrer que son enveloppe convexe, $\mathrm{conv}(A)$, est aussi compacte.

   (f) L'enveloppe convexe d'un fermé est-elle fermée.

2. Projection sur un convexe

   (a) Soit z un élément de $\mathbf{R}^n$. Montrer qu'il existe un et un seul point c de C tel que : $\|z - c\| = \mathrm{d}(c, C)$. Le point c s'appelle projection de z sur C et sera noté $p(z)$. On dispose ainsi d'une application p de $\mathbf{R}^n$ dans $\mathbf{R}^n$ à valeurs dans C.

(b) Soit y un élément de C, montrer que $\langle y - p(z) | z - p(z) \rangle \leq 0$.

Indication : Considérer un point du segment $[p(\vec{a}), \vec{y}]$.

Quelle interprétation géométrique donner de ce résultat ?

(c) Soient a et b des éléments de $\mathbf{R}^n$. Montrer que $\|p(a) - p(b)\| \leq \|a - b\|$. Que dire de l'application p ?

3. On suppose que z n'apartient pas à C. Montrer que C admet en $p(z)$ un hyperplan d'appui
4. Montrer que $p(\mathbf{R}^n - C) \subset \mathrm{Fr}(C)$
5. Soit f un point de la frontière de C. Montrer que C admet en f un hyperplan d'appui. *Indication* : Considérer une suite d'éléments de $\mathbf{R}^n \setminus C$ qui converge vers f.
6. Théorème de Krein-Milman

   On suppose dans cette question que C est *compact.*

   (a) Soit $\mathbf{H}$ un hyperplan d'appui de C en un point a. Montrer que a est un point extrémal de C si et seulement si il est un point extrémal de $C \cap \mathbf{H}$ (on justifiera que $C \cap \mathbf{H}$ est un convexe fermé.

   (b) Montrer que tout point y de C est barycentre à coefficients positifs de points de la frontière de C.

   Indication : On pourra considérer l'intersection de C et d'une droite passant par y.

   (c) Montrer que C est l'enveloppe convexe de ses points extrémaux (Théorème de Krein-Milman).
7. On ne suppose plus C compact mais au contraire, non borné. Montrer que C contient une demi droite.
8. Soient X un convexe de $\mathbf{R}^n$ non vide, a un point intérieur à X et b un point adhérent à X. Montrer que $[a, b[$ est inclus dans l'intérieur de X.

   Indication : Etudier pour un point x de $[a, b[$ l'image d'une boule de centre a par une homothétie de centre x.
9. Égalité des accroissements finis vectorielle

   (a) Rappeler l'égalité des accroissements finis pour une application d'un intervalle I de $\mathbf{R}$ à valeurs dans $\mathbf{R}$. Montrer que si l'on remplace dans l'énoncé l'ensemble d'arrivé $\mathbf{R}$ par $\mathbf{R}^2$, alors le résultat est faux.

   Donnons un généralisation à $\mathbf{R}^n$ de l'égalité des accroissements finie.

   Soit F une application d'une application d'un intervalle ouvert I non vide à valeurs dans $\mathbf{R}^n$.

   Soit A une partie de $\mathbf{R}^n$. Le sous-espace affine engendré par A est le plus petit sous-espace affine de $\mathbf{R}^n$ contenant A, c'est aussi l'ensemble des barycentres de points de A.

   Théorème 1. *Supposons F dérivable et soient a et b des élément de I tels que $a < b$. Notons d la dimension de l'espace affine engendré par $F([a, b])$. Alors il existe c_1, c_2,...,c_{d+1} des éléments de $]a, b[$, λ_1, λ_2,...,λ_{d+1} des réels positifs ou nuls de somme 1, tels que*

$$\frac{F(b) - F(a)}{b - a} = \sum_{i=1}^{d+1} \lambda_i F(c_i).$$

   Ce théorème est assez délicat, nous allons en donner une forme faible : nous supposerons F de classe $\mathcal{C}^1$ et nous contenterons pour les c_i de l'apppartenance à $[a, b]$.

(b) Montrer que l'on ne restreint pas la généralité en supposoant que $0_{\mathbf{R}^n}$ est élément de $F([a,b])$ et que dans ce cas le sous-espace affine engendré par $F([a,b])$ est le sous-espace vectoriel engendré par $F([a,b])$.

(c) Montrer que $\frac{F(b)-F(a)}{b-a}$ est limite d'une suite de barycentres à coefficients positifs d'éléments de $F'([a,b])$.

(d) Conclure.

II. CONNEXITÉ PAR ARCS

Soient un entier $n \geq 2$ et une application f de $\mathbf{R}^n$ dans $\mathbf{R}$ continue.

1. On suppose qu'il existe un réel a tel que $f^{-1}(\{a\})$ soit un singleton. Montrer que f atteint en $f^{-1}(\{a\})$ son maximum ou son minimum.
2. On supose qu'il existe un réel b tel que $f^{-1}(\{b\})$ soit compact. Montrer que f atteint son maximum ou son minimum.

III . RECOUVREMENT D'UN COMPACT (pour un public averti)

L'espace vectoriel $\mathbf{R}^2$ est muni d'une norme $\|\cdot\|$. Soit K un compact de $\mathbf{R}^2$.

1. Soit $\varepsilon \in \mathbf{R}_+^*$. Montrer qu'il existe un ensemble finie P de K tel que K soit recouvert par les boules ouvertes de rayon ε centrées sur les points de P : $K \subset \bigcup_{p \in P} \mathrm{B}_0(p,\varepsilon)$.
2. Montrer que K possède une partie dense dénombrable.
3. Pour tout réel $\varepsilon > 0$, on dit qu'une partie A de K est ε-séparée si la distance entre deux points distincts de A est supérieure ou égale à ε.

   (a) Soit $\varepsilon \in \mathbf{R}_+^*$. Montrer qu'il existe un entier $M(\varepsilon)$ tel que toute partie ε-séparée soit de cardinal inférieur ou égal à $M(\varepsilon)$ et tel qu'il existe une partie ε-séparée de cardinal $M(\varepsilon)$.

   (b) Dans le cas paticulier où la norme choisie est la norme euclidienne canonique et où K est inclus dans la boule fermée de centre l'origine et de rayon $R > 0$ donner un majorant de $M(\varepsilon)$

   (c) Soit f une application de K dans K qui conserve la distance. Montrer que f est surjective.
4. Soit $\varepsilon \in \mathbf{R}_+^*$. Soit F une partie de K, *finie*. On dit que F recouvre K à ε près si :

$$K \subset \bigcup_{a \in F} \mathrm{B}_\mathrm{f}(a,\varepsilon).$$

   (a) Montrer qu'il existe un entier $m(\varepsilon)$ tel que toute partie qui recouvre K à ε près soit de cardinal supérieur ou égal à $m(\varepsilon)$ et tel qu'il existe une partie qui recouvrent K à ε près de cardinal $m(\varepsilon)$.

   (b) Notons $\mathcal{P}$, l'ensemble des parties qui recouvrent K à ε près de cardinal $m(\varepsilon)$. Montrer que l'application

$$\mathcal{P} \to \mathbf{R}\,;\ P \mapsto \sum_{(x,y) \in \mathcal{P}^2} \|x-y\|$$

   atteint sa borne inférieure.

Travaux dirigés n° 9

I. Préambule

Montrer l'existence et donner la valeur de l'intégrale suivante :

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\sin(x)\mathrm{d}x$$

Indication : on pourra introduire la quantité $J = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\cos(x)\mathrm{d}x$ que l'on comparera à I.

II. Développements asymptotiques d'intégrales

1. Montrer qu'il existe une suite de réels $(a_k)_{k\in\mathbf{N}^*}$ à déterminer, telle que pour tout élément k de $\mathbf{N}^*$,

$$\int_e^x \frac{\mathrm{d}t}{\ln t} = \frac{a_1 x}{\ln x} + \frac{a_2 x}{(\ln x)^2} + \cdots + \frac{a_k x}{(\ln x)^k} + \mathrm{o}\left(\frac{x}{(\ln x)^k}\right),\ x \to +\infty.$$

2. Montrer qu'il existe une suite de réels $(b_k)_{k\in\mathbf{N}^*}$ à déterminer, telle que pour tout élément k de $\mathbf{N}^*$,

$$\int_x^{+\infty} \exp(-t^2)\mathrm{d}t = \exp(-x^2)\left(\frac{b_0}{x} + \frac{b_1}{x^3} + ... + \frac{b_k}{x^{2k+1}} + o\left(\frac{1}{x^{2k+1}}\right)\right),\ x \to +\infty.$$

III. Moyenne pondérée le retour de Cesàro

1. Soit f un élément de $\mathcal{C}^0([0,1],\mathbf{R})$. On se propose d'étudier la limite éventuelle de la suite $(I_n)_{n\in\mathbf{N}}$, où pour tout entier naturel n,

$$I_n = n\int_0^1 t^n f(t)\mathrm{d}t$$

   (a) Représenter pour diverse valeurs de n les applications $[0,1] \to \mathbb{R}\,;\, t \to \frac{t^n}{\int_0^1 t^n\,\mathrm{d}\,t}$.

   (b) Montrer que :

$$\frac{1}{\int_0^1 t^n\,\mathrm{d}\,t}\int_0^1 t^n f(t)\,\mathrm{d}\,t \underset{n\to+\infty}{\to} f(1)\,.$$

   En déduire que la suite $(I_n)_{n\in\mathbf{N}}$ a une limite à déterminer.

2. Soit f une application de $\mathbf{R}_+$ dans $\mathbf{R}$, continue et bornée.

   (a) Pour tout entier naturel n, justifier l'existence de :

$$J_n = n\int_0^{+\infty} e^{-nt} f(t)\mathrm{d}t.$$

   On se propose d'étudier la limite éventuelle de la suite $(J_n)_{n\in\mathbf{N}}$.

   (b) Représenter pour diverses valeurs de n les applications $\mathbf{R}_+ \to \mathbf{R}\,;\, t \to \frac{e^{-nt}}{\int_0^{+\infty} e^{-nt}\,\mathrm{d}\,t}$.

(c) Montrer, en raisonnant comme précédemment que la suite $(J_n)_{n\in\mathbf{N}}$ a une limite à déterminer.

(d) (**Réservé** $\frac{5}{2}$.) Reprendre la sous question précédente par changement de variable et en utilisant le théorème de convergnce dominée.

IV. Lemme de Lebesgue

1. Soit g une application d'un segment non trivial $[a,b]$ à valeur réelles de classe $\mathcal{C}^1$ Déterminer la limite en $+\infty$ de de l'application
$$\mathbf{R} \to \mathbf{R}\,;\ \lambda \mapsto \int_{[a,b]} g\sin(n\,\cdot).$$

2. On ademet le lemme de Lebesgue (question 1) en ne supposant g seulement continue (voir cours.)

   Soit f une application de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$ intégrable de classe $\mathcal{C}^1$. Pour tout réel λ, montrer l'existence de
$$L(\lambda) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\sin(\lambda t)\mathrm{d}t.$$
   Déterminer la limite de $L(\lambda)$ lorsque λ tend vers $+\infty$.

3. Soit f un élément de $\mathcal{C}^1([0,1],\mathbf{R})$. Montrer pour tout entier naturel n, l'existence de
$$I_n = \int_0^1 \frac{f(t)\sin(nt)\mathrm{d}t}{t}.$$
   Etudier la limite éventuelle lorsque n tend vers $+\infty$ de la suite $(I_n)_{n\in\mathbf{N}}$.

4. (a) Montrer que l'intégrale $\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t$ est convergente. On admet (jusqu'à un prochain TD) que $\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t = \frac{\pi}{2}$.

   (b) Soit f un élément de $\mathcal{C}^1([0,1],\mathbf{R})$. Montrer pour tout entier naturel n, l'existence de
$$I_n = \int_0^1 \frac{f(t)\sin(nt)}{t}\mathrm{d}t.$$
   Étudier la limite éventuelle lorsque n tend vers $+\infty$ de la suite $(I_n)_{n\in\mathbf{N}}$.

   (c) Pour tout entier $n \geq 1$, on pose
$$J_n := \frac{1}{n}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^2(nt)}{\sin^2(t)}\mathrm{d}t.$$
   Justifier l'existence de cette intégrale.

   (d) Étudier la limite éventuelle de la suite $(J_n)_{n\in\mathbf{N}}$.

   Indication : On pourra utiliser une intégration par parties.

VI Compléments de programme.

Lebesgue encore

Soit $T \in \mathbf{R}_+^*$.

Soit h une application continue de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$, T-périodique. On pose :
$$< h >= \frac{1}{T}\int_0^T h(t)\mathrm{d}t.$$

1. Montrer que pour tout réel x et tout entier n,

$$\frac{1}{nT}\int_x^{x+nT} h(t)\mathrm{d}t =< h > .$$

2. Soit f une application de classe $\mathcal{C}^1$ sur un segment $[a,b]$ non réduit à un point. Montrer

$$\int_a^b f(t)h(nt)\mathrm{d}t \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} < h > \int_a^b f(t)\mathrm{d}t.$$

3. Reprendre l'exercice avec f seulement continue par morceaux.

CESÀRO TOUJOURS
Soient f une application de [0,1] dans $\mathbf{R}$ continue et telle que $f(0)\neq 0$, et

$$g\ :\ \mathbf{R}_+ \to \mathbf{R}\,;\ \int_0^1 \frac{f(x)}{1+tx} = \mathrm{d}x.$$

1. Donner un équivalent de $g(t)$ lorsque t tend vers $+\infty$.
2. On suppose de plus f de classse $\mathcal{C}^1$; Majorer la différence entre cet équivalent et f au voisinage de $+\infty$.

UNE INTÉGRALE CÉLÉBRE —
On se propose de calculer l'intégrale suivante, qui intervient notamment dans le calcul d'un champ éléctrostatique créé par une densité invariante rotation autour d'un arc et par translation dans la direction de cette axe :

$$\int_0^\pi \ln(1+2x\cos\theta+x^2)\mathrm{d}\theta.$$

1. Montrer que pour tout réel x, la quantité $\int_0^\pi \ln(1+2x\cos\theta+x^2)\mathrm{d}\theta$ est bien définie.
   Nous allons donner la valeur de cette intégrale.
   Dans la suite on désigne par f l'application

$$f\ :\ \mathbf{R}\to\mathbf{R}\,;\ x\mapsto \ln(1+2x\cos\theta+x^2)\mathrm{d}\theta.$$

2. *Première méthode*
   (a) (5/2) Montrer que l'application f est continue. Les 3/2 admettront ce résultat.
   (b) pour tout réel x distinct de 1 et de -1, calculer $f(x)$ en utilisant les sommes de Riemann.
   (c) Conclure.
3. *Seconde méthode*
   (a) Pour tout réel x étudier $f(-x)$, $f(x^2)$ et pour x de plus non nul $f\left(\frac{1}{x}\right)$.
   (b) En déduire f.

Normes d'application linéaire

Travaux dirigés n° 10

I. PREMIER EXEMPLE

Soit L l'application linéaire de $\mathbf{R}^2$, noté en colonne, dans lui-même définie par,

$$L(X) = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} X,$$

pour tout élément X de $\mathbf{R}^2$.

1. Montrer que L est continue de $(\mathbf{R}^2, n_2)$ dans lui-même et donner sa norme.
2. Généraliser en substituant à $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$ un élément quelconque de $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$quelconque.

II. ÉTUDE DE NORME SUR $\mathcal{M}_n(\mathbf{K})$

Pour tout $A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K})$, on note $A = (a_{i,j})_{1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq n}$, et pour tout $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{K})$, on note x_i le terme de la i^{e} ligne de X, pour $1 \leq i \leq n$.

Pour $A \in M_n(K)$, on pose $\rho(A) = \max\{|\lambda|; \lambda \in \text{sp(A)}\}$, quantité appelée rayon spectral.

1. Soit les application

$$N' : \mathcal{M}_n(\mathbf{K}) \to \mathbf{R}_+ \ ; A \mapsto \max_{j=1,\ldots,n} \left(\sum_{i=1}^{n} |a_{i,j}| \right)$$

$$N : \mathcal{M}_n(\mathbf{K}) \to \mathbf{R}_+, \ ; A \mapsto \max_{i=1,\ldots,n} \left(\sum_{j=1}^{n} |a_{i,j}| \right)$$

   Montrer directement que N et N' sont des normes.

2. Montrer que N et N' sont des normes subordonnées à des normes sur $\mathcal{M}_{,,n}(1)\mathbf{K}$ à préciser, lorsque l'on identifie les éléments de $\mathcal{M}_n(\mathbf{K})$ et les endomorphismes de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{K})$ canoniquement associés. On traitera le cas plus délicat $\mathbf{K} = \mathbf{C}$.

   Donc en particulier N et N' sont des norme d'algèbre (dans le cas de $\mathcal{M}_n(\mathbf{K})$ on parle de « normes matricielles ».

3. (a) Montrer que pour tout matrice A élément de $\mathcal{M}_n(\mathbf{K})$, $\rho(A) \leq N(A)$.

   dans la suite $\mathbf{K} = \mathbf{C}$.

   (b) Soit $Q \in \mathcal{M}_n(\mathbf{C})$ une matrice inversible.

$$N_Q : \mathcal{M}_n(\mathbf{C}) \to \mathbf{R}_+, \ ; A \mapsto N(Q^{-1}AQ).$$

   Vérifier que N_Q est une norme matricielle sur $M_n(\mathbf{C})$.

   (c) Soient $A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{C})$ et $\varepsilon \in \mathbf{R}_+^*$, montrer qu'il existe une norme matricielle N_ε telle que

$$N_\varepsilon(A) < \rho(A) + \varepsilon.$$

4. Derechef $K = \mathbf{R}$. Montrer que

$$N_F \ : \ \mathcal{M}_n(\mathbf{R}) \to \mathbf{R}_+, \ ; A \mapsto (\mathrm{tr}(M^\top M))^{\frac{1}{2}}$$

est une norme.

On l'appelle *norme de Frobenius.*

5. Montrer que N_F est une norme d'algèbre (on dit aussi matricielle).
6. La norme N_F est-elle une norme subordonnée.

III. ÉTUDE D'UNE APPLICATION LINÉAIRE

Par $\mathbf{E}$ sera désigner l'espace vectoriel des applications de $[0,1]$ dans $\mathbf{R}$, continue.
Soient g un élément de $\mathbf{E}$ et L la forme linéaire

$$\mathbf{E} \to \mathbf{R}\,; f \mapsto \int_{[0,1]} gf.$$

1. On munit $\mathbf{E}$ de la norme N_2 et $\mathbf{R}$ de $|\cdot|$. Montrer que L est continue et déterminer sa norme d'opérateur.
2. On munit $\mathbf{E}$ de la norme N_1 et $\mathbf{R}$ de $|\cdot|$.
   (a) Montrer que L est continue.
   (b) Montrer que $|g|$ atteint sa borne supérieure en un point a de $[0,1]$.
   (c) Dans le cas où $a \in]0,1[$, déterminer la norme d'opérateur de L.
   (d) Conclure dans le cas général.
   (e) On considère la restriction L_1 de L à l'espace vectoriel $\mathbf{E}_1$ des applications de $[0,1]$ dans $\mathbf{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$. On prend pour g l'application $\sin\left(\frac{\pi}{2}\,\cdot\right)$. Montrer que L_1 est continue et déterminer sa norme d'opérateur lorsque E_1 est muni de la restriction de N_∞ et $\mathbf{R}$ de $|\cdot|$.
3. On munit $\mathbf{E}$ de la norme N_∞ et $\mathbf{R}$ de $|\cdot|$. Montrer que L est continue et déterminer sa norme d'opérateur.

IV. ÉTUDE D'UNE APPLICATION LINÉAIRE

1. Soit f une application linéaire sur $(\mathbf{R}^3, n_1)$ dans un espace vectoriel normé $(\mathbf{F}, \|\cdot\|)$. On note B la boule unité fermé de $(\mathbf{R}^3, n_1)$.
   (a) Montrer que B est l'intersection de 8 demi-espaces fermés de chacun desquels ont on donnera une équation. Représenter B.
   (b) Soient $P_1, P_2, \ldots, P_8$ les 8 plans affines délimitant ses demi-espaces. Les points de B. qui appartiennent à 3 de ces plans, distincts, sont appelés sommets de B. Déterminer les sommets de B.
   (c) On appelle face de B, les ensembles $P_i \cap B$, $i = 1, 2 \ldots, 8$. Combien il y a t-il de sommets par faces ?
2. Montrer qu'il existe un sommet s de B tel que $|\!|\!|\vec{f}|\!|\!| = \|\vec{f}(\vec{s})\|_{\mathbf{F}}$.
3. *Application* : déterminer $|\!|\!|\vec{f}|\!|\!|$, pour $(\mathbf{F}, \|\cdot\|_{\mathbf{F}}) = (\mathbf{R}^2, n_2)$ et $\vec{f}$ définie par :

$$f\,(x,y,z) = (8x + 5y + 4z, 2x - 3y),$$

pour tout triplet de réels (x,y,z).

4. Soit ℓ une application linéaire de $\mathbf{R}^n$ dans $(\mathbf{F}, \|\cdot\|)$. On munit $\mathbf{R}^n$ d'une norme N. Avec les notrations du TD 8 montrer qu'il existe un point x extrémal de la boule unité fermée de $(\mathbf{R}^n, N)$ tel que : $|\!|\!|\vec{\ell}|\!|\!| = N(\ell(x))$.

Pour public averti et téméraire

V. ÉQUIVALENCE DE NORMES.

Notons $\mathbf{E} = \mathcal{C}^0([0,1], \mathbf{R})$. Soient un réel $C > 0$ et $\mathbf{F}$ un sous espace vectoriel de $\mathbf{E}$ tel que :

$$\|f\|_\infty \leq C\|f\|_2, \tag{9}$$

pour tout élément f de $\mathbf{F}$.

1. Montrer que les restrictions de $\|\cdot\|_2$ et $\|\cdot\|_\infty$ à $\mathbf{F}$ sont équivalentes.
2. Montrer que $\mathbf{F}$ est de dimension finie inférieure ou égale à C^2.
3. Donner un exemple de sous-espace vectoriel $\mathbf{F}$ de $\mathbf{E}$ de dimension n et vérifiant (9) avec $C = n^{\frac{1}{2}}$.

>VI. APPLICATION INVERSIBLE DANS UN HILBERT.

Soit $(H, \langle\cdot|\cdot\rangle)$ un espace préhilbertien dans lequel toute séries absolument convergent converge (on dit que c'est un espace de Hilbert). On munira $\mathbf{H}$ de la norme euclidienne $\|\cdot\|$ associée au produit scalaire.

Soit f un endomorphisme continue de H tel qu'il existe un réel α tel que :

$$\forall x \in \mathbf{H},\ \alpha\|x\|^2 \leq \langle f(x)|x\rangle.$$

1. Montrer que $\mathrm{im}(f)$ est fermée Et que $(\mathrm{im}(f))^\top = \{0_{\mathbf{H}}\}$
2. En déduire que f est un automorphisme.
3. Montrer que f^{-1} est continu et que $\|f^{-1}\|_{\mathrm{op}} \leq \frac{1}{\alpha}$.

Travaux dirigés n° 10

I. ÉQUIVALENTS DE RESTES ET DE SOMMES PARTIELLES DE SÉRIES

Nous avons vu comment déterminer au moyen des théorèmes de sommation d'équivalents, des restes et des sommes partielles de séries à termes positifs. Nous allons aller plus loin !

1. ÉTUDE DE RESTES

   (a) Soit un réel $a > 1$. Donner un équivalent lorque n tend vers $+\infty$, de
   $$\sum_{k=n}^{+\infty} \frac{1}{n^a}.$$

   (b) Donner un développement limité à l'ordre 3 en « $\frac{1}{n}$ », de $\displaystyle\sum_{k=n}^{+\infty} \frac{1}{k^2}$.

2. ÉTUDE D'UNE SOMME PARTIELLE, CONSTANTE D'EULER

   (a) Montrer que $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \underset{n\to+\infty}{\sim} \ln n$.

   Posons pour tout élément n de $\mathbf{N}^*$, $x_n := \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \ln n$. Montrer que la suite $(x_n)_{n\in\mathbf{N}}$ converge vers un réel γ, appelé *constante d'Euler*.

   (b) Montrer que
   $$x_n = \gamma + \frac{1}{2n} + o\left(\frac{1}{n}\right), (n \to +\infty).$$

II. SUITES ITÉRÉES : TOUJOURS PLUS LOIN !

Nous allons reprendre un exercice déjà étudié, avec des outils plus puissants, le généraliser, et mieux comprendre le sens de la méthode précédemment empoyée.

Soit a un élément de $]0, \frac{\pi}{2}[$. Nous avons montré que la relation de récurrence
$$\begin{cases} u_0 = a, \\ u_{n+1} = \sin(u_n), \end{cases}$$
définit bien une suite $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ et montré que cette suite converge vers 0.

1. Nous avons montré que la suite : $\left(u_{n+1}^{-2} - u_n^{-2}\right)_{n\in\mathbf{N}}$ admet une limite non nulle .
   D'ou vient l'idée de considérer cette quantité ?
2. En utilisant les théorèmes de sommation des relations de comparaisons pour des séries à termes positifs, donner lorsque n tend vers $+\infty$, un équivalent de u_n, de la forme cn^γ, avec c et γ réels.
3. pour tout élément n de $\mathbf{N}$, on pose $a_n := u_n - cn^\gamma$. Donner un équivalent de a_n, lorsque n tend vers $+\infty$.

III. POUR ÊTRE SÛR D'AVOIR COMPRIS

1. (a) Montrer que la relation de récurrence

$$\begin{cases} u_0 = 5, \\ u_{n+1} = u_n + \frac{1}{u_n}, \end{cases}$$

définit bien une suite $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$

   (b) Montrer que $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ admet $+\infty$ comme limite

   (c) Montrer que $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \sqrt{n}$.

   (d) Montrer que $u_{1000} \in [45, 45, 1]$.

2. (a) Montrer que la relation de récurrence

$$\begin{cases} v_0 = a, \\ v_{n+1} = u_n + \exp(-v_n), \end{cases}$$

définit bien une suite $(v_n)_{n\in\mathbf{N}}$. Montrer que $(v_n)_{n\in\mathbf{N}}$ admet $+\infty$ comme limite

   (b) Donner un développement asymptotique de v_n à deux termes, lorsque n tend vers $+\infty$.

3. (a) Soit b un élément de $]1, +\infty[$. Montrer que la relation de récurrence

$$\begin{cases} x_0 = b, \\ x_{n+1} = x_n + \ln(x_n), \end{cases}$$

définit bien une suite $(x_n)_{n\in\mathbf{N}}$. Montrer que cette suite converge vers $+\infty$.

   (b) Donner un équivalent simple de $\ln(x_n)$, lorsque n tend vers $+\infty$, puis de x_n.

4. Soit $(c_n)_{n\in\mathbf{N}}$ une suite de nombres réels telles que $\lim\limits_{n\to+\infty} c_n \sum\limits_{k=0}^{n} c_k^2 = 1$. Déterminer un équivalent de c_n lorsque n tend vers $+\infty$.

IV. TRANSFORMATION DE NIELS HENRIK ABEL

La méthode suivante de sommation, qui est l'analogue discret de l'intégration par parties, est hors programme mais doit se retrouver rapidement.

Soient $(a_n)_{n\in\mathbf{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbf{N}}$ des suites réelles. Posons pour tout entier naturel n, $u_n = a_n b_n$ et $S_n = \sum\limits_{k=0}^{n} u_k$.

1. On pose $B_n := \sum\limits_{k=0}^{n} b_k$, pour tout entier naturel n. Montrer pour tout n et tout p entiers naturels que :
$$\sum_{k=1}^{p} u_{n+k} = \sum_{k=1}^{p} (a_{n+k} - a_{n+k+1})B_{n+k} \ + [a_{n+p+1}B_{n+p} - a_{n+1}B_n]$$
2. On suppose que la suite $(B_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est bornée et que la suite $(a_n)_{n\in\mathbf{N}}$ tend vers zéro en décroissant. Montrer que pour tout réel $\varepsilon > 0$ il existe un entier n_0 tel que pour tout $n \in \mathbf{N}$, tout $k \in \mathbf{N}$ si $n \geq n_0$, alors :
$$|S_{n+k} - S_n| < \varepsilon,$$
(suite de Cauchy).
3. Montrer que la suite $(S_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est bornée.
4. Montrer que la série converge.
5. Déduire de ce qui précède le théorème spécial des séries alternées.
6. Soient t un réel et α un réel strictement positif. Etudiers les séries
$$\sum_{n\geq 1} \frac{e^{int}}{n^\alpha}\ ;\ \sum_{n\geq 1} \frac{\cos(nt)}{n^\alpha}\ ;\sum_{n\geq 1} \frac{\sin{(nt)}}{n^\alpha}$$
7. Soit $\sum v_n$ une série de réels convergente. Montrer que lorsque n tend vers $+\infty$,
$$\sum_{k=0}^{n} kv_k = \mathrm{o}(n).$$
8. Soit $(w_n)_{n\in\mathbf{N}}$ une suite croissante de réels strictements positifs qui tend vers $+\infty$. Soit $(x_n)_{n\in\mathbf{N}}$ une suite de nombres complexes telle que la série $\sum \dfrac{x_n}{w_n}$ converge de somme L. Montrer que $\frac{1}{w_n} \sum\limits_{k=0}^{n} x_n$ tend vers 0, lorsque n tend vers $+\infty$.

   Indication : Considérer la quantité $R_n = \sum\limits_{k=n}^{+\infty} \frac{x_n}{w_n}$.

V. RECHERCHE D'ÉQUIVALENT

Soient a un réel > 0 et $(x_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ une suite de réels définie par rcurrence par : $x_1 = a$ et pour tout $n \in \mathbf{N}$, en désignant par $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} x_k$,
$$x_{n+1} = x_n + \frac{1}{S_n}.$$

1. Montrer que la suite $(x_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ diverge vers $+\infty$.
2. Déterminer un équivalent de x_n, lorsque n tend vers $+\infty$.

VI. SUITE DÉFINIE IMPLICITEMENT

Montrer qu'il existe une et une seule suite réelle $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ telle que pour tout $n \in \mathbf{N}$

$$u_n^5 + nu_n - 1 = 0. \tag{10}$$

Donner un développement asymptotique à deux terme de $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$.

VII. CALCUL DE SOMMES

1. Montrer la convergence et calculer la somme de la série de terme général $u_n = \frac{(-1)^n}{2n+1}$. On pourra évaluer pour commencer $\int_0^1 t^\alpha \mathrm{d}t$.
2. (a) Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$, où pour tout $n \in \mathbf{N}$, $u_n = \sum\limits_{p=1}^{n} \frac{\ln p}{p} - \frac{1}{2}(\ln(n))^2$ converge.

   (b) En déduire la valeur de

$$\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{\ln n}{n}.$$

Travaux dirigés n° 12

I. CAS DOUTEUX DANS LA RÈGLE DE D'ALEMBERT

Soit une série à termes strictement positifs, $\sum u_n$, à laquelle on peut associer deux réels a et b, avec $b > 1$ tels que :

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = 1 - \frac{a}{n} + \mathrm{O}\left(\frac{1}{n^b}\right) \ (n \to \infty)$$

1. Montrer que si $a < 0$, alors la série diverge grossièrement.
2. Montrer en utilisant la comparaison indirecte (cf. exercice du cours) à la série harmonique que si $a < 1$, alors la série diverge.

   Exemple : étudier la série de terme général

$$u_n = \sqrt{n!}\prod_{p=1}^{n} \sin\left(\frac{1}{\sqrt{p}}\right).$$

3. Dans le cas général montrer le résultat hors programme suivant :
   Il existe un réel k strictement positif tel que

$$u_n \sim \frac{k}{n^a} \ (n \to \infty).$$

   Indication : On poura étudier la série téléscopique $\sum \ln(u_{n+1}) - \ln(u_n)$.

4. Application donner la nature de la série de terme général :

$$u_n = \frac{2.4.6 \ldots\ldots\ldots\ldots (2n-2).2n}{1.3.5 \ldots\ldots (2n-1).(2n+1)}.$$

5. Nous souhaitons établir la formule de Stirling : $n! \sim \sqrt{2\pi n}\ \frac{n^n}{e^n}\ (n \to \infty)$
   (a) Posons pour tout entier naturel n, $u_n := n!n^{-n}.e^n$, montrer qu'il existe un réel k tel que $u_n \sim k\sqrt{n}$.
   (b) Posons, pour tout entier naturel n, $I_n := \int_0^{\pi/2} \sin^n t \ \mathrm{d}t$.
   Calculer pour tout entier naturel p, I_{2p} et I_{2p+1}.
   (c) Prouver que pour tout $n \in \mathbf{N}$,

$$\frac{I_{n+2}}{I_n} \leq \frac{I_{n+1}}{I_n} \leq 1.$$

   (d) En déduire que $\frac{I_{n+1}}{I_n}$ tend vers une limite que l'on déterminera, lorsque n tend vers $+\infty$.
   (e) Déduire de la question précédente la valeur de k et conclure.

II PRODUITS INFINIS

Soit $(a_n)_{n\in\mathbf{N}}$ une suite réelle. On pose pour tout entier naturel n, $P_n := \prod\limits_{k=0}^{n} a_k$.

Nous dirons que le produit infini associé, noté $\prod a_n$ converge si la suite $(P_n)_{n\in\mathbf{N}}$ converge vers une limite *non nulle*.

1. Montrer que si $\prod a_n$ converge alors la suite $(P_n)_{n\in\mathbf{N}}$ converge vers 1.

   On suppose dans la suite cette condition réalisée.

   Pour tout entier naturel n, on pose $u_n = a_n - 1$ et l'on suppose que $u_n \neq -1$.
2. Montrer qu il existe un entier naturel n_0, tel que pour tout entier $n \geq n_0$, la quantité $\ln(1+u_n)$ soit définie. Montrer que le produit $\prod a_n$ converge si et seulement si la série $\sum\limits_{n\geq n_0} \ln(1+u_n)$ converge.
3. On suppose en outre, dans cette question, que la suite $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est positive à partir d'un certain rang. Montrer que le produit $\prod a_n$ et la série $\sum u_n$ sont de même nature.
4. On ne suppose plus la suite $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ positive à partir d'un certain rang, mais que la série $\sum u_n$ converge. Montrer que $\prod a_n$ converge si et seulemement si la série $\sum u_n^2$ converge.

III. ÉCRITURE DÉCIMALE D'UN RÉEL

Quitte à retrancher à x sa partie entière, pour allèger l'écriture nous supposeros que $x \in [0,1[$.

Rappelons qu'un nombre décimal d, c'est-à-dire un réel de la forme $\frac{a}{10^N}$ où a est un élément de $\mathbf{Z}$ et N de $\mathbf{N}$ peut se mettre sous la forme :

$$x = \pm a_0 + a_1 10^1 + a_2 10^2 + ... a_N 10^N.,$$

où $a_0, a_1 a..., a_N$ sont des entiers naturels. On note alors $x = \pm a_0, a_1 a_2 ... a_N$ cette dernière forme est appelée écriture décimale de x, l'entiers naturel a_i la i^{e} décimale de x, pour $i = 1, ..., N$.

Nous nous proposons de fournir à tout réel x une écriture similaire. Quitte à retrancher à x sa partie entière, pour allèger l'écriture, nous supposeros que $x \in [0,1[$.

Soit x un élément de $[0,1[$. On définit les suites réelles $(x_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ $(y_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ et $(a_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ par, pour tout entier n supérieur ou égal à 1,

$$x_n := 10^{-n} \lfloor 10^n x \rfloor\,,\ , y_n := x_n + 10^{-n} \text{ et } a_n := \lfloor 10^n x \rfloor - 10 \left\lfloor 10^{n-1} x \right\rfloor).$$

1. Un exemple

   On prend pour x le réel $0,123456$, c'est-à-dire, on le rappelera dans la suite, le réel $\sum\limits_{i=1}^{6} i 10^{-i}$. Déterminer pour ce choix de x les suites $(x_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ $(y_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ et $(a_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$.
2. Écriture décimale

   (a) Montrer que pour tout entier $n \geq 1$, $x_n \leq x < y_n$.

   On appelle x_n (resp. y_n) valeur approchée de x par défaut (resp. par excès) à 10^{-n} près.

   (b) Montrer que les suites $(x_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ et $(y_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ sont adjacentes. Quelle est leur limite ?

   (c) Montrer que pour tout entier $n \geq 1$,

   $$x_n = \sum_{i=1}^{n} a_i 10^{-i}.$$

   Le réel x est donc la somme de la série $\sum\limits_{n\geq 1} a_n 10^{-n}$. La suite $(a_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ s'appelle la suite des décimales de x.
3. Étude de la suite des décimales de x

   On note $\mathcal{S}$ l'ensemble des suites $(a_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ d'éléments de $\{0, 1, \ldots, 9\}$, qui ne sont pas constamment égales à 9 à partir d'un certain rang, c'est-à-dire, que pour tout élément N de $\mathbf{N}^*$, il existe un entier n tel que $n \geq N$ et $a_n \neq 9$.

(a) Montrer que pour tout élément x de $[0,1[$, la suite $(a_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ de ses décimales est élément de $\mathcal{S}$.

(b) Montrer que l'application δ qui à un élément x de $[0,1[$ associe la suite de ses décimales est une bijection de $[0,1[$ sur $\mathcal{S}$.

Le caractère bijectif de δ autorise à noter un élément de $[0,1[$, $x = 0,a_1a_2a_3a_4\ldots a_n\ldots$, où $(a_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ désigne la suite de ses décimales. On dit qu'un élément x de $[0,1]$ est décimal, si par définition, la suite de ses décimales est nulle à partir d'un certain rang. Si $\delta(x)$ est nulle à partir du rang n_0, on notera simplement $x = 0,a_1a_2\ldots a_{n_0-1}$.

4. Caractérisation des rationnels

(a) Montrer que le nombre $0,777777777\ldots$ (la suite des décimales est constante égale à 7) est rationnel.

Même question pour les nombres $0,17891789\ldots1789\ldots$ et $0,12345292629\ldots29\ldots$.

(b) Soit x un élément de $[0,1[$, on suppose que la suite de ses décimales $(a_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ est périodique à partir d'un certain rang, c'est-à-dire qu'il existe des entiers n_0 et p strictement positifs tels que pour tout entier n supérieur ou égal à n_0, $a_{n+p} = a_n$. L'entier p est appelée période de la suite. Montrer que x est rationnel.

(c) Montrer, réciproquement que pour tout élément x de $[0,1[$ rationnel, $\delta(x)$ est périodique à partir d'un certain rang.

5. Montrer que l'ensemble $\mathbf{R}$ n'est pas dénombrable.

IV. Nombres de Liouville

Compléments pour public averti

On dit qu'un nombre réel est algébrique si, par définition, il est la racine d'un polynôme à coefficients entiers. Par exemple 29 ou $\sqrt{2}$ sont algébriques. Nous étudierons un peu en exercice les nombres algébriques dans un chapitre suivant. Un nombre qui n'est pas algébrique est dit transcendant, c'est par exemple le cas de π ou e. Nous allons montrer qu'il existe beaucoup de nombres transcendants.

Soit x un réel.

1. On suppose que x est racine du polynôme à coefficients entiers de degré $m \geq 1$,

$$P = a_0X^m + a_1X^{m-1} + \cdots + a_m$$

.

Soit M le plus grand des nombre réels $\left|\frac{a_j}{a_0}\right|$, $j = 1,2,\ldots,m$. Montrer que toute racine de P à un module strictement inférieur à $1 + M$.

2. On suppose toujours x racine de P. Soit $\frac{p}{q}$, avec $p \in \mathbf{Z}$ et $q \in \mathbf{N}^*$ une valeur rationnelle approchée de x à $\frac{1}{q}$ près, qui n'est pas une racine rationnelle de P.

(a) Montrer qu'il existe un réel α vérifiant $|\alpha| \leq M + 2$ tel que :

$$P\left(\frac{p}{q}\right) = \left(\frac{p}{q} - x\right)P'(\alpha).$$

(b) En déduire l'existencence d'un entier $K \geq 0$ qui ne dépend que des coefficients de P tel que :

$$\frac{1}{q^m} \leq \left|P\left(\frac{p}{q}\right)\right| < \left|x - \frac{p}{q}\right|K.$$

3. Soit un entier naturel $m' \geq 1$. On suppose que l'ensemble des entiers $q' \geq 1$ tels qu'il existe $p' \in \mathbf{Z}$ tel que :
$$\left| x - \frac{p'}{q'} \right| \leq \frac{1}{q'^{m'+1}},$$
est infini. Montrer que x n'est pas racine d'un polynôme à coefficient entiers de degré m'.
4. Nombres de Liouville
Soit le réel donné par son écriture décimale
$$\alpha = \sum_{n=1}^{\infty} a_n 10^{-n!},$$
où $(a_n)_{n \in N^*}$ est une suite à valeurs dans $\{0, 1, \ldots, 9\}$ qui n'est pas à partir d'un certain rang constante à 0. Un tel nombre réel est dit *nombre de Liouville.*
   (a) En étudiant la valeur approchée par défaut de α à $\frac{1}{10^{m!}}$ près, pour m entier naturel, montrer que α est transcendant.
   (b) Montrer que l'ensemble des nombres de Liouville est en bijection avec $]0, 1[$.
   Il y a « beaucoup » de nombres de Liouville et plus encore de nombres transcendants !

IV. Fractions continues

Soit α un réel. On définit la procédure suivante.

```
Procédure P
```

- ``Etape 0''
  $i = 0$; $x := \alpha$; $a := E(x)$;
- ``Etape i''
  tant que $x - a \neq 0$ faire :
  $i = i + 1$; $x = \frac{1}{x-a}$; $a = E(x)$;
  fin (de boucle ``tant que'').

```
Fin de procédure
```

En notant x_i et a_i les valeurs respectives de x et a fournies par la i^{e} étape de la procédure, on dispose donc, soit de suites $(x_i)_{i\in\mathbf{N}}$ et $(a_i)_{i\in\mathbf{N}}$, soit de suites finies $(x_0, \ldots, x_n)$ et $(a_0, \ldots, a_n)$, selon que la procédure ne se termine pas ou se termine à l'étape n.

1. Soit n un élément de $\mathbf{N}^*$. On suppose que la procédure s'est déroulée jusqu'à l'étape n. Vérifier que :

$$\alpha = a_0 + \frac{1}{x_1},\ \alpha = a_0 + \frac{1}{a_1 + \frac{1}{x_2}}, \ldots,\ \alpha = a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{\cdots \frac{1}{x_n}}}},$$

2. Exemples
   Déterminer les suites (finies ou non) $(a_i)_{i\geq 0}$, pour $\alpha = \frac{225}{141}$ et $\alpha = \sqrt{2}$.
3. Cas rationnel
   (a) Montrer que si la procédure se termine, alors α est rationnel.
   (b) On suppose que α est rationnel. Il existe donc (p, q) éléments de $\mathbf{Z} \times \mathbf{N}^*$) tels que $\alpha = \frac{p}{q}$ et p et q premiers entre eux. Donner une procédure calculant les termes de la suites $(a_i)_{i\geq 0}$, à partir de p et q. montrer que cette procédure se termine. De quel algorithme s'agit-il en fait ?
   (c) Conclure que la suite $(a_i)_{i\geq 0}$ est finie si et seulement si α est rationnel.
4. Cas irrationnel
   On Suppose dans la suite que α n'est pas rationnel. Pour tout élément n de $\mathbf{N}$ on note R_n le rationnel :

$$R_n := a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{\cdots \frac{1}{a_n}}}},$$

   On dit que R_n est la (fraction continue) réduite d'ordre n de α. On se propose de montrer que la suite $(R_n)_{n\in\mathbf{N}}$ tend vers α.

   On définit les suites d'entiers $(P_n)_{n\in\mathbf{N}}$ et $(Q_n)_{n\in\mathbf{N}}$ par

$$\begin{array}{lll} P_0 = a_0, & Q_0 = 1, & \\ P_1 = a_0a_1 + 1, & Q_1 = u_1, & \\ P_n = P_{n-1}a_n + P_{n-2} & Q_n = Q_{n-1}a_n + Q_{n-2}, & \text{pour tout } n \geq 2. \end{array}$$

   (a) Montrer que pour tout entier naturel n, $R_n = \dfrac{P_n}{Q_n}$.

(b) Montrer que pour tout entier $n \geq 1$,

$$P_n Q_{n-1} - P_{n-1} Q_n = (-1)^n \tag{11}$$

(c) Montrer que pour tout entier naturel n, $\dfrac{P_n}{Q_n}$ est une fraction irréductible.

(d) Montrer que pour tout entier $n \geq 1$,

$$\alpha = \frac{P_n x_{n+1} + P_{n-1}}{Q_n x_{n+1} + Q_{n-1}}. \tag{12}$$

En déduire que

$$\left|\alpha - \frac{P_n}{Q_n}\right| < \left|\frac{P_{n+1}}{Q_{n+1}} - \frac{P_n}{Q_n}\right|.$$

(e) Conclure.

(f) Montrer que

$$\alpha = \frac{P_0}{Q_0} + \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{Q_n Q_{n+1}}.$$

Discuter suivant les valeurs de n si la réduite d'ordre n est une approximation par excés ou par défaut de α.

5. Montrer que si la suite $(a_i)_{i\geq 0}$ est périodique à partir d'un certain rang, alors α est racine d'un polynôme du second degré à coefficients entiers.

   Indication : On pourra commencer par le cas où $(a_i)_{i\geq 0}$ est périodique.

V. Irrationnalité de π

On suppose que π est rationnel. Il existe donc $(a,b) \in \mathbf{N} \times \mathbf{N}^*$ tel que $\pi = \frac{a}{b}$. Pour tout élément n de $\mathbf{N}$, on considère le polynôme : $p_n = \frac{1}{n!} X^n (bX - a)^n$.

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbf{N}$, les dérivées successives de p_n prennent des valeurs entières en 0 et en π.
2. Pour tout élément n de $\mathbf{N}$, on pose $I_n := \int_0^\pi p_n(t) \sin t dt$. Montrer que la suite $(I_n)_{n\in\mathbf{N}}$ converge vers 0.
3. Montrer que pour tout élément n de $\mathbf{N}$, I_n est un entier.
4. Conclure à l'irrationnalité de π.

A4pasdicijetelefaissavoir !

Travaux dirigés n° 13

I . RÉGULARITÉ D'APPLICATIONS

1– Soit F l'application de $\mathbf{R}^2$ dans $\mathbf{R}^2$

$$F\ :\ \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}\,;\ (x,y) \mapsto \begin{cases} \dfrac{x\sin y - y \sin x}{x^2+y^2},\ \text{pour } (x,y) \neq (0,0), \\ 0,\ \text{pour } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

a) Montrer que F est de classe $\mathcal{C}^0$.
b) Montrer que F est de classe $\mathcal{C}^1$.
c) Est-ce que F est de classe $\mathcal{C}^2$?

2– Soit g une application de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$. Soit F l'application :

$$F\ :\ \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}\,;\ (x,y) \mapsto \begin{cases} \dfrac{g(x)-g(y)}{x-y},\ \text{pour } x \neq y, \\ g'(x),\ \text{pour } x = y. \end{cases}$$

a) Montrer que F est continue.
b) Montrer que si g est deux fois dérivable en un point a de $\mathbf{R}$, alors F est différentiable en (a,a).

II. RÉGULARITÉ DE QUELQUES NORMES

Soient n un entier naturel non nul. On considère les applications suivantes de $\mathbf{R}^n$ dans $\mathbf{R}$:

$$\mathrm{N}_\infty\ :\ (x_1,x_2,...,x_n) \mapsto \sup_{i\in[\![1,n]\!]} |x_i|\,,$$

$$\mathrm{N}_2\ :\ (x_1,x_2,...,x_n) \mapsto \left(\sum_{i=1}^n |x_i|^2\right)^{\frac{1}{2}},$$

$$\mathrm{N}_1\ :\ (x_1,x_2,...,x_n) \mapsto \sum_{i=1}^n |x_i|.$$

1– Montrer que les applications N_∞, N_2 et N_1 sont continues.
2– Pour $n=2$ représenter les graphes de ces trois applications.
À partir de là on pourra se limiter à $n=2$.
3– En quel point de $\mathbf{R}^n$ chacune de ces applications admet-elle des dérivées partielles d'ordre 1, par rapport aux n variables. On pourra commencer par le cas $n=2$.
4– Déterminer le plus grand ouvert U, tel que la restriction de N_2 à U soit de classe $\mathcal{C}^1$. Déterminer la différentielle de N_2 en un élément $\vec{a}$ de U. Exprimer pour $\vec{h}$ élément de $\mathbf{R}^n$, $\mathrm{dN}_2(\vec{a})\cdot\vec{h}$ grâce au produit scalaire canonique de $\vec{a}$ par H.
5– Déterminer le plus grand ouvert U tel que la restriction de N_1 à U soit de classe $\mathcal{C}^1$. Même question pour N_∞.
6– Soit N une norme sur un espace vectoriel $\mathbf{E}$ de dimension finie non nulle. Montrer que N n'est pas différentiable en $\vec{0}_{\mathbf{E}}$.

III. DIFFERENTIABILITÉ D'UNE DISTANCE

Soit d une distance sur un espace vectoriel de dimension finie $\mathbf{E}$ et Ω un ouvert de $\mathbf{E}$.

On se propose d'étudier la différentiabilité de

$$\delta\,;\ \Omega^2 \to \mathbf{R}\,;\ (m,n) \mapsto d(m,n).$$

On suppose que δ est différentiable sur Ω^2 et l'on considère (m_0,n_0) un point de Ω^2

1. Que vaut $\mathrm{d}\delta(m_0,m_0)$?
2. En déduire que pour tout vecteur $\vec{h}$ de $\mathbf{E}$, $\mathrm{D}_{(\vec{h},0_{\mathbf{E}})}\delta(m_0,n_0)=0$.
3. En déduire que δ est non différentiable sur Ω^2.

IV. DIFFERENTIABILITÉ DE LA DISTANCE À UN FERMÉ

(réservé à un publique averti)

Soient n un entier naturel non nul et $\mathbf{F}$ un fermé de $\mathbf{R}^n$ non vide. On notera Ω le complémentaire de $\mathbf{F}$. On munit $\mathbf{R}^n$ de sa structure euclidienne canonique, $\langle\cdot|\cdot\rangle$ désigne le produit scalaire canonoique et $\|\cdot\|$ la norme euclidienne associée.

1. Montrer que l'application distance à F,
$$\delta\ :\ \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}\,;\ m \mapsto d(m,F)$$
est continue.
2. Montrer que pour tout point m de Ω, il existe au moins un élément f de F tel que $\|f-m\|=d(m,F)$.

   Dans la suite, pour tout élément m de Ω on note $A(m) := \{f \in F | \|f-m\| = d(m,F)\}$. Et on se propose d'étudier la différentiabilité de l'application
$$\phi\ :\ \Omega\,;\ m \mapsto d(m,F)^2$$
3. Montrer que ϕ est différentiable en un point m de Ω si et seulement si $\delta_{|\Omega}$ l'est.
4. Supposons que ϕ soit différentiable en un point m_0 de Ω. Soit f un point de $A(m_0)$. Montrer que $\vec{\nabla}\phi(m_0)=2(m_0-f)$.
5. En déduire une condition nécessaire sur $A(m)$ pour que ϕ soit différentiable en un point m de Ω.
6. Soit m_0 un point de Ω. On suppose que $A(m_0)$ est un singleton : $A(m_0)=\{f_0\}$.
   (a) On se propose de montrer que $d(f_0, A(m_0+\vec{h})) \underset{\vec{h}\to\vec{0}_{\mathbf{E}}}{\to} 0$.

      Supposons que $d(f_0, A(m_0+\vec{h}))$ ne tende pas vers 0.

      i. Montrer qu'il existe un réel $\delta>0$ et une suite $(p_n)_{n\in\mathbf{N}}$ d'éléments de $\mathbf{E}$ qui tend vers m_0 tel que $d(f_0, A(p_n)) \geq \delta$ pour tout $n \in \mathbf{N}$.
      ii. On note $G=\{y\in F | \|f_0-y\| \geq \delta\}$. Montrer que $\phi(p_n)=d(p_n,G)^2$.
      iii. En déduire que $\phi(p_n)$ ne tend pas vers $\phi(m_0)$, lorsque n tend vers $+\infty$.
      iv. conclure.

   (b) On se propose d'en déduire que ϕ est différentiable en m_0.

      i. Montrer que pour tout vecteur $\vec{h}$ de $\mathbf{E}$ tel que $m_0+\vec{h}$ soit dans Ω, et tout élément f_h de $A(m_0+\vec{h})$
      $$\phi(m_0+\vec{h}) \geq \phi(m_0) + 2\langle m_0 - f_h | \vec{h}\rangle + \|\vec{h}\|^2.$$
      ii. Montrer que pour tout vecteur $\vec{h}$ de $\mathbf{E}$ tel que $m_0+\vec{h}$ soit dans Ω,
      $$\phi(m_0+\vec{h}) \leq \phi(m_0) + 2\langle m_0 - f | \vec{h}\rangle + \|\vec{h}\|^2.$$
      iii. Conclure

   (c) Donner une condition nécessaire et suffisante pour que ϕ soit différentiable en un point m de Ω.

IV. INJECTIVITÉ LOCALE (5/2)

Soient U un ouvert de $\mathbf{R}^n$ et , f une application de U dans $\mathbf{R}^n$ de classe $\mathcal{C}^1$ et a un point de U tel que la différentielle en a soit un isomorphisme. Démontrer qu'il existe un voisinage V de a tel que la restriction de fà V soit injective.

VI. THÉORÈME D'INVERSION LOCALE

Théorème d'inversion locale : *Soit Ω un ouvert d'un espace vectoriel $\mathbf{E}$ de dimension finie et f une application de Ω dans un espace de dimension finie $\mathbf{F}$ de classe $\mathcal{C}^1$. Si il existe a élément de Ω tel que $\mathrm{d}f(a)$ soit un isomorphisme, alors il existe un voisinage U de a un voisinage V de $f(a)$ tels que f induise un $\mathcal{C}^1$ difféomorphisme de U sur V.*

1. Montrer qu'il suffit pour prouver le théorème, de montrer, avec ses notations le résultat pour $\mathbf{F} = \mathbf{E}$, $a = 0$, $f(a) = 0$ et $\mathrm{d}f(a) = \mathrm{id}_\mathbf{E}$, chose qui sera faite dans la suite. On considérera également une norme $\|\cdot\|$ sur $\mathbf{E}$.
2. Résultat technique et classique —
   Montrer que $\mathrm{GL}(\mathbf{E})$ est ouvert et que
   $$\mathcal{I} \ : \ \mathrm{GL}(\mathbf{E}) \to \mathrm{GL}(\mathbf{E})\,;\ \ell \mapsto \ell^{-1}$$
   est continue.
3. On pose $g \ : \ \Omega \to \mathbf{E}\,;\ x \mapsto x - f(x)$. Montrer qu'il existe un réel $r > 0$ tel que pour tout tout élément x de $\mathrm{B_f}(0, 2r)$, $\|g(x)\| \leq r$.
4. Soit y élément de $\mathrm{B_f}(0, r)$. On considère l'application $h \ : \ \mathrm{B_f}(0, 2r) \to \mathbf{E}\,;\ x \mapsto y + g(x)$. Montrer que h est à valeurs dans $\mathrm{B_f}(0, 2r)$ et $\frac{1}{2}$-contractante. En déduire que f induit une bijection d'un voisinage ouvert de 0 inclus dans $\mathrm{B_f}(0, 2r)$ sur une partie de $\mathrm{B_f}(0, r)$, noté $\tilde{f}$.
5. Montrer que $\tilde{f}^{-1}$ est 2-lipschitzienne.
6. Montrer que $\tilde{f}^{-1}$ est différentiable sur $\mathrm{B_o}(0, r)$, donner sa différentielle au moyen $\mathrm{d}f$ et de $\mathcal{I}$.
7. Conclure.
8. On se propose de montrer la forme du théorème des fonctions implicites suivante :

   Théorème des fonctions implicites : *Soient n et p des élément de $\mathbf{N}^*$. Soit F une application d'un ouvert Ω de $\mathbf{R}^{n+p}$ identifié à $\mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^p$, à valeurs dans $\mathbf{R}^p$ de classe $\mathcal{C}^1$:*
   $$F \ : \ (x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_p) \mapsto (f_1(x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_p), \ldots, f_p(x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_p),)$$
   Soit (a, b) un point de $\mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^p$ tel que $F(a, b) = 0$ et $\det\left(\frac{\partial f_i}{\partial y_j}(a, b)\right)_{\substack{i=1,\ldots,p\\ j=1,\ldots,p}} \neq 0$. Alors, il existe un voisinage U dans $\mathbf{R}^n$ de a, un voisinage V dans $\mathbf{R}^p$ de b et une application φ de U dans $\mathbf{R}^p$, de classe $\mathcal{C}^1$ et à valeurs dans V tels que
   - *$U \times V \subset \Omega$;*
   - *Pour tout élément (x, y) de $U \times V$, $F(x, y) = 0$ si et seulement si $y = \varphi(x)$.*

   (a) On considère l'application $f_1 \ : \ \Omega \to \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^p\,;\ (x, y) \mapsto (x, F(x, y))$. Montrer que $\mathrm{d}f_1(a, b)$ est inversible.

   (b) Déduire de la sous-question précédente le théorème des fonctions implicites.

VII. ÉQUATION AU D'ÉRIVÉES PARTILLES

Soit en entier $n \geq 2$. On considère une application $\vec{F}$ de $\mathbf{R}^n$ dans $\mathbf{R}^n$, de classe $\mathcal{C}^1$, $f_1, f_2, \ldots, f_n$ désigne la première la deuxième,..., la n^{e} composante de F. On s'intéresse à l'équation aux dérivées partielles

$$f_1(x_1, \ldots, x_n)\frac{\partial y}{\partial x_1} + \cdots + f_n(x_1, \ldots, x_n)\frac{\partial y}{\partial x_n} \tag{13}$$

Une solution de (13) est par définition, toute application g d'un ouvert U de $\mathbf{R}^n$ dans $\mathbf{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$, telle que : $f_1\frac{\partial g}{\partial x_1} + \cdots + f_n\frac{\partial g}{\partial x_n} = 0_{U\to\mathbf{R}}$. On considérera aussi le système différentiel :

$$\begin{cases} x_1' = f_1(x_1, x_2, \ldots, x_n), \\ x_2' = f_2(x_1, x_2, \ldots, x_n), \\ \vdots \\ x_n' = f_n(x_1, x_2, \ldots, x_n), \end{cases} \tag{14}$$

que nous écrirons encore de manière condensée : $X' = F(X)$. On admet que pour tout élément X_0 de $\mathbf{R}^n$ il existe une et une seule solution maximale de (14) qui prenne en 0 la valeur X_0 (théorème de Cauchy). On admet de plus que F est telle que tout solution maximale soit définie sur $\mathbf{R}$.

1. Soit g une solution de (13) sur un ouvert U, montrer que g est une intégrale première de (14), c'est-à-dire que pour toute solution Φ de (14) à valeurs dans U, $g \circ \Phi$ est constante.
2. Soient U un ouvert de $\mathbf{R}^n$ et h un élément $\mathcal{C}^1(U, \mathbf{R})$ dans $\mathbf{R}$ qui est une intégrale première de (14). Montrer que h est solution sur U de (13).
3. Soient U un ouvert de $\mathbf{R}^n$ et $h_1, h_2, \ldots, h_{n-1}$ des éléments $\mathcal{C}^1(U, \mathbf{R})$, intégrales premières de (14). Montrer que pour toute application G élément de $\mathcal{C}^1(\mathbf{R}^{n-1}, \mathbf{R})$,

   $$U \to \mathbf{R}\,;\ X \mapsto G(h_1(X), h_2(X), \ldots, h_{n-1}(X))$$

   est solution sur U de (13).

   Si l'on suppose de plus que que pour tout $X \in U$, $\operatorname{rg}(\mathrm{d}h_1(X), \ldots, \mathrm{d}h_n(X)) = n-1$, alors nous allons montrer que toute solution sur U de (13) est de la forme précédente au voisinage d'un point A en lequel le champ F ne s'annule pas. On aurait pu aussi établir l'existence de telles intégrales premières au voisinage de tout point de $\mathbf{R}^n$. Nous allons examiner dans la suite le cas $n = 2$.

4. On suppose dans cette question que $n = 2$ et que h est une intégrale première de (14) et qu'il existe A point de U tel que $F(A)$ soit non nul et $\operatorname{rg}(\mathrm{d}h(A)) = 1$, c'est-à dire telle que $\mathrm{d}h$ ne s'annule pas en A. On considère ℓ_2 une forme linéaire sur $\mathbf{R}^2$ telle que $(\mathrm{d}h(A), \ell_2)$ soit une base de $(\mathbf{R}^2)^*$, dual de $\mathbf{R}^2$.
5. Montrer qu'il existe un voisinage V de A inclus dans U tel que pour tout $X \in V$ $\operatorname{rg}(\mathrm{d}h(X), \ell_2) = 2$.
6. Montrer q'il existe un voisinage W de A inclus dans V tel que $\Psi = (h, \ell_2)$ induise un $\mathcal{C}^1$-difféomorphisme de W sur $\Psi(W)$.

   On note Φ le difféomorphisme réciproque de $\Psi(W)$ sur W.
7. Soit g un élément de $\mathcal{C}^1(W, \mathbf{R})$. Posons $\tilde{g} = g \circ \Phi$, c'est-à-dire :

   $$\tilde{g}\ :\ \Psi(W) \to \mathbf{R}\,;\ (u_1, u_2) \mapsto g(\Phi(u_1, u_2))\ \ g\ :\ W \to \mathbf{R}\,;\ (x_1, x_2) \mapsto \tilde{g}(h(x_1, x_2), \ell_2(x_1, x_2)).$$

   Montrer que g est solution de (13) si et seulement si $\frac{\partial \tilde{g}}{\partial u_2}$ est nulle sur $\Phi(W)$.
8. En déduire au voisinage de A la forme générale des solution de (13).
9. Généraliser ce résultat pour n quelconque.

Travaux dirigés n° 13

ÉQUATION DE RÉFÉRENCE.

L'équation aux dérivées partielles la plus simple est $\partial_1 f = 0$. Par ailleurs, on résoud le plus souvent les équations plus complexes en se ramenant à cette équation. Toutefois en dépit de son apparente simplicité, la résolution d'une telle équation est loin d'être triviale. En particulier, il est faut se garder de croire, que les solutions sont toujours les applications « qui ne dépendent pas de x », comme on l'entend souvent. En fait tout dépend du domaine sur lequel on résout l'équation, comme le montre le présent exercice.

1– Soit f une application de $\mathbf{R}^2$ dans $\mathbf{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$. montrer que $\partial_1 f = 0_{\mathbf{R}^2\to\mathbf{R}}$, si et seulement si, il existe une application g de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$, telle que pour tout (x, y), élément de $\mathbf{R}^2$,

$$f(x, y) = h(y).$$

2- Posons $U = \mathbf{R}^2 - \{(0, y), y \in \mathbf{R}_+\}$; et soit f l'application,

$$f\ :\ \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}\,;\ (x, y) \mapsto \begin{cases} 0,\ \text{pour } y < 0, \\ 0,\ \text{pour } y \geq 0 \text{ et } x < 0, \\ y^3 \text{ pour } y \geq 0 \text{ et } x > 0. \end{cases}$$

Montrez que f est de classe $\mathcal{C}^1$ et que $\partial_1 f$ est nulle.

Ainsi f est-elle une application de classe $\mathcal{C}^1$, qui dépend de x, en effet $f(-1, 1) \neq f(1, 1)$, et telle que $\frac{\partial f}{\partial x} = 0$.

2– Soit f une application d'un ouvert U de $\mathbf{R}^2$ dans $\mathbf{R}$, de classe $\mathbf{C}^1$, telle que $\partial_1 f$ soit nulle. f peut-elle dépendre ou non de x dans les cas suivants :

a) U est le disque ouvert unité : $U = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2, x^2 + y^2 < 1\}$.

b) $U = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2, x^2 - y^2 < 1\}$.

c) $U = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2, y^2 - x^2 < 1\}$.

II . ÉQUATONS AUX DÉRIVÉES PARTIELLES LINÉAIRES À COEFFICIENTS CONSTANTS

On s'intéresse aux équations aux dérivées partielles de la forme,

$$\sum_{i=1}^{p} a_i \frac{\partial f}{\partial x_i} = 0,\ a_i \in \mathbf{R},\ \textit{pour } i = 1, \ldots p.$$

dire que f est solution revient à dire que $\mathrm{D}_{\vec{v}} = 0$, où $\vec{v}$ désigne le vecteur $(a_1, a_2, \ldots, a_p)$. Considérons alors une base $\mathcal{B}'$ de $\mathbf{R}^p$, dont le premier vecteur est $\vec{v}$. Si $\tilde{f}$ est « l'expression de f » dans les coordonnées $(u_1, u_2, \ldots, u_p)$ dans la nouvelle base $\mathcal{B}'$, la condition $\mathrm{D}_{\vec{v}} f = 0$, devient naturellement, comme le montrera un calcul élémentaire $\frac{\partial \tilde{f}}{\partial u_1} = 0$. On est rammené à résoudre une équation du type étudier dans le paragraphe précédent. Exemple :

1– On se propose de déterminer l'ensemble S des éléments f de $C^1(\mathbf{R}^2, \mathbf{R})$ tels que, pour tout élément (x, y) de $\mathbf{R}^2$,

$$2\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) + 3\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 0.$$

a) Posons $\vec{v} = (2,3)$ et $\vec{w} = (0,1)$ [9], de sorte que $(\vec{v}, \vec{w})$ soit une base de de $\mathbf{R}^2$, notée $\mathcal{B}'$. Soit L l'application de $\mathbf{R}^2$ dans $\mathbf{R}^2$ qui à tout élément (x,y) de $\mathbf{R}^2$ associe le couple (u_1,u_2) de ses coordonnées dans $\mathcal{B}'$. L est un isomorphisme de $\mathbf{R}^2$ sur $\mathbf{R}^2$. Expliciter L et L^{-1}.

b) Soit f un élément de $\mathcal{C}^1(\mathbf{R}^2,\mathbf{R})$, on note $\tilde{f}$ l'application,

$$\tilde{f} \ : \ \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2\,;\ (u_1,u_2) \mapsto f(L^{-1}(u_1,u_2)),$$

autrement dit, $\tilde{f} = f \circ L^{-1}$. Montrer que $\tilde{f} \in \mathcal{C}^1(\mathbf{R}^2,\mathbf{R})$.
Soit

$$\mathcal{I} \ : \ \mathcal{C}^1(\mathbf{R}^2,\mathbf{R}) \to \mathcal{C}^1(\mathbf{R}^2,\mathbf{R})\,;\ f \mapsto f \circ L^{-1}.$$

Montrer que $\mathcal{I}$ est un isomorphisme dont on précisera l'isomorphisme réciproque $\mathcal{J}$.

c) Soit f un élément de $\mathcal{C}^1(\mathbf{R}^2,\mathbf{R})$, on note $\tilde{f}$ l'application, $f \circ L^{-1}$. Calculer, pour tout élément (u_1,u_2) de $\mathbf{R}^2$, $\dfrac{\partial \tilde{f}}{\partial u_1}(u_1,u_2)$ en fonction des dérivées partielles de f au point $L^{-1}(u_1,u_2)$. En déduire que $\mathcal{I}$ induit une bijection de S sur l'ensemble $\tilde{S}$ des éléments g de $C^1\left(\mathbf{R}^2,\mathbf{R}\right)$, tels que, pour tout élément (u_1,u_2) de $\mathbf{R}^2$,

$$\frac{\partial g}{\partial u_1}(u_1,u_2) = 0.$$

d) En déduire S.

2–Déterminer l'ensemble S' des éléments f de $C^1\left(\mathbf{R}^2,\mathbf{R}\right)$ tels que, pour tout élément (x,y) de $\mathbf{R}^2$,

$$2\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) + 3\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = x + y.$$

3–Déterminer l'ensemble S'' des éléments f de $C^1\left(\mathbf{R}^2,\mathbf{R}\right)$ tels que, pour tout élément (x,y) de $\mathbf{R}^2$,

$$2\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) + 3\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = f.$$

9. On aurait pu prendre tout autre vecteur non colinéaire à $\vec{v}$.

4–Déterminer l'ensemble S' des éléments f de $C^1(\mathbf{R}^3, \mathbf{R})$ tels que, pour tout élément (x, y, z) de $\mathbf{R}^2$,

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y, z) + \frac{\partial f}{\partial y}(x, y, z) + \frac{\partial f}{\partial z}(x, y, z) = 0.$$

4–UN EXEMPLE D'ORDRE 2 : L'ÉQUATION D'ONDE

Soit α un réel strictement positif. On se propose de déterminer l'ensemble S_2 des éléments f de $C^2(\mathbf{R}^2, \mathbf{R})$ tels que, pour tout élément (x, y) de $\mathbf{R}^2$,

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y) - \frac{1}{\alpha^2}\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y) = 0.$$

a) Montrer qu'il existe des réels a, b, c, et d tels que pour tout application f élément de $\mathcal{C}^2(\mathbf{R}^2, \mathbf{R})$,

$$\mathrm{D}_{(a,b)}\left(\mathrm{D}_{(c,d)}f\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} - \frac{1}{\alpha}^2 \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0.$$

b) Déterminer l'ensemble S_1 des éléments f de $C^1(\mathbf{R}^2, \mathbf{R})$ tels que, $\mathrm{D}_{(a,b)}f = 0$.

c) Déterminer l'ensemble S_2.

III . ÉQUATONS AUX DÉRIVÉES PARTIELLES LINÉAIRES À COEFFICIENTS NON CONSTANTS

On se propose de déterminer l'ensemble S des éléments f de $C^1(\mathbf{R}^2 - \{(0,0)\}, \mathbf{R})$ tels que, pour tout élément (x, y) de $\mathbf{R}^2 - \{(0,0)\}$,

$$y\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) - x\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 0.$$

Autrement dit on cherches les applications f telles qu'en tout point (x, y) de $\mathbf{R}^2 - \{(0,0)\}$, la dérvée de f selon le vecteur $(y, -x)$, $\mathrm{D}_{(y,-x)}f(x, y)$ soit nulle. On intuite donc, que, pour que f soit solution, il faut et ilsuffit qu'elle soit constante sur les orbites du champ $\vec{v}\ :\ (x, y) \mapsto (y, -x)$ (lignes de champ) ; en effet la nulité de la dérivée selon le champ $\vec{v}$, c'est-à-dire tangentiellement aux lignes de champ traduit naturellement la constance le long de cette ligne. Or Les orbites du champ sont les solutions du système

$$\begin{cases} x' = y, \\ y' = -x, \end{cases}$$

ce sont donc des cercles de centre $(0,0)$ (le champ $\vec{v}$ est orthoradial!). Ceci nous invite donc à « passer en polaire ». On s'attend, d'après ce que nous avons dit, à ce que les éléments de S soient des fonctions constantes sur ces cercles, c'est-à-dire, dont l'expression en polaires ne dépend pas de θ. On va donc s'employer à étudier la dérivation « en θ ».

1– Désignons par U, l'ensemble $\mathbf{R}^2$ privé de $\{(x, 0), x \in \mathbf{R}_-\}$, partie négative de l'axe des x. On note S_U l'ensemble des éléments f de $C^1(U, \mathbf{R})$ tels que, pour tout élément (x, y) de U,

$$y\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) - x\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 0.$$

a) Déterminer un ouvert Ω de $\mathbf{R}_+ \times \mathbf{R}$, produit de deux intervalles I et J $(\Omega = I \times J)$, tel que $\Omega \to \mathbf{R}^2\ ;\ (r, \theta) \mapsto (r\cos\theta, r\sin\theta)$ induise une bijection p de Ω sur U.
Montrer que p et sa bijection réciproque sont $\mathcal{C}^1$.

b) Soit f un élément de $\mathcal{C}^1(U, \mathbf{R})$. Posons $\tilde{f} = f \circ p$. Montrer que $\tilde{f} \in \mathcal{C}^1(\Omega, \mathbf{R})$.
Soit

$$\mathcal{I}\ :\ \mathcal{C}^1(U, \mathbf{R}) \to \mathcal{C}^1(\Omega, \mathbf{R})\ ;\ f \mapsto f \circ p.$$

Montrer que $\mathcal{I}$ est un isomorphisme.

c) Soit f un élément de $\mathcal{C}^1(\mathbf{R}^2, \mathbf{R})$, on note $\tilde{f}$ l'application, $f \circ p$. Calculer, pour tout élément (r, θ) de Ω, $\dfrac{\partial \tilde{f}}{\partial \theta}(r, \theta)$, en fonction des dérivées partielles de f au point $(r \cos \theta, r \sin \theta)$. En déduire que $\mathcal{I}$ induit une bijection de S_U sur l'ensemble $\tilde{S}_U$ des éléments g de $C^1(\Omega, \mathbf{R})$, tels que, pour tout élément (r, θ) de Ω,

$$\frac{\partial g}{\partial \theta}(r, \theta) = 0.$$

d)Déterminer $\tilde{S}_U$. En déduire S_U.

3– Déterminer l'ensemble S.

4– Déterminer l'ensemble S' des éléments f de $C^1(\mathbf{R}^2 - \{(0,0)\}, \mathbf{R})$ tels que, pour tout élément (x, y) de $\mathbf{R}^2 - \{(0,0)\}$,

$$y \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) - x \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = x^2 + y^2.$$

5- Déterminer l'ensemble, noté S'_U des éléments f de $C^1(U, \mathbf{R})$ tels que, pour tout élément (x, y) de U,

$$x \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) + y \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 0.$$

6- Déterminer l'ensemble, noté S'_U des éléments f de $C^1(U, \mathbf{R})$ tels que, pour tout élément (x, y) de U,

$$x \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) + y \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = f.$$

7- Déterminer l'ensemble S' des éléments f de $C^1(\mathbf{R}^2, \mathbf{R})$ tels que, pour tout élément (x, y) de $\mathbf{R}^2$,

$$3 \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) - x \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 0.$$

IV . FONCTIONS HARMONIQUES

Soit f une application d'un ouvert U de $\mathbf{R}^n$ à valeur réelles, de classe $\mathcal{C}^2$. On dit que f est *harmonique*, si, par définition, $\Delta f = 0$.

1– Soit n un élément de $\mathbf{N}^*$. Déterminer toute les applications de $\mathbf{R}^n - \{(0, 0, \ldots, 0\}$ dans $\mathbf{R}$ de classe $\mathcal{C}^2$ harmoniques et radiales. Un application est dite *radiale*, si sa valeur en un point m ne dépend que de la distance de m à $(0, 0, \ldots, 0)$.

2– (5/2) Soit f une application de $\mathbf{R}^2$ à valeur réelles, de classe $\mathcal{C}^2$, harmonique. Soit (a, b) un point de $\mathbf{R}^2$. Pour tout élément R de $\mathbf{R}_+^*$. On note $M(R)$, la « valeur moyenne »de f sur le disque fermé de centre (a, b) et de rayon R, noté D_R, c'est-à-dire :

$$M(R) = \frac{1}{\pi R^2} \int_0^R \left(\int_0^{2\pi} f(a + r\cos\theta, b + r\sin\theta) \mathrm{d}\theta \right) r \mathrm{d}r.$$

et l'on note $m(R)$, la « valeur moyenne » de f sur le cercle de centre (a, b) et de rayon R, noté C_R, c'est-à-dire :

$$m(R) = \frac{1}{2\pi R} \int_0^{2\pi} f(a + R\cos\theta, b + R\sin\theta) R \mathrm{d}\theta.$$

a) Montrer que l'application $m \ : \ \mathbf{R}_+^* \to \mathbf{R}\,; \ R \mapsto m(R)$ est dérivable. Préciser sa dérivée.

b) Montrer que l'application $g \ : \ \mathbf{R}_+^* \to \mathbf{R}\,; \ R \mapsto Rm'(R)$ est dérivable. Montrer que sa dérivée est nulle.

<u>indication</u> : On utilisera l'expression en polaire du laplacien.

c) Déduire de ce qui précède, que pour tout élément R de $\mathbf{R}_+^*$,

$$m(R) = f(a, b).$$

d) Montrer que pour tout élément R de $\mathbf{R}_+^*$, $M(R) = f(a, b)$.

3—

Soit B la boule ouverte de $\mathbf{R}^n$ de centre $(0, 0, ...0)$ et de rayon strictement positif R. Soit f une fonction continue sur $\bar{B}$ nulle sur la sphère $S((0, ..., 0), R)$ à valeurs réelles et dont la restriction à B est de classe $\mathcal{C}^2$.

a) Montrer que si f admet en un point a de B un maximum local alors $\Delta f(a) \leq 0$.

b) Montrer que si f s'annule en un point c de B alors Δf s'annule en un point b de B.

c) Montrer que si $\Delta f < 0$ sur B, alors $f > 0$ sur B.

1. Montrer que si $\Delta f \leq 0$ sur B, alors $f \geq 0$ sur B.

   Indication : utiliser $f_0 \ : \ \bar{B} \to \mathbf{R}\,; \ x \mapsto R^2 - \|x\|^2$.

2. Montrer qu'il existe au plus une application g continue sur $\bar{B}$ nulle sur la sphère $S((0, ..., 0), R)$ à valeurs réelles et dont la restriction à B est de classe $\mathcal{C}^2$, qui soit harmonique et qui coïncide sur $S((0, ..., 0), R)$ avec une application continue donnée.

4— Soit D une partie de $\mathbf{R}^2$ fermée, bornée et convexe. Soit f une application qui est la restrictions à D d'une application de classe $\mathcal{C}^2$ sur un ouvert U contenant D, à valeurs réelles, on dira, pour faire court, que f est de classe $\mathcal{C}^2$ sur D.

Soit $\mathbf{E}$ le sous-espace vectoriel des applications de classe $\mathcal{C}^2$ sur D nulles sur la frontière de D, à valeurs réelles (on ne demande pas de vérifier, fait trivial, qu'il s'agit d'un espace vectoriel). Soit f un élément de $\mathbf{E}$ tel que $\Delta f = \lambda f$. On suppose que $\lambda > 0$.

a) On suppose que f atteint sa borne supérieure en un point (x_0, y_0) intérieur à D. Montrer que f est l'application nulle sur D.

b) Que dire si f atteint sa borne inférieure en un point (x_0, y_0) intérieur à D.

c) En déduire que f est nulle.

L'existence de vecteurs propres pour f associés à des valeurs propres strictement négatives est un problème délicat mais crucial dans les sciences.

EXERCICE A.

1. Soit χ une application de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{C}$ qui ne s'annule pas et qui est de classe $\mathcal{C}^1$. Montrer qu'il existe une application de classe $\mathcal{C}^0$, Θ de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{C}$ telle que $\chi = \exp \circ \Theta$.
2. Soit Φ une application de $\mathbf{R}^2$ dans $\mathbf{C}$ qui ne s'annule pas et de classe $\mathcal{C}^1$. Montrer qu'il existe une application Ψ de classe $\mathcal{C}^0$ de $\mathbf{R}^2$ dans $\mathbf{C}$ telle que :
$$\Phi = \exp \circ \Psi.$$
3. Soit f une application de $\mathbf{R}^2$ dans $\mathbf{R}$ de classe $\mathcal{C}^2$. On note D le disque fermé unité de $\mathbf{R}^2$ et l'on suppose que :
$$f(x,y) = y^2 - x^2,$$
pour tout $(x,y) \in \mathbf{R}^2 \setminus D$. Montrer que f admet un point critique.

EXERCICE B.
Soit I un intervalle de $\mathbf{R}$ et $f \in \mathcal{C}^1(I^2, I)$ telle que pour tout $(x,y) \in I^2$,
$$f(x,x) = x\,;\; f(x,y) = f(y,x).$$

1. Calculer $\mathrm{d}f(x,x)$, pour tout $x \in I$.
2. Soit S un segment de I tel que pour tout $(x,y) \in S^2$,
$$|\partial_1 f(x,y) - \partial_2 f(x,y)| \leq 1$$
Montrer que $f(S^2) \subset S^2$.
3. On suppose que f vérifie la condition du 2. et que g est une application qui vérifie les mêmes hypothèses que f. Soit (a,b) un élément de S^2. On définit par les relations de récurrences suivantes des suites $(x_n)_{n\in\mathbf{N}}$ et $(x_n,y_n)_{n\in\mathbf{N}}$:
$$x_0 = a, y_0 = b\,; \forall n \in \mathbf{N}, (x_{n+1}, y_{n+1}) = (f(x_n,y_n), g(x_n,y_n)).$$
Montrer que la suite $(x_n,y_n)_{n\in\mathbf{N}}$ converge.

EXERCICE C.
Soit f une application de $\mathbf{R}^n$ dans $\mathbf{R}$ de classe $\mathcal{C}^3$ telle que $f(0_{\mathbf{R}^n}) = 0$ et $\mathrm{d}f(0_{\mathbf{R}^n}) = 0_{\mathcal{L}(\mathbf{R}^n,\mathbf{R})}$. L'espace vectoriel $\mathbf{R}^n$ sera muni de sa structure euclidienne canonique.

Montrer qu'il existe une application h de $\mathbf{R}^n$ dans $\mathcal{S}_n(\mathbf{R})$, de classe $\mathcal{C}^1$ telle que pour tout $X \in \mathbf{R}^n$,
$$f(X) = \langle h(X)(X) | X\rangle.$$

Travaux dirigés n° 14

Moyennes pondérées d'applications, densité des polynômes ou le retour de Cesàro

I. Convolution par des noyaux, théorème de Weierstrass

Pour tout entier $n \geq 1$ on définit :

$$P_n \ : \ \mathbf{R} \to \mathbf{R}, x \mapsto a_n(1-x^2)^n,$$

où $a_n = \frac{1}{\int_{-1}^{1}(1-x^2)^n \mathrm{d}x}$.

1. Calculer a_n, pour tout $n \in \mathbf{N}^*$. Tracer l'allure du graphe de la restriction de P_n à $[0,1]$, pour quelques valeurs de n...
2. Pour tout $\alpha \in]0,1[$, on note $K_\alpha = [-1,-\alpha] \cup [\alpha, 1]$. Montrer que pour tout $\alpha \in]0,1[$,
$$\sup_{x \in K_\alpha} |P_n(x)| \underset{n\to+\infty}{\to} 0,$$
On justifiera au préalable l'existence de ces bornes supérieures.
3. Soit f une application de $[0,1]$ dans $\mathbf{R}$, continue et telle que $f(0) = f(1) = 0$. On prolonge cette application en une application $\tilde{f}$ à $[-1,2]$ en posant $\tilde{f}(x) = 0$, pour tout $x \in [-1,2] \setminus [0,1]$. et on défini pour tout entier $n \geq 1$, et tout $x \in [0,1]$,
$$Q_n(x) = \int_{-1}^{1} \tilde{f}(x+t)P_n(t)\mathrm{d}t.$$
   (a) Montrer que $(Q_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est une suite d'applications de $[0,1]$ dans $\mathbf{R}$ polynomiales.
   (b) Montrer que $\|Q_n - f\|_\infty \underset{n\to+\infty}{\to} 0$.
   (c) Démontrer le théorème de Weierstrass.

II. Théorème de Weierstrass par les polynômes de Bernstein

On se propose de donner une preuve constructive du théorème de Weiserstrass, d'inspiration probabiliste, due à Bernstein, qui date du tout début de XX$^{\text{e}}$. siècle.

1. Montrer que l'on ne restreint pas la généralité en prenant $a = 0$ et $b = 1$. Ce qui sera fait dans la suite.

   On considère f une application de $[0,1]$ dans $\mathbf{R}$ continue. Pour tout entier $n \geq 1$ on considère le polynôme :
$$B_n(f) = \sum_{k=0}^{n} \begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix} f\left(\frac{k}{n}\right) X^k(1-X)^{n-k},$$
   n^{e} polynôme de Bernstein associé à f.
2. Soient x un élément de $[0,1]$, n un entier naturel et Y une variable aléatoire réelle définie sur $(\Omega, \mathbf{P})$ qui suit une loi binomiale de paramètre (n,x) : $Y \sim \mathcal{B}(n,p)$. Montrer que $\mathbf{P}(Y=k)$ est maximum pour $k = \lfloor (n+1)x \rfloor$

   On considère dans la suite un élément x de $[0,1]$ et $(X_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ une suite de variables aléatoires de Bernoulli mutuellement indépendantes, toutes de même paramètre x. Notons pour tout entier $n \geq 1$, $S_n = X_1 + X_2 + \cdots + X_n$.

3. Donner pour tout entier $n \geq 1$, l'espérance de la variable aléatoire $f\left(\frac{S_n}{n}\right)$, au moyen des polynômes de Bernstein associés à f. Donner sa valeur dans le cas particulier où f est l'identité.
4. Donner la variance de $\frac{S_n}{n}$.
5. Montrer que pour tout entier $n \geq 1$,

$$|f(x) - B_n(f)(x)| \leq \mathbf{E}\left(\left|f(x) - f\left(\frac{S_n}{n}\right)\right|\right).$$

6. Pour tout réel $h > 0$, on pose :

$$\omega(h) = \sup\{|f(x_1) - f(y_2)|, (x_1, x_2) \in [0,1]^2 \text{ et } |x_1 - x_2| \leq h\},$$

$$A_h = \left\{\left|\frac{S_n}{n} - x\right| \leq h\right\}.$$

Montrer que pour tout entier $n \geq 1$ et tout réel $h > 0$,

$$|f(x) - B_n(f)(x)| \leq 2\mathbf{P}(\bar{A}_h)\|f\|_\infty + \mathbf{P}(A_h)\omega(h)$$

7. Soit η un réel strictement positif. Montrer que pour tout entier $n \geq 1$,

$$\mathbf{P}\left(\bar{A}_\eta\right) \leq \frac{1}{4n\eta^2}.$$

On peut utiliser l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev.
8. Conclure.

III. Théorème de Weierstrass trigonométrique

le théorème de Weierstrass trigonométrique n'est pas au programme. Il donne facilement le théorème de Weierstrass, hélas ce dernier est imuissant à nous livrer le théorème trigonométrique.

Soit $\mathbf{E}$ l'espace vectoriel des applications continues sur $[0,1]$ à valeurs réelles ou complexes. On le munit de la norme $\|.\|_\infty$, définie par , pour tout élément f de $\mathbf{E}$, $\|f\|_\infty = \sup\limits_{t\in[0,1]} |f(t)|$.

On note $\mathcal{P}$ le sous-espace vectoriel de $\mathbf{E}$ constitué des fonctions polynômiales.

Soit $\mathbf{F}$ l'espace des fonctions continues sur $\mathbf{R}$, 2π-périodiques, à valeurs complexes. On le munit de la norme encore notée $\|.\|_\infty$, définie par, pour tout élément g de $\mathbf{F}$, $\|g\|_\infty = \sup\limits_{t\in\mathbf{R}} |g(t)|$.

Pour tout entier naturel n, on note $\mathbf{T}_n$ le sous-espace vectoriel de $\mathbf{F}$ engendré par les fonctions $e_k\ :\ t \mapsto \mathrm{e}^{\mathrm{i}kt}$, où les nombres entiers k vérifient $-n \leq k \leq n$.

Soit φ_n la fonction définie sur $\mathbf{R}$ par : $\varphi_n(t) = a_n\left(\cos\frac{t}{2}\right)^{2n}$, le réel a_n étant tel que $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} \varphi_n(t)\ \mathrm{d}t = 1$.

1. (a) Montrer que φ_n est un élément de $\mathbf{T}_n$.
   (b) Prouver que, pour tout élément u de $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, $\cos^2 u \geq 1 - \sin u$. En déduire que, pour tout entier n, $\displaystyle\int_0^{\pi/2} (\cos u)^{2n+1}\ \mathrm{d}u \geq \frac{1}{n+1}$, puis que $a_n \leq \dfrac{n+1}{4}$.
   (c) Soit δ un réel tel que $0 < \delta < \pi$; montrer : $\lim\limits_{n\to+\infty} \sup\limits_{\delta\leq t\leq\pi} \varphi_n(t) = 0$.

2. Soit g un élément de $\mathbf{F}$. Pour tout entier $n \geq 0$, on note Q_n la fonction définie sur $\mathbf{R}$ par la relation :

$$Q_n(u) = \int_{-\pi}^{\pi} \varphi_n(t) g(u-t) \, \mathrm{d}t.$$

   (a) Établir la relation :

$$Q_n(u) = \int_{-\pi}^{\pi} \varphi_n(u-t) g(t) \, \mathrm{d}t.$$

   En déduire que Q_n appartient à $\mathbf{T}_n$.

   (b) Soit toujours δ un réel tel que $0 < \delta < \pi$; montrer l'inégalité :

$$|g(u) - Q_n(u)| \leq \sup_{|t| \leq \delta} |g(u) - g(u-t)| + 4\pi \|g\|_\infty \sup_{\delta \leq t \leq \pi} \varphi_n(t).$$

   (c) En déduire que $\lim\limits_{n \to +\infty} \|g - Q_n\|_\infty = 0$.

   (d) On suppose que g est une fonction paire ; montrer que Q_n est une fonction paire et en déduire qu'il existe un élément P_n de $\mathcal{P}$, de degré au plus égal à n, tel que $Q_n(u) = P_n(\cos u)$.

3. (a) Soit f un élément de E. Prouver qu'il existe une suite (P_n) d'éléments de $\mathcal{P}$ telle que $\lim\limits_{n \to +\infty} \|f - P_n\|_\infty = 0$. On prolongera f en une fonction paire, notée $\widetilde{f}$, et on introduira $g(u) = \widetilde{f}(\cos u)$.

   En déduire que $\mathcal{P}$ est dense dans E relativement à la norme uniforme $\|.\|_\infty$.

   (b) Montrer que, pour tout élément f de E, on a l'inégalité $\|f\|_2 \leq \|f\|_\infty$. En déduire que $\mathcal{P}$ est également dense dans E relativement à la norme $\|.\|_2$.

Travaux dirigés n° 15

I. Groupe cyclique

Soit G un groupe cyclique à n éléments.

1. Montrer que tout sous-groupe de G est cyclique et que son cardinal divise n.
2. Soit d un diviseur positif de n, n s'écrit donc $n = q.d$ avec q élément $\mathbf{N}^*$. Montrer qu'il existe un unique sous-groupe de G à d éléments.

II. Groupe et ordre des éléments Soit $(G, \star)$ un groupe fini et non trivial tel que pour tout $x \in G$, $x^2 = e_G$.

1. Montrer que $(G, \star)$ est abelien.
2. Montrer que $(G, \star)$ est isomorphe à $((\mathbf{Z}/2\mathbf{Z})^n, +)$.

   On proposera deux méthodes.
3. Soient g et g' des éléments d'un groupe $(G, +)$ commutaitif, d'ordres respectifs m et m'. On suppose que m et m' sont premiers entre eux. Montrer que
$$\omega(g + g') = mm'.$$
   Si l'on ne suppose plus m et m' premiers entre eux, a-t-on $\omega(g+g') = \text{ppcm}(m, m')$?
4. Soient p et q deux nombre premiers distincts et G un groupe abélien de cardinal pq. Montrer que G est cyclique.
5. Soit G un groupe de cardinal $2p$ avec p premier. Montrer que G contient un élément d'ordre p.

III Indicatrice d'Euler

On appelle indicatrice d'Euler d'un entier naturel non nul n, le nombre d'éléments de $\{1, ..., n\}$ premiers avec n.

On se propose de retrouver, par une méthode probabiliste le résultat qui sera dans lecours sur l'indicatrice d'Euler suivant :

Soit n un entier supérieur ou égal à 2, dont la décomposition en nombres premiers s'écrit :
$$n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \dots p_k^{\alpha_k},$$
où $p_1, p_2, \dots, p_k$ sont k nombres premiers deux à deux distincts et $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k$, des éléments de $\mathbf{N}^*$. Alors
$$\varphi(n) = n \prod_{i=1}^{k} \left(1 - \frac{1}{p_i}\right).$$

On munit $\{1, \dots, n\}$ de la probabilité uniforme notée $\mathbf{P}$.

1. Soit d un diviseur de n et A_d l'événement $\{k \in \{1, \dots, n\}, d|k\}$. Déterminer $\mathbf{P}(A_d)$
2. Soit $d_1, d_2, \dots, d_h$ des diviseurs de n premiers entre eux deux à deux. Montrer que les événements $A_{d_1}, A_{d_2}, \dots, A_{d_h}$ sont mutuellement indépendants.
3. Conclure.
4. Soit a un entier supérieur ou égal à 1. Etudier la suite $(x_n)_{n\in\mathbf{N}}$ définie par récurrence par :
$$\begin{cases} x_0 = a, \\ x_{n+1} = \varphi(x_n), \quad \text{pour tout } n \in \mathbf{N} \end{cases}$$

IV Valuation —

Soit p un nombre premier.

1. Montrer que, pour tout (k,n) élément de $\mathbf{N}^* \times \mathbf{N}^*$,

$$|\{j \in [\![1,n]\!], v_p(j) = k\}| = \left\lfloor \frac{n}{p^k} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{n}{p^{k+1}} \right\rfloor .$$

2. Justifier la formule suivante due à LEGENDRE : pour tout entier naturel n,

$$v_p(n!) = \sum_{k \in \mathbf{N}^*} \left\lfloor \frac{n}{p^k} \right\rfloor .$$

V. Exposant d'un groupe

Dans ce paragraphe $(G,+)$ désignera un groupe abélien fini, dont le neutre sera noté 0. L'ordre d'un élément g de G sera noté $\omega(g)$.

1. Soient g et g' des éléments de G d'ordres respectifs m et m'. On suppose que m et m' sont premiers entre eux. Montrer que

$$\omega(g+g') = mm'.$$

   Si l'on ne suppose plus m et m' premiers entre eux, a-t-on $\omega(g+g') = \mathrm{ppcm}(m,m')$?

2. Soit a et b des entiers strictement positifs. Montrer l'existence de a' et b' entiers également strictement positifs tels que on ait :
   — Les relations de divisibilté $a'|a$, $b'|b$;
   — $\mathrm{pgcd}(a'b') = 1$;
   — $\mathrm{ppcm}(a,b) = a'b'$.
   Indication : On examinera les décompositions en facteurs premiers de a et b.
3. On appelle exposant du groupe G le plus petit commun multiple e des ordres des ses éléments. Montrer que G admet un élément z ayant pour ordre l'exposant du groupe G.
4. Montrer que le groupe multiplicatif d'un corps fini est cyclique.

VI Groupes à 6 éléments

Soit $(G,*)$ un groupe à 6 éléments. On suppose que G n'admet pas d'élément d'ordre 6, autrement dit que G n'est pas cyclique.

1. Montrer que tout élément de G est d'ordre 2 ou 3.
2. Montrer que G possède un élément a d'ordre 3.
3. Montrer que $\langle a \rangle$ est un sous-groupe distingué.
4. Montrer que G est de la forme $\{e,a,a^2\} \cup \{b, b*a, b*a^2\}$.
5. Montrer que $b*b \notin \{b, b*a, b*a^2\}$.
6. Montrer que $b*b = e$.
7. En déduire que G est isomorphe à S_3 [10].
8. en déduire à isomorphisme près, tous les groupes d'ordre 6.
9. Déterminer à isomorphisme près, tout les groupes d'ordre inférieur ou égal à 7.

10. donc d'après l'exercice précédent à D_3

VII Groupe des isométries du tétraèdre 5/2

1. Montrer que dans $\mathcal{E}_3$, espace affine euclidien de dimension 3, il existe des quadruplets (A, B, C, D) constitués de 4 points distincts équidistants, c'est-à-dire tels que : $AB = AC = AD = BC = BD = CD$.
   De tels quadruplets sont appelés tétraèdres réguliers.
2. Soit (A, B, C, D) un tétraèdre régulier noté T. On désigne par $\mathcal{I}$ l'ensemble des isométries de l'espace laissant globalement invariant T.
   Montrer que $\mathcal{I}$ est un sous-groupe du groupe des isométries de l'espace.
3. Soit f un élément de $\mathcal{I}$. Nous lui associerons l'élément σ_f de l'ensemble des applications de $\{1, 2, 3, 4\}$ dans lui-même, défini par, pour tout élément i de $\{1, 2, 3, 4\}$, $f(A_i) = A_{\sigma_f(i)}$.
   Montrer que σ_f est un élément du groupe symétrique $(\mathfrak{S}_4, \circ)$.
4. Montrer que l'application $\sigma \ : \ \mathcal{I} \to \mathfrak{S}_4 \ ; \ f \mapsto \sigma_f$ est un morphisme injectif du groupe $(\mathcal{I}, \circ)$ dans le groupe $(\mathfrak{S}_4, \circ)$.
5. Soient i et j des éléments de $\{1, 2, 3, 4\}$, montrer que la transposition (i, j) est dans l'image de σ. En déduire que σ est un isomorphisme du groupe $(\mathcal{I}, \circ)$ sur le groupe $(\mathfrak{S}_4, \circ)$..
6. Montrer que l'ensemble $\mathcal{I}^+$ des isométries positives (déplacements) laissant globalement invariant T, est un sous groupe de $(\mathcal{I}, \circ)$. Montrer que $(\mathcal{I}^+, \circ)$ est isomorphe au groupe alterné $(\mathrm{A}_4, \circ)$.
7. Enumérer les éléments de $\mathcal{I}^+$.
8. Montrer que l'ensemble des éléments de $\mathcal{I}^+$ laissant A_1 invariant est un sous groupe d'ordre 3 de $(\mathcal{I}^+, \circ)$.
9. Soit D_1 la droite joignant les milieux de (A_1, A_2) et de (A_3, A_4), soit D_2 la droite joignant les milieux de (A_1, A_3) et de (A_2, A_4), soit D_3 la droite joignant les milieux de (A_1, A_4) et de (A_2, A_3), soit enfin pour $i = 1, 2, 3$, R_i le retournement par rapport à la droite D_i.
   Montrer que $\{R_1, R_2, R_3\}$ engendre un groupe à 4 éléments noté H.
   Montrer que pour tout élément h de H et pour tout élément g de $\mathcal{I}^+$, $g \circ h \circ g^{-1}$ est élément de H ; on dit que H est distingué. En déduire que A_4 a un sous-groupe distingué non trivial.

VIII. Simplicité de A_5

Contrairement à A_4, qui, nous venons de le voir, posséde un sous-groupe distingué non trivial, A_5 n'en possède pas. C'est un obstacle à la possibilité de résoudre l'équation du 5^{e} degré par radical.

Un sous groupe H d'un groupe $(G, *)$ est dit distingué si, par définition, pour tout élément g de G, $g * H * g^{-1} \subset H$. Nous nous proposons de montrer que $(\mathrm{A}_5, \circ)$ n'a pas de sous-groupe distingué non trivial (i.e. distinct de $\{\mathrm{id}\}$ ou de A_5).

1. Combien contient-il de cycles de longueur 3, de produits de deux transpositions à supports disjoints, de 5 cycles ?
2. Calculer les produits [11]

$$(1,2,3,4,5)^{-1}\,(3,4,5)\,(1,2,3,4,5)\,(3,4,5)^{-1}\,,$$
$$(1,2)\,(3,4)\,(3,4,5)\,(1,2)\,(3,4)\,(3,4,5)^{-1}\,.$$

11. Pour alléger l'écriture, on ne note pas la loi de composition, comme cela se fait souvent.

3. Montrer que tout sous-groupes distingué de $(\mathrm{A}_5, \circ)$, non réduit à $\{\mathrm{id}\}$ contient un cycle de longueur 3.
4. Calculer les produits, pour k élément de $\{4, 5\}$,

$$(1,2)\,(3,k)\,(2,1,3)\,(1,2)\,(3,k)\,.$$

5. Conclure...

CORRECTION DE II.

1. Posons $k = \omega(g+g')$. Alors $k \cdot (g+g') = 0$ et donc
$$0 = m \cdot (k \cdot (g+g')) = k \cdot (m \cdot g) + (km) \cdot g'.$$
Soit
$$0 = mk \cdot (g+g')) = (km) \cdot g'.$$
Donc m' divise km et comme m et m' sont premiers entre eux, le théorème de Gauss affirme que m' divise k. Par symétrie des rôles de m et m', on a aussi que m divise k. Finalement, par interprimalité de m et m' : $mm'|k$.
Mais le groupe G étant abelien, $mm' \cdot (g+g') = mm' \cdot g + mm' \cdot g'$ et donc :
$$mm' \cdot (g+g') = m' \cdot (m \cdot g) + m \cdot (m' \cdot g') = m \cdot 0 + m \cdot 0 = 0.$$
Donc k divise mm'. Au total $mm' = k$, soit :
$$\omega(g)\omega(g') = \omega(g+g').$$
Supposons g distinct de 0 de sorte que son ordre soit strictement supérieur à 1. On a immédiatement que $-g$ est aussi d'orde m. Mais $g - g = 0$, donc $g - g'$ est d'ordre 1, tandis que $\text{ppcm}(\omega(g), \omega(-g)) = m \neq 1$.
2. Soit a et b des entiers strictements positifs.

   Pour tout nombre premier p posons :
$$\alpha_p = \begin{cases} v_p(a) & \text{si } v_p(a) > v_p(b), \\ 0 & \text{sinon,} \end{cases} \quad ; \ \beta_p = \begin{cases} v_p(b) & \text{si } v_p(b) \geq v_p(a), \\ 0 & \text{sinon,} \end{cases}$$
et $a' = \prod_{p \in P} p^{\alpha_p}$; $b' = \prod_{p \in P} p^{\beta_p}$. Ainsi définis, a' et b' satisfont les conditions exigées.
3. On désignera par e l'exposant de G.

   Soit z un élément de G d'ordre maximum (il en existe car G est fini). Notons $a = \omega(z)$ et prenons un élément x de G dont nous noterons b l'ordre. Définisons a' et b' comme à la question précédente ainsi que $z' = \left(\frac{a}{a'}\right) \cdot z$; $x' = \left(\frac{b}{b'}\right) \cdot x$.

   D'abord notons que $\omega(z') = a'$. En effet d'une part $a' \cdot \left(\left(\frac{a}{a'}\right) \cdot z\right) = a \cdot z = 0$. D'autre part si k est un entier tel que $0 < k < a'$, alors $k \cdot \left(\left(\frac{a}{a'}\right) \cdot z\right) = \left(k\frac{a}{a'}\right) \cdot z \neq 0$, puisque $0 < \left(k\frac{a}{a'}\right) < a = \omega(z)$. De même $\omega(x') = b'$.

   Les deux précédentes questions nous disent alors que $\omega(x'z') = a'b' = \text{ppcm}(a,b)$, mais par définition de a, $\omega(x'z') \leq a$ et donc :
$$\text{ppcm}(a,b) = a.$$
Donc a est un multiple commun des ordres de tous les éléments du groupe, étant lui-même l'ordre d'un élément, c'est le ppcm des ordres des éléments du groupe.

   Concluons : $e = \omega(z)$.
4. Soit $(K, +, \times)$ un corps fini. Posons $G = K \setminus \{0_K\}$ et e l'exposant du groupe $(G, \times)$

   Pour tout élément x de G on a $x^e = 1$. Donc G est inclus dans l'ensemble des racines du polynôme de $K[X]$,
$$X^e - 1_k.$$
Tout repose alors sur le point suivant. La division euclidienne dont la construction est la même dans K que dans tout sous-corps de $\mathbf{C}$. L'intégrité de K fait alors que tout polynôme non nul de degré n a au plus n racines. Voyons cela.

• Le résultat est instantanné pour $n = 0$.

• Supposons le résultat vrai pour un entier n et considérons P un élément de $K[X]$ de degré $n+1$. Soit P n'a pas de racines et il en donc moins que $n+1$, soit il en a et considérons a l'une d'elles. Par division euclidienne de P par $(X-a)$, on a immédiatement

$$P = (X-a)Q,$$

avec Q un élément de $K[X]$ de degré n, le reste est en effet nul comme le montre la substitution de a à X. L'hypothèse faite assure que Q a au plus n racines, mais l'intégrité de K assure que toute racine de P est a ou une racine de Q, donc P a au plus $n+1$ racines.

Voici le résultat prouvé par récurrence.

Donc le cardinal de G est majoré par le degré de $X^e - 1$.

$$|G| \leq e.$$

Mais la question précédente fournit un élément z d'ordre e, donc

$$e = | < z > | \leq |G|.$$

Des deux inégalités vient l'égalité $|G| = e$ puis $G =< z >$. Le groupe G est donc cyclique.