Correction du DM n°4
Chaînes de Markov

1 Préliminaires

1. Soit $k \in \mathbf{N}$.
   le système d'événements $(\{S_k = j\})_{j=1,\dots,n}$ est complet, la formule des*probabilités totales* affirme que pour $i = 1, ..., n$,
   $$X_{k+1}[i] = \mathbf{P}(S_{k+1} = i = \sum_{j=1}^{n} \mathbf{P}(S_{k+1} = i | S_k = j)\mathbf{P}(S_k = j) = \sum_{j=1}^{n} t_{i,j}\mathbf{P}(S_k = j) = (TX_k)[i].$$
   Concluons : $\boxed{X_{k+1} = TX_k}$.
2. La somme des coefficients j^{e} ligne de A est :
   $$\sum_{i=1}^{n} t_{i,j} = \sum_{i=1}^{n} \mathbf{P}(S_1 = i | S_0 = j) = 1,$$
   car $\mathbf{P}(\cdot | S_0 = j)$ est une probabilité.
   Or $AU[i]$ est la somme des coefficients de la i^{e} ligne de A. Donc $AU = U$, c'est-à-dire que 1 est valeur propre de A, or A et sa transposée T ont mêmes valeurs propres, donc
   $$\boxed{1 \in \mathrm{Sp}(T)}$$
3. Soit (A_k) une suite convergente de matrices stochastiques et B sa limite. Chaque coefficient de B est limite de la suite correspondante des coefficients de A_k et est positif comme limite de tels termes. De plus, comme pour tout entier $k \geq 0$, $\quad A_k U = U$, on a en laissant tendre k vers $+\infty$, $BU = U$, par continuité de $\mathcal{M}_n(\mathbf{R}) \to \mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{R})$, $M \mapsto MU$ (linéaire en dimension finie). Ainsi B est-elle stochastique.
   $$\boxed{\mathcal{E} \text{ est fermé}}$$
   Il a été vu en 2., que pour tout $B \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R})$, ii. équivaut à $BU = U$.
   Soient A_1, A_2 stochastiques et $\lambda \in [0, 1]$. Posons $M = \lambda A_1 + (1 - \lambda)A_2$. La positivité des coefficients de A_1 et A_2 entraîne celle des coefficients de M. De plus $MU = \lambda A_1 U + (1-\lambda)A_2 U = \lambda U + (1 - \lambda)U = U$ ce qui donne ii. pour M qui est donc stochastique.
   Donc <u>E est convexe.</u>
4. Soient A_1, A_2 stochastiques. La matrice $A_1 A_2$ est à coefficients positifs, chacun de ses coefficients est somme de produit de coefficients de A_1 et A_2 qui sont positifs). En outre $A_1 A_2 U = A_1 U = U$ donc $A_1 A_2$ vérifie ii.
   $$\boxed{\mathcal{E} \text{ est stable par multiplication}}$$

2 Un exemple

5. La matrice de transition est ici
$$\boxed{T = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{3}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \end{pmatrix}}$$
6. On pose $U^* = \frac{1}{12}\begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix}$. On suppose dans cette question que que $X_0 = U^*$.
7. Comme $Tu^* = U^*$ la suite $(X_k)_{k\in\mathbf{N}}$ est constante.
   Donc la probabilité que la voiture soit dans une des trois villes donnée est la même tous les jours.
8. D'une part,
$$\mathbf{P}(S_0 = 1, S_1 = 1) = \mathbf{P}(S_0 = 1)\mathbf{P}(S_1 = 1|S_0 = 1) = r_0 \times 0 = 0.$$
   D'autre part
$$\mathbf{P}(S_0 = 1)\mathbf{P}(S_1 = 1) =$$
   Donc les variables aléatoires S_1 et S_2 ne sont pas indépendantes.
9. $$\boxed{T - I_3 = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{4} & -\frac{3}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{3}{4} & \frac{1}{4} & \frac{3}{4} \end{pmatrix}};$$
   par définition d'une valeur propre le rang de cette matrice est moindre que 3 et comme sa sous-matrice d'ordre 2 en haut à gauche est inversible (son déterminantest 5/8), son rang est plus que 2, donc 2. la formule du rang veut alors que : la dimension de $\mathbf{E}_1(T)$ est 1.
10. Le rang de T n'est pas 3, car ses deux dernières colonnes sont identiques, donc 0 est valeur propre. L'examen de la trace de T, somme des valeurs propres, donne : $\boxed{\mathrm{sp}(T) = \left\{1, 0, \frac{1}{2}\right\}}$.
    Comme T admet trois valeurs propres réelles distinctes, T est diagonalisable dans $\mathcal{M}_3(\mathbf{R})$.
11. Soit V un vecteur propre de Tassocié à une valeur propre autre que 1, notée ν. En sommant les trois composantes de l'égalité $\mu V = TV$ on a :
$$\nu \sum_{i=1}^{3} v_i = \sum_{i=1}^{3} \left(\sum_{i=1}^{3} m_{i,j} v_j \right) = \sum_{j=1}^{3} \left(\sum_{i=1}^{3} t_{i,j} \right) v_j = \sum_{j=1}^{3} 1 \times v_j = \sum_{j=1}^{3} v_j$$
    comme $\nu \neq 1$, on a $\sum_{j=1}^{3} v_j = 0$.
    Donc l'espace propre de T associé à ν est inclus dans H.
    Variante.
$$\mu U^\top V = U^\top TV = (AU)^\top V = U^\top V$$
    comme $\mu \neq 1$, on a $U^\top V = 0$, Donc V est dans l'hyperplan H (orthogonal de U pour le produit scalaire canonique).
12. La famille (U_*, V, W) est une base de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbf{R})$, car ses trois éléments sont des vecteurs propres associés à des valeurs propres deux à deux distinctes.
    Décomposons X_0 dans cette base :
$$X_0 = \alpha U_* + \beta V + \gamma W$$

En sommant les trois composantes de cette égalité, on a grâce à 5. (b),

$$1=\alpha\times 1+\beta\times 0+\gamma\times 0$$

Donc α, première coordonnée de X_0 dans cette base, vaut 1.
On a que P est la matrice de passage de la base canonique à la base (U_*, V, W).
Donc $T=PDP^{-1}$. Donc par 1. des préliminaire et un récurrence immédiate,

$$\boxed{\forall n\in\mathbf{N},\ X_n=PD^nP^{-1}X_0}$$

13. Pour tout $n\in\mathbf{N}$, grâce à 2, et en utilisant les notations de cette question,

$$PD^nP^{-1}X_0=P\mathrm{diag}\left(1^n,0,\frac{1}{2^n}\right)\begin{pmatrix}1\\ \beta\\ \gamma\end{pmatrix}=P\begin{pmatrix}1\\ 0\\ \frac{\gamma}{2^n}\end{pmatrix}$$

Donc par continuité du produit d'un élément de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbf{R})$ par P (polynomiale en les coordonnées du vecteur ou bien, linéaire en dimension finie.) on a :

$$\boxed{X_n\underset{n\to+\infty}{\longrightarrow}=P\begin{pmatrix}1\\ 0\\ 0\end{pmatrix}=U_*}$$

3 Matrice stochastiques

15. pour tout $i\in\{1,...,n\}$, et par positivité des coefficients de A,

$$|(AX)[i]|=\left|\sum_{j=1}^{n}a_{i,j}x_j\right|\leq\sum_{j=1}^{n}a_{i,j}|x_j|\leq\sum_{j=1}^{n}a_{i,j}\|X\|_\infty=1\times\|X\|_\infty$$

Donc $\boxed{\|AX\|_\infty\leq\|X\|_\infty}$.

16 Soit $k\in\mathbf{N}^*$. D'abord par stabilité de E par produite, $A^0, A^1, ..., A^k$ sont éléments de E, ensuite l'ensemble $\mathcal{E}$, convexe, est stable par passage au barycentre à coefficients positifs, donc

$$\boxed{R_k\in\mathcal{E}}$$

12. Premier cas. $X\in\mathrm{Ker}(A-I)$. Pour tout $k\in\in\mathbf{N}^*$, on a par récurrence immédiate $A^kX=X$ si bien que $R_kX=\frac{1}{k}\sum\limits_{l=0}^{k-1}X=X$.
Donc $R_kX\underset{k\to+\infty}{\to}X$.

Second cas. $X\in\mathrm{Im}(A-I)$. Notons Z un antécdent de X par $A-I$ de sorte que pour tout $k\in\mathbf{N}^*$, $A^kX=A^{k+1}Y-A^kY$ et

$$R_kX=\frac{1}{k}\sum_{l=0}^{k-1}A^{l+1}Y-A^lY=A^kY-Y,$$

par téléscopage. Donc par 15

$$\|R_kX\|\leq\frac{\|A^kY\|+\|Y\|}{k}\leq\frac{\|Y\|+\|Y\|}{k}\underset{k\to+\infty}{\to}0.$$

Donc $R_k X \underset{k\to+\infty}{\to} 0_{n,1}$.

Ces deux cas et l'unicité de la limité assurent que $X \in \mathrm{Ker}(A-I)$ et $X \in \mathrm{Im}(A-I)$ sont d'intersection trivial et donc sont des sous-espacse supplémentaires. La dimension de leur somme et donc la somme de leurs dimensions, qui par la formule du rang est n.

Donc $\underline{\mathrm{Ker}(A-I) \oplus X \in \mathrm{Im}(A-I) = \mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{R})}$.

13 La question précédente assure que $R_k X \underset{k\to+\infty}{\to} PX$ pour tout $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{R})$. Donc, en particulier, pour tout i et tout j éléments de $[\![1,n]\!]$

$$R_k[i,j] = E_i^\top R_k E_j \underset{k\to+\infty}{\to} E_i^\top P E_j = P[i,j]$$

par continuité du produit scalaire canonique par E_j (application linéaire en dimension finie).

Donc $\boxed{R_k \underset{k\to+\infty}{\to} P}$, (puisque la convergence composante dans la base canonique par composante assure la convergnece dans $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$.

14. La suite $(\mathbf{R}_k)_{k\in\mathbf{N}^*}$ est à valeur dans $\mathcal{E}$ qui est *fermé* donc sa limite,$\underline{P \text{ est élément de } \mathcal{E}.}$

15. Notons $B = A^p = (b_{i,j})$. B est une matrice stochastique (question 4) à coefficients > 0. Soit $X \in \mathrm{Ker}(B - I_n)$ et s un indice tel que x_s soit le maximum des x_i, $i = 1,..,n$. On a $BX = X$ et donc en particulier :

$$x_s = \sum_{j=1}^{n} b_{s,j}x_j \le x_s \sum_{j=1}^{n} b_{s,j} = x_s$$

(on a utilisé la positivité des $b_{s,j}$ pour dire que $b_{s,j}x_j \le b_{s,j}x_s$). L'égalité entre les termes extrêmes veut que pour tout $j \in [\![1,n]\!]$, $b_{s,j}x_j = leqb_{s,j}x_s$ soit, puis que $b_{s,} \neq 0$, que $x_j = x_s$. Donc $\mathrm{Ker}(A^p - I) \subset \overrightarrow{(}U)$ et comme $U \in \mathrm{Ker}(A-I) \subset \mathrm{Ker}(A^p - I)$.

$$\boxed{\dim(\mathrm{Ker}(A-I)) = 1}$$

16 On sait déjà que $\mathrm{Vect}(U) \subset \mathrm{Ker}(A - I_n)$ car A est stochastique. Nous avons aussi remarqué dans Q15 que $\mathrm{Ker}(A-I) \subset \mathrm{Ker}(A^p - I) = \mathrm{Vect}(U)$, voilà donc que $\mathrm{im}(P) = \mathrm{Ker}(A^p - I) = \mathrm{Vect}(U)$ Donc $\underline{\text{le rang de } P \text{ est } 1.}$

17. On vient de montrer que $\mathrm{im}(P) = \mathrm{Vect}(U)$ Donc toutes les colonnes de P sont multiples de U, la i^{e} s'écrit donc $\ell_i U$ ou ℓ est un réel et donc $\boxed{\text{P=UL}}$ avec $L := (\ell_1, ...\ell_n)$. La somme de toute mligne de P est donc $\sum\limits_{j=1}^{n} \ell_i$ donc, P étant stochastique, $\underline{L \text{ est stochastique.}}$