Correction du DM n°5

EXERCICE I

1.
$$I_2 = \int_0^1 \frac{x^2}{1+x^2}\mathrm{d}x = \int_0^1 1\mathrm{d}x - \int_0^1 \frac{1}{1+x^2}\mathrm{d}x = [1-\arctan(x)]_0^1 = 1-\frac{\pi}{4}.$$
$$\begin{aligned} I_3 =& \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{x^2}{1+x^2}(2x)\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{y}{1+y}\mathrm{d}y = \frac{1}{2}\int_0^1 1\mathrm{d}y - \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{1}{1+y}\mathrm{d}y \\ =& \frac{1}{2} - \frac{1}{2}[\ln(1+y)]_0^1 = \frac{1}{2}(1-\ln 2). \end{aligned}$$

2. Pour tout entier $n \geq 0$ et tout $x \in [0,1]$,
$$0 \leq \frac{x^n}{1+x^2} \leq x^n,$$
et donc, par positivité de l'intégrale :
$$0 \leq \int_0^1 \frac{x^n}{1+x^2}\mathrm{d}x \leq \int x^n \mathrm{d}x = \frac{1}{n+1}.$$
Par encadrement, $I_n \underset{n\to+\infty}{\to} 0$.

3. Procédons par deux intégrations par parties que rendent licites la rationnalité des intégrandes.

Pour tout $n \in \mathbf{N}$,
$$\begin{aligned} I_n &= \left[\frac{x^{n+1}}{(n+1)}\frac{1}{1+x^2}\right]_0^1 + \int_0^1 \frac{x^{n+1}}{n+1}\frac{2x}{(1+x^2)^2}\mathrm{d}x \\ &= \left[\frac{x^{n+1}}{(n+1)(1+x^2)} + \frac{x^{n+3}}{(n+1)(n+3)}\frac{2}{(1+x^2)^2}\right]_0^1 + \int_0^1 \frac{x^{n+3}}{(n+1)(n+3)}\frac{8x}{(1+x^2)^3}\mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{(n+1)} + \frac{1}{(n+1)(n+3)}\right) + J_n, \end{aligned}$$
où $J_n = \frac{1}{(n+1)(n+3)}\int_0^1 \frac{8x^{n+4}}{(1+x^2)^3}\mathrm{d}x$.

D'une part lorsque n tend vers $= \infty$,
$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\left(\frac{1}{(n+1)} + \frac{1}{(n+1)(n+3)}\right) =& \frac{1}{2}\left(\frac{1}{n}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{-1} + \frac{1}{n^2}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{-1}\left(1+\frac{3}{n}\right)^{-1}\right) \\ =& \frac{1}{2}\left(\frac{1}{n}\left(1-\frac{1}{n}+\mathrm{o}\left(\frac{1}{n}\right)\right) + \frac{1}{n^2}\left(1+\mathrm{o}\left(1\right)\right)\right) \\ =& \frac{1}{2n} - \frac{1}{2n^2} + \frac{1}{2n^2} + \mathrm{o}\left(\frac{1}{n^2}\right) \\ =& \frac{1}{2n} + \mathrm{o}\left(\frac{1}{n^2}\right). \end{aligned}$$

D'autre part, tout comme I_n, $\int_0^1 \frac{8x^{n+4}}{(1+x^2)^3}\mathrm{d}x \underset{n\to+\infty}{\to} 0$, et donc $n^2 J_n \underset{n\to+\infty}{\to} 0$ donc finalement :
$$I_n = \frac{1}{2n} + \underset{n\to+\infty}{\mathrm{o}}\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

4. Soit $n \in \mathbf{N}$.

   Pour tout $K \in \mathbf{N}^*$, et tout $x \in [0,1[$,

$$\frac{x^n}{1+x^2} = \sum_{k=0}^{K} (-1)^k x^{n+2k} + \frac{(-1)^{K+1} x^{n+2K+1}}{1+x^2},$$

   et donc

$$I_n = \sum_{k=0}^{K} \frac{(-1)^k}{n+2k+1} + (-1)^{K+1} I_{n+2K+1}.$$

   La deuxième question, donne la convergence de la série $\sum_{k \geq 0} \frac{(-1)^k}{n+2k+2}$, obtenue de manière concurrente par le théorème sur les séries alternées et :

$$I_n = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{n+2k+2}.$$

   Le théorème d'interversion série/intégrale(à venir), ne peut ici s'appliquer. Le théorème de convergnce dominée (à venir) peu par contre être tenté. On pourrait aussi utiliser de la convergence uniforme sur un segment $[0,a]$, $a < 1$ et passer ensuite à la limite sur a, avec de la convergence uniforme de la série en a ! ! !

EXERCICE II

1. Classique. Ici comme h est continue ont peut même montrer (bien que ce soit peu glorieux) que pour tout $x \in \mathbf{R}$ et tout $n \in \mathbf{N}$,

$$\int_x^{x+nT} h(t)\mathrm{d}t = \int_0^{nT} h(t)\mathrm{d}t$$

   en dérivant en x, puis que

$$\int_0^{nT} h(t)\mathrm{d}t = nT < h >$$

   par récurrence sur n, grâce au premier point !

   Une méthode qui se généralise à des fonctions non continues repose sur la loi de Chasles et un changement de variable affine.

2. Immédiat par intégration par parties (cf. question suivante).

3. On pose $\tilde{h} = h - < h >$. L'application $\tilde{h}$ est T-périodique de valeur moyenne nulle. Soit alors

$$H \ : \ \mathbf{R} \to \mathbf{R} \, ; \ x \mapsto \int_0^x \tilde{h}(t)\mathrm{d}t.$$

   Par la question 1, H est T-périodique, c'est par continuité de $\tilde{h}$ une primitive de cette application. Alors :

$$\begin{aligned}\int_a^b f(t)h(nt)\mathrm{d}t - < h > \int_a^b f(t)\mathrm{d}t &= \int_a^b \tilde{h}(nt) f(t)\mathrm{d}t \\ &\underset{\text{I.P.P.}}{=} \frac{1}{n}[H(nt)f(t)]_a^b - \frac{1}{n}\int_a^b f'(t)H(nt)\mathrm{d}t\end{aligned}$$

Donc puisque H est bornée sur $\mathbf{R}$ par continuité et T-périodicité, et que f et f' le sont sur $[a,b]$ par continuité

$$\left|\int_a^b f(t)h(nt)\mathrm{d}t - <h> \int_a^b f(t)\mathrm{d}t\right| \leq \frac{\sup\limits_{y\in[0,T]} |H(y)|}{n} \left(2 \sup_{t\in[a,b]} |f(t)| + (b-a) \sup_{t\in[a,b]} |f'(t)|\right)$$

Par encadrement $\int_a^b f(t)h(nt) - <h> \int_a^b f(t)$ tend bien vers 0, lorsque n tend vers $+\infty$.