DM n$^{\mathrm{o}}$6

EXERCICE 1. Écriture décimal d'un réel

les questions marquées d'une *, vu en TD. ne sont pas à traiter

Quitte à retrancher à x sa partie entière, pour allèger l'écriture nous supposeros que $x \in [0,1[$.

Rappelons qu'un nombre décimal d, c'est-à-dire un réel de la forme $\frac{a}{10^N}$ où a est un élément de $\mathbf{Z}$ et N de $\mathbf{N}$ peut se mettre sous la forme :

$$x = \pm a_0 + a_1 10^1 + a_2 10^2 + ... a_N 10^N.,$$

où $a_0, a_1 a..., a_N$ sont des entiers naturels. On note alors $x = \pm a_0, a_1 a_2 ... a_N$ cette dernière forme est appelée écriture décimale de x, l'entiers naturel a_i la i^{e} décimale de x, pour $i = 1, ..., N$.

Nous nous proposons de fournir à tout réel x une écriture similaire. Quitte à retrancher à x sa partie entière, pour allèger l'écriture, nous supposeros que $x \in [0,1[$.

Soit x un élément de $[0,1[$. On définit les suites réelles $(x_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ $(y_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ et $(a_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ par, pour tout entier n supérieur ou égal à 1,

$$x_n := 10^{-n} \lfloor 10^n x \rfloor, \ , y_n := x_n + 10^{-n} \text{ et } a_n := \lfloor 10^n x \rfloor - 10 \lfloor 10^{n-1} x \rfloor).$$

1. $*$Un exemple
   On prend pour x le réel $0,123456$, c'est-à-dire, on le rappelera dans la suite, le réel $\sum_{i=1}^{6} i 10^{-i}$. Déterminer pour ce choix de x les suites $(x_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ $(y_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ et $(a_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$.
2. Écriture décimale
   (a) $*$ Montrer que pour tout entier $n \geq 1$, $x_n \leq x < y_n$.
   On appelle x_n (resp. y_n) valeur approchée de x par défaut (resp. par excès) à 10^{-n} près.
   (b) $*$ Montrer que les suites $(x_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ et $(y_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ sont adjacentes. Quelle est leur limite ?
   (c) Montrer que pour tout entier $n \geq 1$,
   $$x_n = \sum_{i=1}^{n} a_i 10^{-i}.$$
   Le réel x est donc la somme de la série $\sum_{n\geq 1} a_n 10^{-n}$. La suite $(a_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ s'appelle la suite des décimales de x.
3. Étude de la suite des décimales de x
   On note $\mathcal{S}$ l'ensemble des suites $(a_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ d'éléments de $\{0,1,\ldots,9\}$, qui ne sont pas constamment égales à 9 à partir d'un certain rang, c'est-à-dire, que pour tout élément N de $\mathbf{N}^*$, il existe un entier n tel que $n \geq N$ et $a_n \neq 9$.
   (a) Montrer que pour tout élément x de $[0,1[$, la suite $(a_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ de ses décimales est élément de $\mathcal{S}$.
   (b) Montrer que l'application δ qui à un élément x de $[0,1[$ associe la suite de ses décimales est une bijection de $[0,1[$ sur $\mathcal{S}$.
   Le caractère bijectif de δ autorise à noter un élément de $[0,1[$, $x = 0, a_1 a_2 a_3 a_4 \ldots a_n \ldots$, où $(a_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ désigne la suite de ses décimales. On dit qu'un élément x de $[0,1]$ est décimal, si par définition, la suite de ses décimales est nulle à partir d'un certain rang. Si $\delta(x)$ est nulle à partir du rang n_0, on notera simplement $x = 0, a_1 a_2 \ldots a_{n_0-1}$.
4. Caractérisation des rationnels
   (a) Montrer que le nombre $0,7777777777\ldots$ (la suite des décimales est constante égale à 7) est rationnel.
   Même question pour les nombres $0,17891789\ldots 1789\ldots$ et $0,12345292629\ldots 29\ldots$.

(b) Soit x un élément de $[0,1[$, on suppose que la suite de ses décimales $(a_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ est périodique à partir d'un certain rang, c'est-à-dire qu'il existe des entiers n_0 et p strictement positifs tels que pour tout entier n supérieur ou égal à n_0, $a_{n+p} = a_n$. L'entier p est appelée période de la suite. Montrer que x est rationnel.

(c) Montrer, réciproquement que pour tout élément x de $[0,1[$ rationnel, $\delta(x)$ est périodique à partir d'un certain rang.

5. Montrer que l'ensemble $\mathbf{R}$ n'est pas dénombrable.

EXERCICE 2. Nombres de Liouville
Exercices facultatif et réservé aux étudiants préparant les ENS

On dit qu'un nombre réel est algébrique si, par définition, il est la racine d'un polynôme à coefficients entiers. Par exemple 29 ou $\sqrt{2}$ sont algébriques. Nous étudierons un peu en exercice les nombres algébriques dans un chapitre suivant. Un nombre qui n'est pas algébrique est dit transcendant, c'est par exemple le cas de π ou e. Nous allons montrer qu'il existe beaucoup de nombres transcendants.

Soit x un réel.

1. On suppose que x est racine du polynôme à coefficients entiers de degré $m \geq 1$,

$$P = a_0 X^m + a_1 X^{m-1} + \cdots + a_m$$

.

Soit M le plus grand des nombre réels $\left|\frac{a_j}{a_0}\right|$, $j = 1, 2, \ldots, m$. Montrer que toute racine de P à un module strictement inférieur à $1 + M$.

2. On suppose toujours x racine de P. Soit $\frac{p}{q}$, avec $p \in \mathbf{Z}$ et $q \in \mathbf{N}^*$ une valeur rationnelle approchée de x à $\frac{1}{q}$ près, qui n'est pas une racine rationnelle de P.

(a) Montrer qu'il existe un réel α vérifiant $|\alpha| \leq M + 2$ tel que :

$$P\left(\frac{p}{q}\right) = \left(\frac{p}{q} - x\right) P'(\alpha).$$

(b) En déduire l'existencence d'un entier $K \geq 0$ qui ne dépend que des coefficients de P tel que :

$$\frac{1}{q^m} \leq \left|P\left(\frac{p}{q}\right)\right| < \left|x - \frac{p}{q}\right| K.$$

3. Soit un entier naturel $m' \geq 1$. On suppose que l'ensemble des entiers $q' \geq 1$ tels qu'il existe $p' \in \mathbf{Z}$ tel que :

$$\left|x - \frac{p'}{q'}\right| \leq \frac{1}{q'^{m'+1}},$$

est infini. Montrer que x n'est pas racine d'un polynôme à coefficient entiers de degré m'.

4. Nombres de Liouville

Soit le réel donné par son écriture décimale

$$\alpha = \sum_{n=1}^{\infty} a_n 10^{-n!},$$

où $(a_n)_{n\in N^*}$ est une suite à valeurs dans $\{0, 1, \ldots, 9\}$ qui n'est pas à partir d'un certain rang constante à 0. Un tel nombre réel est dit *nombre de Liouville.*

(a) En étudiant la valeur approchée par défaut de α à $\frac{1}{10^{m!}}$ près, pour m entier naturel, montrer que α est transcendant.

(b) Montrer que l'ensemble des nombres de Liouville est en bijection avec $]0,1[$.

Il y a « beaucoup » de nombres de Liouville et plus encore de nombres transcendants !

III. EXERCICE III. Fractions continues

Exercice facultatif

Soit α un réel. On définit la procédure suivante.

```
Procédure P
```

- "Etape 0"
  $i = 0$; $x := \alpha$; $a := E(x)$;
- "Etape i"
  tant que $x - a \neq 0$ faire :
  $i = i + 1$; $x = \frac{1}{x-a}$; $a = E(x)$;
  fin (de boucle "tant que").

```
Fin de procédure
```

En notant x_i et a_i les valeurs respectives de x et a fournies par la i^{e} étape de la procédure, on dispose donc, soit de suites $(x_i)_{i\in\mathbf{N}}$ et $(a_i)_{i\in\mathbf{N}}$, soit de suites finies $(x_0, \dots, x_n)$ et $(a_0, \dots, a_n)$, selon que la procédure ne se termine pas ou se termine à l'étape n.

1. Soit n un élément de $\mathbf{N}^*$. On suppose que la procédure s'est déroulée jusqu'à l'étape n. Vérifier que :

$$\alpha = a_0 + \frac{1}{x_1},\ \alpha = a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{x_2}}, \dots,\ \alpha = a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{\cdots \cfrac{1}{x_n}}}},$$

2. Exemples
   Déterminer les suites (finies ou non) $(a_i)_{i\geq 0}$, pour $\alpha = \frac{225}{141}$ et $\alpha = \sqrt{2}$.
3. Cas rationnel
   (a) Montrer que si la procédure se termine, alors α est rationnel.
   (b) On suppose que α est rationnel. Il existe donc (p, q) éléments de $\mathbf{Z} \times \mathbf{N}^*$) tels que $\alpha = \frac{p}{q}$ et p et q premiers entre eux. Donner une procédure calculant les termes de la suites $(a_i)_{i\geq 0}$, à partir de p et q. montrer que cette procédure se termine. De quel algorithme s'agit-il en fait ?
   (c) Conclure que la suite $(a_i)_{i\geq 0}$ est finie si et seulement si α est rationnel.
4. Cas irrationnel
   On Suppose dans la suite que α n'est pas rationnel. Pour tout élément n de $\mathbf{N}$ on note R_n le rationnel :

$$R_n := a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{\cdots \cfrac{1}{a_n}}}},$$

   On dit que R_n est la (fraction continue) réduite d'ordre n de α. On se propose de montrer que la suite $(R_n)_{n\in\mathbf{N}}$ tend vers α.

   On définit les suites d'entiers $(P_n)_{n\in\mathbf{N}}$ et $(Q_n)_{n\in\mathbf{N}}$ par

$$\begin{array}{ll} P_0 = a_0, & Q_0 = 1, \\ P_1 = a_0 a_1 + 1, & Q_1 = u_1, \\ P_n = P_{n-1}a_n + P_{n-2} & Q_n = Q_{n-1}a_n + Q_{n-2}, \quad \text{pour tout } n \geq 2. \end{array}$$

   (a) Montrer que pour tout entier naturel n, $R_n = \dfrac{P_n}{Q_n}$.
   (b) Montrer que pour tout entier $n \geq 1$,

$$P_n Q_{n-1} - P_{n-1} Q_n = (-1)^n \tag{1}$$

   (c) Montrer que pour tout entier naturel n, $\dfrac{P_n}{Q_n}$ est une fraction irréductible.
   (d) Montrer que pour tout entier $n \geq 1$,

$$\alpha = \frac{P_n x_{n+1} + P_{n-1}}{Q_n x_{n+1} + Q_{n-1}}. \tag{2}$$

   En déduire que

$$\left|\alpha - \frac{P_n}{Q_n}\right| < \left|\frac{P_{n+1}}{Q_{n+1}} - \frac{P_n}{Q_n}\right|.$$

(e) Conclure.

(f) Montrer que

$$\alpha = \frac{P_0}{Q_0} + \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{Q_n Q_{n+1}}.$$

Discuter suivant les valeurs de n si la réduite d'ordre n est une approximation par excés ou par défaut de α.

5. Montrer que si la suite $(a_i)_{i\geq 0}$ est périodique à partir d'un certain rang, alors α est racine d'un polynôme du second degré à coefficients entiers.

   Indication : On pourra commencer par le cas où $(a_i)_{i\geq 0}$ est périodique.

EXERCICES IV. Fonctions convexes

Soit Ω une partie de $\mathbf{R}^n$ convexe et ouverte et non vide.

définition. *Une application f de C dans $\mathbf{R}$ est dite convexe si pour tout couple (x, y) de points de C et tout élément t de* $]0, 1[$,

$$f(tx + (1-t)y) \leq tf(x) + (1-t)f(y).$$

Si de plus l'inégalité est stricte on dit que f est strictement convexe.

1. Soit f une application de Ω de $\mathbf{R}^n$. Pour tout a point de Ω et tout vecteur $\vec{x}$ de $\mathbf{R}^n$ on note $I_{a,\vec{x}}$ l'ensemble des réels t tels que $a + t\vec{x} \in \Omega$, et $g_{a,\vec{x}}$ l'application

$$g_{a,\vec{x}} \ :; \ I_{a,\vec{x}} \to \mathbf{R}\,; \ t \mapsto f(a + t\vec{x}).$$

   (a) Montrer que pour tout a point de Ω et tout vecteur $\vec{x}$ de $\mathbf{R}^n$, $I_{a,\vec{x}}$ est un intervalle ouvert contenant 0.

   (b) Montrer que f est convexe si et seulement si, pour tout $a \in \Omega$ et tout $\vec{x} \in \mathbf{R}^n$, $g_{a,\vec{x}}$ l'est.

   (c) On suppose de plus f différentiable. Montrer que les trois propositions suivantes sont équivalentes.
      i. f est convexe ;
      ii. Pour tout $(x, y) \in \Omega^2$, $\mathrm{d}f(x) \cdot (y - x) \leq \mathrm{d}f(y) \cdot (y - x)$;
      iii. Pour tout $(x, y) \in \Omega^2$, $f(y) - f(x)) \geq \mathrm{d}f(x) \cdot (y - x)$.

2. Soient f une application d'un ouvert U de $\mathbf{R}^n$ différentiable, et C une partie convexe de U.

   (a) Montrer que si $f_{|C}$ admet en un point c de C un minimum local, alors pour tout d élément de C,

$$\mathrm{d}f(c) \cdot (d - c) \geq 0.$$

   (b) On suppose de plus que $f_{|C}$ est convexe. Soit u un point de C. Montrer que les assertions suivantes sont équivalentes :
      i. $f_{|C}$ atteint en un point u de C son minimum.
      ii. Pour tout $v \in C$, $\mathrm{d}f(u) \cdot (v - u) \geq 0$.

3. Soit f une application strictement convexe de $\mathbf{R}^n$ dans $\mathbf{R}^n$ de classe $\mathcal{C}^1$.

   On désigne par $\|\cdot\|$ la norme euclidienne canonique sur $\mathbf{R}^n$.

   (a) Montrer que f atteint en un point u de $\mathbf{R}^n$ son minimum si et seulement si $\mathrm{d}f(u)$ est nulle.

   (b) On suppose que $\frac{\|f(x)\|}{\|x\|} \to +\infty$, lorsque $\|x\| \to \infty$.

      Montrer que $\vec{\nabla} f$ est une bijection de $\mathbf{R}^n$ sur $\mathbf{R}^n$.

EXERCICES IV. Fonctions convexes
Facultatif et reservé aux candidats X-ÉNS

Soit f une application de $\mathbf{R}^n$ (vu comme un espace affine) dans $\mathbf{R}$, convexe. On suppose que f admet en un point a de $\mathbf{R}^n$, n-dérivées partielle. On se propose de montrer que f est différentiable. On équipera $\mathbf{R}^n$ de la norme $\|\cdot\|_1$. La base canonique de l'espace vectoriel $\mathbf{R}^n$ sera notée $(\vec{e}_1, ...?\vec{e}_n)$

1. Montrer que l'on ne restreint pas la généralité en supposant que l'on a :$f(a) = 0$ et $\partial_1 f(a) = \partial_2 f(a) = ... = \partial_n f(a) = 0$. **Ce que l'on suppose dans la suite.**

2. Soit un entier $k \geq 2$ Montrer que pour tous points $p_1, p_2, ..., p_k$ de $\mathbf{R}^n$ et tous réels $t_1, t_2, ..., t_k$ positifs ou nul de somme 1,

$$f\left(\sum_{i=1}^{n} t_i m_i\right) \leq \sum_{i=1}^{n} t_i f(m_i).$$

   En déduire que pour tout réel $r > 0$, la restriction de f à la boule fermé B_r de centre a de rayon r atteint son maximum en un point de la forme $a \pm r\vec{e}_i$.

3. Montrer qu'il existe une application η définit au voisinage de $(0,0,...,0)$ dans $\mathbf{R}^n$, à valeurs réelles, telle que

$$f(a+\vec{h}) \leq \eta(\vec{h}) \text{ et } \eta(\vec{h}) \underset{\vec{h}\to(0,0,\dots,0)}{=} \mathrm{o}(\|\vec{h}\|_1).$$

4. Soit $\vec{h}$ un élément de $\mathbf{R}^n$. Montrer que l'application $f_{a,\vec{h}}$ est dérivable à droite en 0 et que sa dérivée à droite en 0 est positive ou nulle. Montrer en considérant $-\vec{h}$ que la dérivée à droite en 0 de $f_{a,\vec{h}}$ est nulle.
5. Montrer que f est positive et conclure.

Indications pour le DM n°6

Fonctions convexes

1. (a) Soient a point de Ω et un vecteur $\vec{x}$ de $\mathbf{R}^n$.

Posons $\phi \ : \ \mathbf{R} \to \mathbf{R}^n \ ; \ t \mapsto a + t\vec{x}$, de sorte que

$$I_{a,\vec{x}} = \phi^{-1}(\Omega).$$

Notons que ϕ, affine, est continue et qu'elle induit une bijection affine de $\mathbf{R}$ sur $a + \mathbf{R}\vec{x}$, donc un homéomorphisme ; par ψ nous désignerons l'homéomorphisem réciproque.

• $0 \in I_{a,\vec{x}}$...

• $I_{a,\vec{x}}$ est un ouvert de $\mathbf{R}^n$...

• l'intersection de la droite $a + \mathbf{R}\vec{x}$ et de Ω est convexe comme intersection de deux convexes , donc ....donc $I_{a,\vec{x}}$ un intervalle de $\mathbf{R}$.

Nous avons prouvé : $I_{a,\vec{x}}$ est un intervalle ouvert contenant 0.

(b) • Hypothèse : *pour tout $a \in \Omega$ et tout $\vec{x} \in \mathbf{R}^n$, $g_{a,\vec{x}}$ est convexe.*

Soient p et q des points de Ω et $\lambda \in [0, 1]$.

$$f(\lambda p + (1-\lambda)q) = f(q + \lambda(p - q)) = g_{q,\overrightarrow{qp}}(\lambda) = g_{q,\overrightarrow{qp}}(\lambda \times 1 + (1-\lambda) \times 0).$$

Donc par convexité de $g_{q,\overrightarrow{qp}}$.... Doù la convexité de f.

• Hypothèse : *Supposons f convexe .*

Soient a un point quelconque de $\mathbf{R}^n$ et $\vec{x}$ un vecteur quelconque de $\mathbf{R}^n$.

Prenons t_1 et t_2 des éléments de $I_{a,\vec{x}}$ et λ un élément de $[0, 1]$.

$$g_{a,\overrightarrow{x}}(\lambda t_1 + (1-\lambda)t_2) = f(\lambda(a + t_1\vec{x}) + (1-\lambda)(a + t_2\vec{x})).$$

.... Donc $g_{a,\overrightarrow{x}}$ est convexe.

Donc f est convexe si et seulement si, pour tout $a \in \Omega$ et tout $\vec{x} \in \mathbf{R}^n$, $g_{a,\vec{x}}$ l'est.

(c) • *Supposons i.*

Soit $(x, y) \in \Omega^2$. Par convexité de Ω, $g_{x,\overrightarrow{xy}}$ est définie sur $[0, 1]$ et par (b), on sait que cette application est convexe. Mais $g_{x,\overrightarrow{xy}}$ composée de f de classe $\mathcal{C}^1$ et de l'application affine donc $\mathcal{C}^1$,

$$\mathbf{R} \to \mathbf{R}^n \ ; \ t \mapsto x + t\overrightarrow{xy}$$

est de classe $\mathcal{C}^1$ et pour tout $t \in [0, 1]$

$$g'_{x,\overrightarrow{xy}}(t) = \mathrm{d}f(x + ty - x) \cdot y - x.$$

Donc ....

D'où ii.

• *Supposons ii.*

Soit $(x, y) \in \Omega^2$.

$$f(y) - f(x) = g_{x,\overrightarrow{xy}}(1) - g_{x,\overrightarrow{xy}}(0) = \int_0^1 g'_{x,\overrightarrow{xy}}(t)\mathrm{d}t = \int_0^1 \mathrm{d}f(x + t(y - x) \cdot (y - x)\mathrm{d}t.$$

Appliquer alors ii. pur les points x et $x + t(y - y)$ ....

D'où iii.

• *Supposons iii.*

Prenons a un point de Ω et $\vec{x}$ un vecteur de $\mathbf{R}^n$. Soient t_1 et t_2 des éléments de $I_{a,\vec{x}}$ tels que $t_1 < t_2$. Par iii,

$$f(a + t_2\vec{x}) - f(a + t_1\vec{x}) \geq \mathrm{d}f(a + t_1\vec{x}) \cdot ((t_2 - t_1)\vec{x}),$$

soit en divisant par la quantité strictement positive $t_2 - t_1$

$$\frac{g_{a,\vec{x}}(t_2) - g_{a,\vec{x}}(t_1)}{t_2 - t_1} = \frac{f(a + t_2\vec{x}) - f(a + t_1\vec{x})}{t_2 - t_1} \geq \mathrm{d}f(a + t_1\vec{x}) \cdot (\vec{x}) = g'_{a,\vec{x}}(t_1)$$

Inverser alors les rôles de $t_2 x$ et t_1, on obtient :

......

Finalement

$$g'_{a,\vec{x}}(t_1) \leq \frac{g_{a,\vec{x}}(t_2) - g_{a,\vec{x}}(t_1)}{t_2 - t_1} \leq g'_{a,\vec{x}}(t_2)$$

Donc $g'_{a,\vec{x}}$ croît, et donc $g_{a,\vec{x}}$ est convexe. Comme a et $\vec{x}$ sont quelconques f est convexe (cf. (b)). Voilà i. prouvée.

Les propositions i., ii. et iii. sont équivalentes.

2. Soient f une application d'un ouvert U de $\mathbf{R}^n$ différentiable, et C une partie convexe de U.
   (a) Supposons que $f_{|C}$ admette en $c \in C$ un minimum local. Soit d élément de C, Pour tout $t \in [0,1]$, par convexité de C, est défini $f(c+t(d-c))$ et pour t suffisamment petit, cette quantité est supérieure à $f(c)$, si bien que :

$$\frac{f(c+t(c-d)) - f(c)}{t} \geq 0.$$

   En laissant tendre t vers 0 par valeur strictement supérieures on a : $\mathrm{D}_{\overrightarrow{cd}} f(c) \geq 0$, ou, autrement dit

$$\mathrm{d}f(c) \cdot (d-c) \geq 0.$$

   (b) On suppose de plus que $f_{|C}$ est convexe. Soit u un point de C.
   • Supposons que $f_{|C}$ atteigne en u son minimum. Elle atteint *a fortiori* en u un minimum local et la question précédente nous assure que pour tout $v \in C$, $\mathrm{d}f(u) \cdot (v-u) \geq 0$.
   • Réciproquement supposons que pour tout $v \in C$, $\mathrm{d}f(u) \cdot (v-u) \geq 0$. utiliser et 1.(c) iii ....
   Donc $f_{|C}$ atteind en u son minimum.
   D'où l'équivalence demandée.

3. (a) • Si f atteint en un point u de $\mathbf{R}^n$ son minimum, comme $\mathbf{R}^n$ est ouvert, d'après le cours $\mathrm{d}f(u)$ est nulle. (on aurait pu aussi utiliser 2.(a)...).
   • Réciproquement si $\mathrm{d}f(u)$ est nulle alors par 1.(c) iii. f atteint en u son minimum.
   (b) • D'abbord comme $\frac{\|f(x)\|}{\|x\|} \to +\infty$, lorsque $\|x\| \to \infty$, *a fortiori* $\|f(x)\| \to +\infty$, lorsque $\|x\| \to \infty$. Donc on dispose de $R \in \mathbf{R}_+^*$ tel que $\|f\|$ soit strictement supérieur à $f(0_n)$ sur le complémentaire de la boule B de centre 0 et de rayon R. Mais $f_{|B}$ étant continue, elle atteind en un point x_0 du compact B son minimum, qui est aussi le minimum de f par définition de B.
   Par (a), $\mathrm{d}f(x_0)$ est nul donc $\vec{\nabla} f(x_0) = \vec{0}$.

   L'unicité du point en lequel le gradiant est nul découle facilement de la stricte convexité (vu en exercicie cette année pour les fobnction d'une variable.

   ....
   Concluons : $\vec{\nabla} f$ s'annule en un et un seul point de $\mathbf{R}^n$.
   • A présent prenons $\vec{h}$ vecteur de $\mathbf{R}^n$. et posons $f_{\vec{h}} = f - \frac{1}{2}\langle \vec{h} | \cdot \rangle$. D'une part $f_{\vec{h}}$ est strictement convexe car f l'est et $-\frac{1}{2}\langle \vec{h} | \cdot \rangle$, lineaire est convexe, d'autre part $\frac{\|f_{\vec{h}}(x)\|}{\|x\|} \to +\infty$, lorsque $\|x\| \to \infty$, en effet, ...
   Enfin $f_{\vec{h}}$ est $\mathcal{C}^1$ comme somme de telles fonctions et :

$$\nabla f_{\vec{h}} = \vec{\nabla} f - \vec{h}$$

   Donc le premier point dit qu'il existe un et un seul point x de $\mathbf{R}^n$ en lequel $\vec{\nabla} f_{\vec{h}}$ s'annule donc en lequel $\vec{\nabla} f$ prend la valeur $\vec{h}$.

   Donc $\underline{\nabla f \text{ est une bijection de } \mathbf{R}^n \text{ sur } \mathbf{R}^n.}$
   Cf. devoir de rentrée.