Question préliminaire

1) Soit $(\alpha_\lambda)_{\lambda\in\mathbf{R}_+^*}$ une famille presque nulle de réels. On suppose

$$\sum_{\lambda\in\mathbf{R}_+^*}\alpha_\lambda\phi_\lambda = O_{[0,1]\to\mathbf{R}}.$$

Supposons la famille α non nulle ce qui autorise à poser $\lambda_0=\min\{\lambda\in\mathbf{R}_+^*|\alpha_\lambda\neq 0\}$. alors

$$0=\left(\frac{1}{\phi_{\lambda_0}}\sum_{\lambda\in\mathbf{R}_+^*}\alpha_\lambda\phi_\lambda\right)(x)\underset{x\to 0^+}{\sim}\alpha_{\lambda_0}\neq 0$$

Voilà bien chose absurde ! donc la famille α est **nulle**.
D'où la libertié de la famille $(\phi_\lambda)_{\lambda\in\mathbf{R}_+^*}$.

A. Déterminants de Cauchy.

2) On suppose $R(X)$ est de la forme $R(X)=\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{A_k}{X+b_k}$.
On multiplie la dernière colonne C_n par A_n et on lui ajoute la combinaison linéaire des autres colonnes $\sum\limits_{i=1}^{n-1}A_kC_k$.
On obtient :

$$\begin{aligned}A_nD_n &= \begin{vmatrix}\dfrac{1}{a_1+b_1} & \dfrac{1}{a_1+b_2} & \cdots\cdots\cdots & R(a_1)\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ \dfrac{1}{a_n+b_1} & \dfrac{1}{a_n+b_2} & & R(a_n)\end{vmatrix}\\ &= \begin{vmatrix}\dfrac{1}{a_1+b_1} & \dfrac{1}{a_1+b_2} & \cdots\cdots\cdots & 0\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ \vdots & \vdots & & 0\\ \dfrac{1}{a_n+b_1} & \dfrac{1}{a_n+b_2} & & R(a_n)\end{vmatrix}.\end{aligned}$$

On développe par rapport à la dérnière colonne, on obtient

$$A_nD_n=R(a_n)D_{n-1}.$$

3)
S'il existe $(k_1,k_2)\in[[1,n]]$ tel que $k_1\neq k_2$ et $b_{k_1}=b_{k_2}$ alors , par égalité des colonnes C_{k_1} et C_{k_2}, $D_n=0$, et alors

$$D_n=\frac{\prod\limits_{1\le i<j\le n}(a_j-a_i)(b_j-b_i)}{\prod\limits_{\substack{1\le i\le n\\1\le j\le n}}(a_i+b_j)}$$

Supposons maintenant que les termes de la suite $(b_k)_{1\leq k\leq n}$ soient deux à deux distincts. La théorie de la décomposition en éléments simbles assure que R se met sous la forme de 2. .

Par récurrence montrons que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $D_n = \dfrac{\prod\limits_{1\leq i<j\leq n}(a_j - a_i)(b_j - b_i)}{\prod\limits_{\substack{1\leq i\leq n\\1\leq j\leq n}}(a_i + b_j)}$.

Pour $n = 1$ on a $D_1 = \dfrac{1}{a_1 + b_1}$.

Soit un entier $n \geq 2$, supposons que $D_{n-1} = \dfrac{\prod\limits_{1\leq i<j\leq n-1}(a_j - a_i)(b_j - b_i)}{\prod\limits_{\substack{1\leq i\leq n-1\\1\leq j\leq n-1}}(a_i + b_j)}$.

On a d'après la question précédente

$$A_n D_n = R(a_n) D_{n-1}.$$

On a $R(X) = \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{A_k}{X + b_k}$ donc $A_n = ((X+b_n)R(X))_{x=-b_n} = \dfrac{\prod\limits_{k=1}^{n-1}(-b_n - a_k)}{\prod\limits_{k=1}^{n-1}(-b_n + b_k)} = \dfrac{\prod\limits_{k=1}^{n-1}(a_k + b_n)}{\prod\limits_{k=1}^{n-1}(b_n - b_k)}$

et $R(a_n) = \dfrac{\prod\limits_{k=1}^{n-1}(a_n - a_k)}{\prod\limits_{k=1}^{n}(a_n + b_k)}$ donc puisque $A_n \neq 0$,

$$D_n = \frac{R(a_n)}{A_n} D_{n-1} = \frac{\prod\limits_{1\leq i<j\leq n}(a_j - a_i)(b_j - b_i)}{\prod\limits_{\substack{1\leq i\leq n\\1\leq j\leq n}}(a_i + b_j)}.$$

D'où, le résultat.

4) (a)

HYPOTHÈSE: $d(x, A) = 0$.

Soit B une boule ouvert de cantre a. Notons r son rayon, la **propriété caractéristique de la borne inférieure** nous offre $a \in A$ tel que :

$$0 = d(x, A) \leq |\|x - a\| < d(x, a) + r = r.$$

Donc la boule B rencontre A en a et donc $x \in \bar{A}$.

HYPOTHÈSE: $x \in \bar{A}$.

Soit $\varepsilon \in \mathbf{R}_+^*$. la boule ouverte de centre x de rayon ε rencontre a en un point noté b. Alors

$$0 \leq d(x, A) \leq \|x - b\| < \varepsilon.$$

Comme ε est arbitraire. On a $d(x, A) = 0$.

Donc on a à l'équivalence entre étre adhérent à A et être à la distance zéro de A.

4) (b) Vu en colles.

5) Posons pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\delta_n = d(x, A_n)$ et $\delta = d(x, A)$.

Soit $\varepsilon \in \mathbf{R}_+^*$

• Observons que
$$\delta \leq \delta_n,$$
pour tout $n \in \mathbf{N}$, puisque $A_n \subset A$.
• La propriété de la borne supérieure nous fournit $a \in A$ tel que
$$\delta \leq \|x - a\| < \delta + \varepsilon.$$
L'élément a est élément, par définition d'une réunion d'un des A_n, disons A_{n_0} ; la croissance de la suite $(A_n)_{n\in\mathbf{N}}$ veut même que
$$\forall n \in [\![n_0, +\infty[\![, a \in A_n$$
Donc, pour tout entier n, si $n \geq n_0$, alors
$$\delta_n \leq \|x - a\| < \delta + \varepsilon.$$
Par ces deux points on a
$$\forall n \in \mathbf{N},\ |d(x, A)_d(x, A_n)| \leq \varepsilon.$$
Donc
$$\boxed{d(x, A_n) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} d(x, A)}$$

6) Soit une suite $(x_n)_{\in\mathbf{N}}$ à valeurs dans $B \cap V$.
Cette suite à valeur dans B est bornée, elle est *a fortiori* bornée comme suite de l'espace vectoriel de dimension finie V et à ce titre possède une suite extraite $(x_{\phi(p)})_{p\in\mathbf{N}}$ de limite ℓ, élément de V :
$$\|x_{\phi(p)} - \ell\| \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0,$$
(avec $\|\cdot\|_V$ la norme induite sur V pa $\|\cdot\|$.)
. *A fortiori* ℓ est limite de $(x_{\phi(p)})_{p\in\mathbf{N}}$ dans $(E, \|\cdot\|)$ et, comme B est fermée, ℓ est élément de B, donc au total $\ell \in B \cap V$.
Ainsi $B \cap V$ est-il un compact de $(E, \|\cdot\|)$.
• L'inclusion $B \cap V \subset V$ assure :
$$d(x, V) \leq d(x, B \cap V).$$
• Soit $y \in V$. Deux cas :

— si $y \in B$ alors $y \in B \cap V$ et donc $d(x, B \cap V) \leq \|x - y\|$;

— si $y \notin B$ alors $\|y - x\| > \|x\| = \|x - 0\| \geq d(x, B \cap V)$, car $0 \in B \cap V$.

Donc dans tous les cas, $d(x, B\cap V) \leq d(x, y)$; donc la borne inférieure étant le plus grand des minorant
$$d(x, B \cap V) \leq d(x, V).$$

Ainsi, par ces deux points :

$$\boxed{d(x, B \cap V) = d(x, V)}$$

7) L'application

$$E \to \mathbf{R} \ y \mapsto \|y - x\|$$

est 1-lipschitzienne donc **contiue**. Elle atteint donc sa borne inférieure sur le **compact** $B \cap V$ autrement dit l existe $y \in B \cap V$ tel que $d(x, B \cap V) = \|x - y\|$.
D'après la question **6)** $d(x, V) = d(x, B \cap V)$ donc $d(x, V) = \|x - y\|$.

C. Distance d'un point à un sous-espce de dimension finie dans un espace euclidien.

8) Soit V un sous-espace vectoriel de dimension finie de E, et π la projection orthogonale sur V (elle existe car V est de dimension finie donc il admet un supplémentaire orthogonal)
Soit $x \in E$,.
Pour tout $v \in V$, $\| x - v \|^2 = \| x - \pi(x) \|^2 + \| \pi(x) - v \|^2$ car $x - \pi(x) \perp \pi(x) - v \in V$.
Donc pour tout $v \in V$,

$$\| x - v \|^2 \leq \| x - \pi(x) \|^2,$$

avec égalité si et seulement si $v = \pi(x)$.
Donc <u>la distance de x à V est atteinte en et seulement en $\pi(x)$.</u>

9) Soient $(x_1, x_2, ..., x_n) \in E^n$ et V un sous-espce vectoriel de E de dimension n contenant $\text{vect}(x_1, x_2, ..., x_n)$.
Notons $\mathcal{B}_0 = (e_1, e_2, ..., e_n)$ une base orthonormée de V et $M = \mathcal{M}at_{\mathcal{B}_0}(x_1, x_2, ..., x_n)$, la matrice du système de vecteurs $(x_1, x_2, ..., x_n)$ dans la base $\mathcal{B}_0$.
On a $M(x_1, x_2, ..., x_n) = M^\top M$.
En effet, posons pour tout $j \in [[1, n]]$,

$$(M^\top M)[i, j] = \sum_{k=1}^{n} m_{k,i} m_{k,j} = \langle x_i | x_j \rangle,$$

d'après l'expression du poduit scalaire dans une base orthonomée.
Donc $G(x_1, ..., x_n) = \det M^2$ et comme $\det M = 0$ si et seulement si la famille $(x_1, x_2, ..., x_n)$ est liée :
<u>$G(x_1, x_2, ..., x_n) = 0$ si et seulement si la famille $(x_1, x_2, ..., x_n)$ est liée.</u>

10) Soit $x \in E$.
On a

$$G(x_1, x_2, ..., x_n, x) = \begin{vmatrix} & & & (x_1 \mid x) \\ & M(x_1, x_2, ..., x_n) & & \vdots \\ & & & (x_n \mid x) \\ (x \mid x_1) & \cdots & (x \mid x_n & \|x\|^2 \end{vmatrix}$$

Soit π le projecteur orthogonal sur V. Pour tout $i \in [[1, n]]$,

$$(x_i \mid x) = (x_i \mid \pi(x)) + (x_i \mid x - \pi(x)) = (x_i \mid \pi(x))$$

car $x - \pi(x) \in V^{\perp}$ et de plus

$$\|x\|^2 = \|x-\pi(x)\|^2 + \|\pi(x)\|^2 .$$

Donc

$$\begin{aligned}
G(x_1,x_2,...,x_n,x) &= \begin{vmatrix} & & & 0 \\ M(x_1,x_2,...,x_n) & & & \vdots \\ & & & 0 \\ (\pi(x)\mid x_1) & \cdots & (\pi(x)\mid x_n & \|x-\pi(x)\|^2 \end{vmatrix} \\
&+ \begin{vmatrix} & & & (x_1\mid\pi(x)) \\ M(x_1,x_2,...,x_n) & & & \vdots \\ & & & (x_n\mid\pi(x)) \\ (\pi(x)\mid x_1) & \cdots & (\pi(x)\mid x_n & \|\pi(x)\|^2 \end{vmatrix} \\
&= \|x-\pi(x)\|^2 G(x_1,x_2,...,x_n) + G(x_1,x_2,...,x_n,\pi(x))
\end{aligned}$$

On a d'après 9) $G(x_1,x_2,...,x_n,\pi(x))) = 0)$ car $(x_1,x_2,...,x_n,\pi(x))$ est liée.
Ainsi

$$\boxed{G(x_1,x_2,...,x_n,x) = \|x-\pi(x)\|^2 G(x_1,x_2,...,x_n).}$$

D'autre part $d(x,V) = \|x-\pi(x)\|$ et $G(x_1,x_2,...,x_n) \neq 0$ car la famille $(x_1,x_2,...,x_n)$ est libre, donc

$$d(x,V)^2 = \frac{G(x_1,x_2,...,x_n,x)}{G(x_1,x_2,...,x_n)}$$

11) Soit $f \in C([0,1])$, on a

$$N_2(f) = \left(\int_0^1 |f(x)|^2\,dx\right)^{\frac{1}{2}} \leq \left(\int_0^1 N_\infty(f)^2 dx\right)^{\frac{1}{2}} = N_\infty(f). \tag{0.1}$$

Soient A une partie de $C([0,1])$ et $f \in \overset{-\infty}{A}$. Soit B_2 une boule de centre f pour la norme N_2.
L'inégalité (0.1) précédente veut que B_2 contienne dans la boule B_∞ de centre f, de même rayon, pour la norme N_∞. Par définition de l'adhérence, B_∞ rencontre A. Donc *a fortiori* B_2 rencontre A.
La boule B_2 étant quelconque $f \in \overset{-2}{A}$.
Ainsi $\boxed{\overset{-\infty}{A} \subset \overset{-2}{A}}$

12) ϕ_0 désigne la fonction constante 1.

On considère la suite de fonctions $(f_n)_{n\geq 1}$ de $C([0,1])$ définie par :

$$\forall n \in \mathbf{N}^* \ , \ \ f_n(x) = \begin{cases} n.x & \text{si} \quad x \in \left[0, \frac{1}{n}\right] \\ \\ 1 & \text{si} \quad x \in \left[\frac{1}{n}, 1\right] \end{cases}$$

On a pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\ f_n \in V_0$.

$$(N_2(f_n - \phi_0))^2 = \int_0^{\frac{1}{n}} |f_n(x) - 1|^2 \, dx \leq \frac{1}{n} \times 1 = \frac{1}{n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$$

donc $\phi_0 \in \overline{V_0}^{2}$.

13) Soit $g \in C([0,1])$. Comme $g = (g - g(0)\phi_0) + g(0)\phi_0$ En utilisant les notation de la question 12, la suite $(g - g(0)\phi_0 + g(o)f_n)_{n\in\mathbf{N}}$ converge dans $(C([0,1]), N_2)$ vers g et est à valeur dans $V - 0$.
Donc $g \in \overline{V_0}^{2}$
Conclusion : V_0 est dense dans $(C([0,1]), N_2)$.
On a $\phi_0 \notin \overline{V_0}^{\infty}$, en effet , sinon il existerait une suite de fonctions $(f_n)_{n\geq 0}$ de V_0 qui convergerait uniformément vers ϕ_0.
En particulier $(f_n)_{n\geq 0}$ convergerait simplement vers ϕ_0 sur $[0,1]$ et donc $\phi_0(0) = \lim_{n\to+\infty} f_n(0) = 0$, ce qui est absurde.
Donc V_0 n'est pas dense dans $C([0,1])$ pour la norme N_∞.

14) Supposons que V soit un sous-espace vectoriel d'un espace vectoriel normé E sur le corps $\mathbb{K}$.

• On a $V \subset \overline{V}$, donc $\overline{V} \neq \emptyset$.

• Soient x et y deux éléments de $\overline{V}$ et $(\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2$. On dispose de suites $(x_n)_{n\geq 0}$ et $(y_n)_{n\geq 0}$ d'éléments de V qui convergent respectivement vers x et y. La suite $(x_n + \lambda y_n)_{n\geq 0}$ est à valeur dans V, car V est un sous espace vectoriel de E et converge vers $x + \lambda y$.

Donc $x + \lambda y \in \overline{V}$

Deux ces deux points vient que $\overline{V}$ est également un sous-espace vectoriel de E.

15) Soit V un sous-espace vectoriel de $C([0,1])$.
• On suppose que V est dense dans $C([0,1])$ pour la norme N_∞, alors en particulier, pour tout $m \geq 0$, $\phi_m \in \overline{V}^{\infty} = C([0,1])$.

• Réciproquement supposons que pour tout $m \geq 0$, $\phi_m \in \overline{V}^{\infty}$ et soit $f \in C([0,1])$.

Par 14., $\text{vect}(\phi_m, m \in \mathbf{N}) \subset \overline{V}^{\infty}$. Mais $\text{vect}(\phi_m, m \in \mathbf{N})$ est l'ensemble des fonctions polynomiales sur le **segment** $[0,1]$, le théorème de Weierstarss assure que

$$\mathcal{C}([0,1]) = \overline{\text{vect}(\phi_m, m \in \mathbf{N})}^{\infty}.$$

Donc

$$\mathcal{C}([0,1]) = \overline{\text{vect}(\phi_m, m \in \mathbf{N})}^{\infty} \subset \overline{\overline{V}^{\infty}}^{\infty} = \overline{V}^{\infty}.$$

Ainsi V est-il dense dans $C([0,1])$ pour la norme N_∞.

16) Soit V un sous-espace vectoriel de $C([0,1])$.
On suppose que V est dense dans $C([0,1])$ pour la norme N_2, alors il *a fortiori*, pour tout $m \geq 0$, $\phi_m \in \overset{-2}{V} = C([0,1])$.
Réciproquement supposons que pour tout $m \geq 0$, $\phi_m \in \overset{-2}{V}$.
Par 14., $\text{vect}(\phi_m, m \in \mathbf{N}) \subset \overset{-2}{V}$. toujourq grâce au théorème de Weierstarss et en utilisant 11, Donc

$$\mathcal{C}([0,1]) = \overline{\text{vect}(\phi_m, m \in \mathbf{N})}^{\infty} \subset \overline{\text{vect}(\phi_m, m \in \mathbf{N})}^{2} \subset \overline{\overline{V}^{2}}^{2} = \overset{-2}{V}.$$

Ainsi V est-il dense dans $C([0,1])$ pour la norme N_2.

E. Un critère de densité de W pour la norme $\mathbf{N_2}$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note W_n l'espace vectoriel engendré par la famille finie $(\phi_{\lambda_k})_{0 \leq k \leq n}$.
W est le sous-espace vectoriel de $C([0,1])$ engendré par la famille $(\phi_{\lambda_k})_{k \in \mathbb{N}}$.

17) On a la suite $(W_n)_{n \geq 0}$ est une suite croissante de sous-espaces vectoriels de $C([0,1])$ et $W = \underset{n \geq 0}{\cup} W_n$ donc d'après la question 5) pour tout entier $\mu \geq 0$ $\lim\limits_{n \to +\infty} d(\phi_\mu, W_n) = d(\phi_\mu, W)$.
Supposons que l'espace W soit dense dans $C([0,1])$ pour la norme N_2 et soit μ un entier positif, on a d'après la question 4) $d(\phi_\mu, W) = 0$ donc $\lim\limits_{n \to +\infty} d(\phi_\mu, W_n) = 0$.
Réciproquement, supposons que $\lim\limits_{n \to +\infty} d(\phi_\mu, W_n) = 0$, pour tout entier $\mu \geq 0$.
Alors, pour tout entier $\mu \geq 0$, $d(\phi_\mu, W) = 0$, et donc d'après la question 4) $\phi_\mu \in \overset{-2}{W}$
Donc d'apr ès la question 16,) W est dense dans $C([0,1])$ pour la norme N_2.

18) On a d'après les questions 1) et 10)

$$d(\phi_\mu, W_n)^2 = \frac{G(\phi_{\lambda_0}, \phi_{\lambda_1}, ..., \phi_{\lambda_n}, \phi_\mu)}{G(\phi_{\lambda_0}, \phi_{\lambda_1}, ..., \phi_{\lambda_n})}.$$

Pour tout $(\alpha, \beta) \in \mathbb{N}$, on a $(\phi_\alpha \mid \phi_\beta) = \int_0^1 x^\alpha . x^\beta dx = \dfrac{1}{\alpha + \beta + 1}$.
Posons pour tout $k \in [[0,n]]$, $\beta_k = \lambda_k + 1$ et $\beta = \mu + 1$, remarquons que $\lambda_k + \beta_k \neq 0$ et $\mu + \beta \neq 0$.
Calculons

$$G(\phi_{\lambda_0}, \phi_{\lambda_1}, ..., \phi_{\lambda_n}, \phi_\mu) = \begin{vmatrix} \dfrac{1}{\lambda_0 + \beta_0} & \dfrac{1}{\lambda_0 + \beta_1} & \cdots\cdots\cdots & \dfrac{1}{\lambda_0 + \beta_n} & \dfrac{1}{\lambda_0 + \beta} \\ \dfrac{1}{\lambda_1 + \beta_0} & \dfrac{1}{\lambda_1 + \beta_1} & & \dfrac{1}{\lambda_1 + \beta_n} & \dfrac{1}{\lambda_1 + \beta} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ \dfrac{1}{\lambda_n + \beta_0} & \dfrac{1}{\lambda_n + \beta_1} & & \dfrac{1}{\lambda_n + \beta_n} & \dfrac{1}{\lambda_n + \beta} \\ \dfrac{1}{\mu + \beta_0} & \dfrac{1}{\mu + \beta_1} & & \dfrac{1}{\mu + \beta_n} & \dfrac{1}{\mu + \beta} \end{vmatrix}.$$

D'après la partie **A)** :

$$G(\phi_{\lambda_0},\phi_{\lambda_1},...,\phi_{\lambda_n},\phi_\mu)=\frac{\prod\limits_{0\le i<j\le n}(\lambda_j-\lambda_i)(\beta_j-\beta_i)}{\prod\limits_{\substack{0\le i\le n\\0\le j\le n}}(\lambda_i+\beta_j)}\times\frac{\prod\limits_{0\le i\le n}(\mu-\lambda_i)(\beta-\beta_i)}{(\mu+\beta)\prod\limits_{0\le i\le n}(\mu+\beta_i)\prod\limits_{0\le i\le n}(\lambda_i+\beta)}.$$

De même on a

$$G(\phi_{\lambda_0},\phi_{\lambda_1},...,\phi_{\lambda_n})=\frac{\prod\limits_{0\le i<j\le n}(\lambda_j-\lambda_i)(\beta_j-\beta_i)}{\prod\limits_{\substack{0\le i\le n\\0\le j\le n}}(\lambda_i+\beta_j)}.$$

Au total,

$$\begin{aligned} d(\phi_\mu,W_n)^2 &= \frac{\prod\limits_{0\le k\le n}(\mu-\lambda_k)(\beta-\beta_k)}{(\mu+\beta)\prod\limits_{0\le k\le n}(\mu+\beta_k)\prod\limits_{0\le i\le n}(\lambda_k+\beta)}\\ &= \frac{\prod\limits_{0\le k\le n}(\mu-\lambda_k)^2}{(2\mu+1)\prod\limits_{0\le k\le n}(\lambda_k+\mu+1)\prod\limits_{0\le i\le n}(\lambda_k+\mu+1)}, \end{aligned}$$

et par suite

$$d(\phi_\mu,W_n)=\frac{1}{\sqrt{2\mu+1}}\prod_{k=0}^{n}\frac{|\lambda_k-\mu|}{\lambda_k+\mu+1}.$$

19) Soit $\mu\ge 0$. Supposons que la suite $(\lambda_k)_{k\in\mathbb{N}}$ tende vers $+\infty$.
alors il est clair que la suite $\left(\frac{|\lambda_k-\mu|}{\lambda_k+\mu+1}\right)_{k\in\mathbb{N}}$ tend vers 1.

Réciproquement, supposons que pour tout $\mu\ge 0$, la suite $\left(\frac{|\lambda_k-\mu|}{\lambda_k+\mu+1}\right)_{k\in\mathbb{N}}$ tende vers 1
Soit $A\in\mathbf{R}$. choisissons un entier naturel μ tel que $\mu\ge A$.
Considérons la fonction $h\ :\ \mathbf{R}_+\,;x\mapsto\frac{|\mu-x|}{x+\mu+1}$
La fonction h est continue sur $[0,\mu]$, dérivable sur $[0,\mu[$ et pour tout $x\in[0,\mu[$ $h'(x)=-\frac{1+2u}{(x+\mu+1)^2}\le 0$.
Donc

$$\forall x\in[0,\mu],\ 0\le h(x)\le h(0)=\frac{\mu}{\mu+1}. \tag{0.2}$$

Comme $\left(\frac{|\lambda_k-\mu|}{\lambda_k+\mu+1}\right)_{k\in\mathbb{N}}$ tend vers 1 on dispose de $k_0\in\mathbf{N}$ tel que :

$$\forall k\in[\![0,k_0]\!]\,;\frac{|\lambda_k-\mu|}{\lambda_k+\mu+1}>\frac{\mu}{\mu+1}$$

Donc pour tout k élément de $[\![0,k_0]\!]$, d'après (0.2)

$$\lambda_k>\mu\ge A,$$

Ainsi la suite $(\lambda_k)_{k\in\mathbb{N}}$ tend-elle vers $+\infty$.

20) D'après la question 17) l'espace W est dense dans $C([0,1])$ pour la norme N_2 si et seulement si $\lim\limits_{n\to+\infty} d(\phi_\mu, W_n) = 0$, pour tout entier $\mu \geq 0$.
Donc il suffit de montrer que : $\lim\limits_{n\to+\infty} d(\phi_\mu, W_n) = 0$ pour tout entier $\mu \geq 0$ si et seulement si la série $\sum\limits_k \dfrac{1}{\lambda_k}$ est divergente.

• Supposons que pour tout entier $\mu \geq 0$, $\lim\limits_{n\to+\infty} d(\phi_\mu, W_n) = 0$.
Alors en particulier pour $\mu = 0$ on a $\lim\limits_{n\to+\infty} \prod\limits_{k=0}^{n} \dfrac{\lambda_k}{\lambda_k+1} = 0$. En passant au logarithme (on a bien $\ln\left(1+\dfrac{1}{\lambda_k}\right) > 0$),

$$\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n} -\ln\left(1+\frac{1}{\lambda_k}\right) = -\infty.$$

D'autre part par concavité du logarithme, pour tout entier $k \geq 0$,

$$\ln\left(1+\frac{1}{\lambda_k}\right) \leq \frac{1}{\lambda_k}$$

Donc la série $\sum\limits_{k\geq1} \dfrac{1}{\lambda_k}$ est divergente.

• Réciproquement supposons la série $\sum\limits_{k\geq1} \dfrac{1}{\lambda_k}$ soit divergente.
Soit μ un entier positif .
La suite $(d(\phi_\mu, W_n))_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite décroissante minorée par 0, donc converge, soit $\alpha = \lim\limits_{n\to+\infty} d(\phi_\mu, W_n)$.
Supposons α non nul, donc strictement positif.

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{|\lambda_n - \mu|}{\lambda_n+\mu+1} = \lim_{n\to+\infty} \frac{d(\phi_\mu, W_n)}{d(\phi_\mu, W_{n-1})} = 1.$$

D'après la question 19) on a la suite $(\lambda_k)_{k\in\mathbb{N}}$ tend vers $+\infty$. On peut choisir $k_0 \in \mathbb{N}$ tel que $\forall k \geq k_0$ $\lambda_k > \mu$.
Alors pour tout $n \geq k_0$,

$$\ln\left(\prod_{k=k_0}^{n} \frac{\lambda_k-\mu}{\lambda_k+\mu+1}\right) = \sum_{k=0}^{n} \ln\left(1-\frac{2\mu+1}{\lambda_k+\mu+1}\right)$$

Comme $\ln\left(1-\frac{2\mu+1}{\lambda_k+\mu+1}\right) \underset{k\to+\infty}{\sim} -\frac{2\mu+1}{\lambda_k}$, par comparaison de séries négatives $\sum\limits_{k\geq k_0} \ln\left(1-\frac{2\mu+1}{\lambda_k+\mu+1}\right)$ diverge et la suite de ses sommes partielles tend vers $-\infty$.
Donc

$$\prod_{k=k_0}^{n} \frac{\lambda_k-\mu}{\lambda_k+\mu+1} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$$

et donc la suite $(d(\phi_\mu, W_n))_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers 0, ce qui est absurde.

Donc $(d(\phi_\mu, W_n))_{n\in\mathbb{N}} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.

Doc W est dense dans $C([0,1])$ pour N_2 si et seulement si $\sum_k \frac{1}{\lambda_k}$ est divergente.
