DS n°5 (X, ENS)

NOTATIONS

Dans tout le problème, le corps de scalaires est $\mathbb{R}$. Si X et Y sont deux espaces vectoriels normés, on note $\mathcal{L}(X, Y)$ l'espace des applications linéaires de X dans Y et on note $|||f|||$ la norme opérateur (norme triple) usuelle de toute application linéaire continue $f \in \mathcal{L}(X, Y)$ (cf. partie II). On notera toujours I l'application identité, quel que soit l'espace sous-jacent, $\mathrm{Tr}(u)$ la trace d'un endomorphisme u sur un espace vectoriel de dimension finie et $\det(u)$ son déterminant. Le déterminant d'une matrice carrée A sera noté $\det(A)$. Enfin, $F^{\perp}$ désignera l'orthogonal (au sens du produit scalaire sous-jacent) d'un sous-espace F.

DÉFINITIONS

Soit $(E, \|\cdot\|)$ un espace normé, on dit qu'une série $\sum_{n\in\mathbb{N}} x_n$ d'éléments de E est*convergente* si la suite de ses sommes partielles converge.

On dit qu'une série $\sum_{n\in\mathbb{N}} x_n$ d'éléments de E est *inconditionnellement convergent* si, pour tout choix de signes $(\epsilon_i)_{i\in\mathbb{N}} \in \{-1, 1\}^{\mathbb{N}}$, la série $\sum_{n\in\mathbb{N}} \epsilon_n x_n$ est convergente dans E.

Préliminaire.

Soit $(E, \|\cdot\|)$ un espace normé. Une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ à valeurs dans E est dite de Cauchy, si pour tout $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$, il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $(p, q) \in \mathbb{N}^2$, si $p \geq q \geq n_0$ alors :

$$\|x_p - x_q\| \leq \varepsilon.$$

1. Montrer qu'une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ à valeurs dans E qui converge est de Cauchy.

   Si toutes les suites de Cauchy à valeurs dans E convergent on dit que E est *complet* ou encore que E est un *espace de Banach.*

2. Montrer qu'une suite à valeurs dans E de Cauchy est bornée.
3. Montrer qu'une suite à valeurs dans E de Cauchy qui admet une valeur d'adhérence converge.
4. Montrer que si E est de dimension finie alors E est un espace de Banach.

Partie I.

1) Démontrer qu'une série de réels $\sum_{n\geq 0} x_n$ est inconditionnellement convergente si et seulement si $\sum_{n\geq 0} |x_n|$ est convergente.

2) Soit $(E, \|.\|)$ un espace vectoriel normé de dimension finie, Soit une série $\sum_{n\geq 0} x_n$ de E. Montrer qu'elle est inconditionnellement convergente si et seulement si elle est absolument convergente c'est-à-dire si et seulement si $\sum_{n\geq 0} \|x_n\|$ converge.

On note c_0 l'espace des suites réelles convergentes vers 0, que l'on munit de la norme $\|u\|_\infty = \sup\limits_{k\in\mathbb{N}} |u_k|$, avec $u = (u_k)_{k\in\mathbb{N}}$.

3. On considère $(x^{(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de Cauchy d'éléments de $(c_0, \|\cdot\|_\infty)$, la variable n est noté en exposant plutôt qu'en indice, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $x^{(n)}$ est donc une suite $\left(x_k^{(n)}\right)_{k\in\mathbb{N}}$ élément de c_0.

a. Montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}$, la suite réelle $(x^{(n)}(k))_{n\in\mathbb{N}}$ est de Cauchy de $\mathbb{R}$.

b. Montrer qu'il existe une suite réelle $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ telle que pour tout $k \in \mathbb{N}$, $(x_k^{(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers a_k.

c. Montrer que la suite $(a_k)_{k\in\mathbb{N}} \in c_0$.

d. Montre que c_0 est un espace de Banach.

4) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on définit l'élément $x^{(n)} = \left(x_k^{(n)}\right)_{k\in\mathbb{N}}$ de c_0 par $x_k^{(n)} = \frac{1}{n+1}$ si $k = n$ et 0 sinon. Montrer que la série $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} x^{(n)}$ est inconditionnellement convergente dans c_0.

5) Conclure.

Partie II : lemme de Lewis.

Dans cette partie, $(E, \|.\|)$ désigne un espace vectoriel normé de dimension n, où $n \in \mathbb{N}\backslash\{0\}$. On définit ℓ_2^n comme l'espace $\mathbb{R}^n$ muni de sa structure euclidienne canonique. La norme est donc $\left\|(x_i, \dots, x_n)\right\|_2 = \left(\sum\limits_{k=1}^n x_k^2\right)^{1/2}$. On note β_0 la base canonique de $\mathbb{R}^n$.
L'application $\mathcal{L}(\ell_2^n, E) \to \mathbb{R}_+$; $v \mapsto \sup\{\|v(x)\|, \|x\|_2 \leq 1\}$ est une norme sur $\mathcal{L}(\ell_2^n, E)$, qui sera notée $|||\cdot|||$
Soit

$$K = \{u \in \mathcal{L}(\ell_2^n, E), \quad |||u||| = 1\}.$$

On fixe une base β de E. Pour $u \in \mathcal{L}(\ell_2^n, E)$, on définit $\Phi(u) = |\det(A)|$ où A est la matrice représentative de u dans les bases β_0 et β.

1) Montrer qu'il existe $u_0 \in K$ tel que $\sup\limits_{u \in K} \Phi(u) = \Phi(u_0)$

2) Montrer que u_0 est inversible.

3) On fixe $v \in \mathcal{L}(\ell_2^n, E)$ et $\epsilon > 0$. Montrer que[1] $\left|\det(I + \epsilon u_0^{-1} \circ v)\right| \leqslant (1 + \epsilon |||v|||)^n$.

4) Soit $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$. Montrer que pour tout réel t, on a $\det(I + tf) = 1 + t\,\mathrm{Tr}(f) + o(t)$.

5) En déduire que u_0 vérifie : pour tout $v \in \mathcal{L}(\ell_2^n, E)$, on a $\mathrm{Tr}(u_0^{-1} \circ v) \leqslant n |||v|||$
Que vaut $\sup\{\mathrm{Tr}(u_0^{-1} \circ v) \mid v \in \mathcal{L}(\ell_2^n, E)$ avec $|||v||| \leqslant 1\}$?

Partie III : lemme de Dvoretzky-Rogers.

On reprend les notations de la partie II.

1) Soit $i \in \{1, \ldots, n-1\}$. Soit F un sous-espace de ℓ_2^n de dimension i. On note $P \in \mathcal{L}(\ell_2^n)$ la projection orthogonale sur $F^\perp$.

- 1-a) Montrer que $\dfrac{n-i}{n} \leqslant |||u_0 \circ P|||$.
- 1-b) En déduire qu'il existe $y \in F^\perp$ tel que $\|u_0(y)\| \geqslant \dfrac{n-i}{n}$ et $\|y\|_2 = 1$.

2) Construire une base orthonormale $(y_1, \ldots, y_n)$ de ℓ_2^n telle que $\|u_0(y_j)\| \geqslant \dfrac{n-j+1}{n}$, pour tout $j \in \{1, \ldots, n\}$.

3) Soit $m = \left[\frac{n}{2}\right] + 1$ où $\left[\frac{n}{2}\right]$ désigne la partie entière de $\frac{n}{2}$. On définit les vecteurs de E : $v_i = \|u_0(y_i)\|^{-1} . u_0(y_i)$ pour $1 \leqslant i \leqslant m$.

Montrer que pour tous $a_1, \ldots, a_m \in \mathbb{R}$, $\left\|\sum\limits_{i=1}^m a_i v_i\right\| \leqslant 2 \left(\sum\limits_{i=1}^m a_i^2\right)^{1/2}$

Partie IV : théorème de Dvoretzky-Rogers.

Dans cette partie, $(X, \|.\|)$ désigne un espace de Banach de dimension infinie.

On fixe une suite de réels positifs $(c_n)_{n \in \mathbb{N}}$ telle que $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n^2$ converge. On pose $c = 2 \left(\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n^2\right)^{1/2}$.

1) Montrer qu'il existe une suite strictement croissante d'entiers $(n_j)_{j \in \mathbb{N}}$ avec $n_0 = 0$ vérifiant $\sum\limits_{n \geqslant n_k} c_n^2 \leqslant c^2 4^{-k}$ pour tout entier k.

2) Montrer qu'il existe une suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de vecteurs de X de norme 1 telle que pour tout entier k et pour tous réels $a_{n_k+1}, \ldots, a_{n_{k+1}} \in \mathbb{R}$, $\left\|\sum\limits_{i=n_k+1}^{n_{k+1}} a_i v_i\right\| \leqslant 2 \left(\sum\limits_{i=n_k+1}^{n_{k+1}} a_i^2\right)^{1/2}$.

1. det désigne ici abusivement le déterminant des matrices dans les bases β_0 et β.

3) Montrer qu'il existe une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de vecteurs de X telle que $\|x_n\| = c_n$ et telle que la série $\sum x_n$ soit inconditionnellement convergente dans X

4) En déduire que dans un espace de Banach de dimension infinie, il existe une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de vecteurs telle $\sum x_n$ soit inconditionnellement convergente dans X et la série $\sum \|x_n\|$ diverge.

Partie V : « unicité » dans le lemme de Lewis.

On reprend les notations de la partie II. On rappelle que $\ell_2^n = \mathbb{R}^n$, muni de sa tructure euclidienne canonique. u_0 est l'application construite dans la partie II.

1) Montrer que pour tout endomorphisme orthogonal w de $\mathbb{R}^n$, $u_0 \circ w$ a les mêmes propriétés que u_0 : on rappelle que u_0 est inversible, $|||u_0||| = 1$ et pour tout $v \in \mathcal{L}(\ell_2^n, E)$, on a $\mathrm{Tr}(u_0^{-1} \circ v) \leqslant n|||v|||$.

2) Soit $f \in GL(\mathbb{R}^n)$ (on rappelle qu'il s'agit de l'ensemble des endomorphismes inversibles de $\mathbb{R}^n$).

— 2-a) Montrer qu'il existe un endomorphisme s de $\mathbb{R}^n$, symétrique défini positif[2] tel que
$f^* \circ f = s \circ s$.

— 2-b) Montrer qu'il existe un endomorphisme orthogonal u de $\mathbb{R}^n$ et un endomorphisme s symétrique défini positif tels que $f = u \circ s$.

On suppose qu'il existe $u_1 \in \mathcal{L}(\ell_2^n, E)$ ayant les mêmes propriétés que u_0 : u_1 est inversible, $|||u_1||| = 1$ et pour tout $v \in \mathcal{L}(\ell_2^n, E)$, on a $\mathrm{Tr}(u_1^{-1} \circ v) \leqslant n|||v|||$.

3) Montrer qu'il existe un automorphisme orthogonal u de $\mathbb{R}^n$ et un endomorphisme s symétrique défini positif tel que $u_1 = u_0 \circ u \circ s$.

4) Montrer que $\det(s) = 1$ et que $\mathrm{Tr}\left(s^{-1}\right) \leqslant n$.

5) Montrer que si $t_1, \ldots, t_n > 0$, alors $\left(\prod_{k=1}^{n} t_k\right)^{\frac{1}{n}} \leqslant \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} t_k$. Etudier le cas d'égalité.

6) Conclure.

Partie VI : Opérateurs absolument sommants.

Soient X et Y deux espaces vectoriel normés dont on note respectivement les normes $\|.\|$ et $\|.\|'$. Soit $T \in \mathcal{L}(X, Y)$, on note $\Lambda(T)$ l'ensemble des constantes $C \geqslant 0$ telles que pour tout choix d'un nombre fini de vecteurs $x_1, \ldots, x_p \in X$, on ait

$$\sum_{j=1}^{p} \|T(x_j)\|' \leqslant C \ \sup\left\{\Big\| \sum_{j=1}^{p} \epsilon_j x_j \Big\| \ ; \ \epsilon_1, \ldots, \epsilon_p \in \{-1, 1\}\right\}$$

2. c'est à dire un endomorphisme s tel que pour tout x et tout y élément de $\mathbb{R}^n$, $(x|s(y)) = (s(x)|y)$ et $(s(x)|x)$ soit positif, et nul si et seulement si x est nul.

On dit que $T \in \mathcal{L}(X,Y)$ est absolument sommante si $\Lambda(T)$ est non vide.

1) Soit $T \in \mathcal{L}(X,Y)$ absolument sommante. Montrer que $\Lambda(T)$ admet un plus petit élément que l'on notera $\pi(T)$

2) Soit $T \in \mathcal{L}(X,Y)$ absolument sommante. Montrer que T est continue et comparer $|||T|||$ et $\pi(T)$

3) Soient X et Y deux espaces vectoriels normés. Montrer que l'ensemble des applications absolument sommantes de X dans Y est un sous espace vectoriel de $\mathcal{L}(X,Y)$ et que $T \mapsto \pi(T)$ est une norme sur cet espace.

4) Soit X l'espace des fonctions continues sur $[0,1]$ à valeurs réelles muni de la norme sup usuelle : $\|f\|_\infty = \sup_{x\in[0,1]} |f(x)|$. On désigne par Y l'espace des fonctions continues sur $[0,1]$ à valeurs réelles muni de la norme $\|f\|_1 = \displaystyle\int_0^1 |f(x)|\, dx$. Soit J l'application de X dans Y qui à toute fonction continue sur $[0,1]$ associe elle-même.
Montrer que J est absolument sommante et calculer $\pi(J)$.

5) Montrer (de façon élémentaire) que l'identité de c_0 n'est pas absolument sommante.

6) Soient $(E, \|.\|)$ un espace vectoriel normé et une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de vecteurs de E.

- 6-a) Montrer que $(M_p)_{p\in\mathbb{N}}$ est croissante, où $M_P = \sup\Big\{\big\|\sum_{j=0}^{p} \epsilon_j x_j\big\|; \epsilon_0, \ldots, \epsilon_p \in \{-1,1\}\Big\}$
- 6-b) En déduire que si la série $\sum_{n\in\mathbb{N}} x_n$ est inconditionnellement convergente dans E alors la suite $(M_p)_{p\in\mathbb{N}}$ est bornée.
- 6-c) Soient $T \in \mathcal{L}(X,Y)$ absolument sommante et une série $\sum_{n\in\mathbb{N}} x_n$ inconditionnellement convergente dans X. Que peut on dire de $\Big(\big\|T(x_j)\big\|'\Big)_{j\in\mathbb{N}}$?

7) A quelle condition nécessaire et suffisante l'identité d'un espace de Banach est absolument sommante ?

DS n$^{\text{o}}$5 bis (X, ENS)

D'après une correction de S. Gonord.

Préliminaire.

1. Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, suite à valeurs dans E qui admet une limite ℓ.
   Soit $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$. On dispose de n_0, entier tel que pour tout $n \in [\![n_0, +\infty[\![$ on ait :
   $$\|x_n - \ell\| \leq \frac{\varepsilon}{2}.$$
   Donc pour tout p et tout q entiers tels que $p \geq q \geq n_0$, par inégalité triangulaire
   $$\|x_p - x_q\| \leq \|x_p - \ell\| + \|\ell - x_q\| \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$
   Donc notre suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bien de Cauchy.

2. Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de Cauchy à valeurs dans E. En particulier, il est loisible de choisir $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout p et tout q, entiers tels que $p \geq q \geq N$, on ait $\|x_p - x_q\| \leq 1$. Alors pour tout $n \in \mathbb{N}$,
   $$\|x_n - x_N\| \leq \max\{1, \|x_0 - x_N\|, \|x_1 - x_N\|, ..., \|x_{N-1} - x_N\|\},$$
   et donc $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée.
3. Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de Cauchy à valeurs dans E qui admet une valeur d'adhérence notée ℓ.
   Soit $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$.
   - Que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ soit de Cauchy nous fournit $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $(p, q) \in \mathbb{N}$, si $p \geq q \geq n_0$ alors :
     $$\|x_p - x_q\| \leq \frac{\varepsilon}{2}. \tag{1}$$
   - Que ℓ soit une valeur d'adhérence permet de trouver un entier $n_1 \geq n_0$ tel que :
     $$\|x_{n_1} - \ell\| \leq \frac{\varepsilon}{2}. \tag{2}$$

Soit alors $n \geq n_1$. Les équtions (1–2) nous assurent que :

$$\|x_n - \ell\| \leq \|x_n - x_{n_1}\| + \|x_{n_1} - \ell\| \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Donc, $x_n \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} \ell$.

4. Supposons E de dimension finie et prenons $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de Cauchy à valeurs dans E. Par 2, $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est bornée, donc puisque E est de dimension finie, le théorème de Bolzano-Weierstrass assure que $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ admet une valeur d'adhérence et alors 3 assure la convergence de cette suite.
   Donc E est complet.

I.1. — Supposons $\sum x_n$ inconditionnellement convergente. Pour tout $n \in \mathbb{N}$ $\epsilon_n = \operatorname{sgn}(x_n)$ de sorte que $\epsilon_n x_n = |x_n|$. La convergence de $\sum \epsilon x_n = \sum |x_n|$ nous assure de la convergence absolue de $\sum x_n$.
— Supposons que $\sum x_n$ converge absolument. Alors pour toute suite $(\epsilon_n)_{n \in \mathbb{N}}$ Ã valeurs dans $\{1, -1\}$, $\sum \varepsilon_n x_n$ est absolument convergente donc convergente. Donc $\sum x_n$ est inconditionnellment convergente.

I.2. Montrons que, si $\sum x_n$ est inconditionnellement convergente alors $\sum \|x_n\|$ converge. On prend une base $\mathcal{B}$ de E et, comme les normes sont toutes équivalentes, on choisit (sans restreindre la généralité de la démonstration) $\|x\| = \|x\|_\infty$ dans cette base. Si on écrit $x_{n,i}$ les coordonnées de x_n dans la base $\mathcal{B}$ de E alors $\sum x_{n,i}$ est inconditionnellement convergente donc absolument convergente vu la première question et ceci pour tout i.
Comme chaque série coordonnée est absolument convergente, on en déduit que $\sum x_n$ est absolument convergente.
Remarque : la réciproque étant évidente on a l'équivalence en dimension finie des propositions :

i. $\sum x_n$ est inconditionnellement convergente.
ii. $\sum x_n$ est absolument convergente.

I.3. a. Soit $k \in \mathbb{N}$, pour tout p et q,

$$|x^{(p)}(k) - x^{(q)}(k)| \leq \|x^{(p)} - x^{(q)}\|_\infty.$$

Donc, la suite $(x^{(n)})_{n \in \mathbb{N}}$ étant de Cauchy, la suite réelle $(x^{(n)}(k))_{n \in \mathbb{N}}$ l'est aussi.

b. Pour tout entier $k \geq 1$, comme $\mathbb{R}$, espace vectoriel de dimension 1 est complet (cf. préminimaire 4.), la suite $(x_k^{(n)})_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers un réel a_k.

c. Soit $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$. le caractère de Cauchy de $(x^{(n)})_{n \in \mathbb{N}}$ fournit $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout couple (p, q) d'entiers tels que $p \geq q \geq n_0$, alors $\|x^{(p)} - x^{(q)}\|_\infty \leq \frac{\varepsilon}{2}$. Donc la borne supérieure étant un majorant, pour tout couple $(p, q) \in [\![n_0, +\infty]\!]^2$, et tout $k \in \mathbb{N}$,

$$\|x_k^{(p)} - x_k^{(q)}\|_\infty \leq \frac{\varepsilon}{2}.$$

Laissons dans cette inégalité p tendre vers $+\infty$ et l'on obtient que pour tout entier $q \geq n_0$ et tout entier k,

$$\|a_k - x_k^{(q)}\| \leq \frac{\varepsilon}{2}. \tag{3}$$

A ce stade les 5/2 eussent pu, pour conclure, évoqué légitimement le théorème de la double limite en considérant $(x^{(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ comme une suite d'applications définies sur la partie $\mathbb{N}$ de $\mathbb{R}$ de limite nulle en $+\infty$, qui converge uniformément vers a (cf (5).

Plus élémentairement remarquons que $x^{(n_0)}$ admet 0 comme limite de sorte que l'on dispose de $k_1 \in \mathbb{N}$, tel que pour tout $k \in [\![k_1, +\infty]\!]$,

$$|x_k^{(n_0)}| \leq \frac{\varepsilon}{2}. \tag{4}$$

Donc, par (3–4), pour tout entier k, si $k \geq k_1$,

$$|a_k| \leq |a_k - x^{(n_0)}(k)| + |x^{(n_0)}(k)| \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Donc la a est élément de c_0.

d. La borne supérieure étant le PLUS PETIT des majorants, linégalité (3), dit que pour tout entier $q \geq n_0$, on a :

$$\|a - x^q\|_\infty \leq \frac{\varepsilon}{2}. \tag{5}$$

Donc $(x^{(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ converge dans $(c_, \|\cdot\|_\infty)$ vers a.

Donc l'espace vectoriel normé $(c_, \|\cdot\|_\infty)$ est complet.

La preuve de la complétude pour une norme de type « norme infinie » ; obéit souvent à ce schéma. On détermine une limite ponctuel, on montre que cette limite habite l'espace considéré, on termine en montre la convergence vers la limite ponctuelle dans l'e.v.n. considéré.

I.4. $x^{(n)} = (0, \ldots, 0, \frac{1}{n+1}, 0, \ldots)$ donc $\sum\limits_{n=0}^{N} \varepsilon_n x^{(n)} = (\varepsilon_0, \frac{\varepsilon_1}{2}, \ldots, \frac{\varepsilon_N}{N+1}, 0, \ldots)$ qui converge vers la suite $x \in c_0$ définie par $x_k = \dfrac{\varepsilon_k}{k+1}$ car $\left\| x - \sum\limits_{n=0}^{N} \varepsilon_n x^{(n)} \right\|_\infty = \dfrac{1}{N+2}$.

Conclusion : la série $\sum x^{(n)}$ est inconditionnellement convergente.

I.5. On a $\|x^{(n)}\|_\infty = \dfrac{1}{n+1}$ et la série $\sum \|x^{(n)}\|_\infty$ diverge. Ceci prouve qu'en dimension infinie on n'a pas l'équivalence de la question 2.

Deuxième partie

II.1. K est un compact (fermé borné en dimension finie), Φ est continue ($A \mapsto \det A$ est continue en tant que fonction polynomiale, $u \mapsto A$ est continue en tant qu'application linéaire en dimension finie et $x \mapsto |x|$ est continue) donc Φ est bornée sur K et atteint ses bornes.
Conclusion : il existe $u_0 \in K$ tel que $\sup\limits_{u \in K} \Phi(u) = \Phi(u_0)$.

II.2. On note $\beta_0 = (e_1, \dots, e_n)$, $\beta = (\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n)$ et on définit $v \in \mathcal{L}(\ell_2^n, E)$ par $v(e_i) = \varepsilon_i$, on a évidemment $\Phi(v) = 1$. On pose alors $w = \dfrac{v}{|||v|||} \in K$, $\Phi(w) = \dfrac{1}{|||w|||^n}$ par conséquent $\Phi(u_0) \geq \Phi(w) > 0$ et en conclusion u_0 est inversible.

II.3. On remarque que si $|||w||| \leq 1$ alors $\Phi(w) \leq \Phi(u_0)$ (en effet, en posant $v = \dfrac{w}{|||w|||}$ alors $\Phi(w) = \underbrace{|||w|||^n}_{\leq 1} \underbrace{\Phi(v)}_{\leq \Phi(u_0)}$) donc, comme $|||u_0 + \varepsilon v||| \leq 1 + \varepsilon |||v|||$ (inégalité triangulaire) alors, en posant $w = \dfrac{u_0 + \varepsilon v}{1 + \varepsilon |||v|||}$ on obtient

$$\left| \det \left(\frac{u_0 + \varepsilon v}{1 + \varepsilon |||v|||} \right) \right| \leq |\det u_0|$$

soit $|\det u_0| \det(I + \varepsilon u_0^{-1} \circ v) \leq |\det u_0| (1 + \varepsilon |||v|||)^n$ et on obtient le résultat demandé en simplifiant par $|\det u_0| > 0$.
Remarque : on a noté $\det u_0$ le déterminant de la matrice de u_0 ce qui correspond ici à une notation impropre car u_0 n'est pas un endomorphisme.

II.4. Résultat classique sur les polynômes caractéristiques que l'on peut également démontrer en dérivant la fonction polynomiale $P(t) = \det(I_n + tA)$ où A est la matrice de f dans la base canonique de $\mathbb{R}^n$:

$$P(t) = \det(C_1(t), \dots, C_n(t)) \text{ avec } C_i(t) = (ta_{1i}, \dots, 1 + ta_{ii}, \dots, ta_{ni})^{\mathrm{T}}$$

on a $P(0) = 1$ et

$$P'(t) = \sum_{i=1}^{n} \det(C_1(t), \dots, C_i'(t), \dots, C_n(t)) \text{ avec } C_i'(t) = (a_{1i}, \dots, a_{ii}, \dots, a_{ni})^{\mathrm{T}}$$

donc $P'(0) = \mathrm{Tr}(A)$ puisque $\det(C_1(0), \dots, C_i'(0), \dots, C_n(0)) = a_{ii}$ et finalement $\det(\mathrm{Id} + tf) = 1 + t\,\mathrm{Tr}(f) + o(t)$ car $P(t) = P(0) + tP'(0) + o(t)$.

II.5. On rassemble les résultats des deux questions précédentes

$$1 + t\,\mathrm{Tr}(u_0^{-1} \circ v) + o(t) \leq \underbrace{(1 + t|||v|||)^n}_{= 1 + nt|||v||| + o(t)}$$

soit, en soustrayant 1 et en divisant par $t > 0$, on obtient $\mathrm{Tr}(u_0^{-1} \circ v) \leq n|||v||| + o(1)$ et, en passant à la limite quand $t \to 0^+$,

$$\mathrm{Tr}(u_0^{-1} \circ v) \leq n|||v|||.$$

Ensuite on a $\sup\{\mathrm{Tr}(u_0^{-1} \circ v) \mid v \in \mathcal{L}(\ell_2^n, E) \text{ avec } |||v||| \leq 1\} \leq n$ or, pour $v = u_0$ on a égalité donc

$$\sup\{\mathrm{Tr}(u_0^{-1} \circ v) \mid v \in \mathcal{L}(\ell_2^n, E) \text{ avec } |||v||| \leq 1\} = n$$

Troisième partie

III.1. **a.** Soit $v = u_0 \circ P$, on applique le II.5, d'où

$$\mathrm{Tr}(u_0^{-1} \circ v) = \mathrm{Tr}(P) = n - i \leq n|||u_0 \circ P|||$$

ce qui donne le résultat.

b. $|||u_0 \circ P||| = \sup\limits_{\|x\|_2=1} \|u_0 \circ P(x)\|$ et comme la sphère unité est compacte, la borne supérieure est atteinte donc il existe $x \in \ell_2^n$ tel que $\|x\|_2 = 1$ et $|||u_0 \circ P||| = \|u_0 \circ P(x)\|$.
Soit $y = \dfrac{P(x)}{\|P(x)\|_2}$ ($P(x) \neq 0$ car $\|u_0 \circ P(x)\| > 0$) alors, comme $\|P(x)\|_2 \leq 1$,

$$\|u_0(y)\| = \frac{\|u_0 \circ P(x)\|}{\|P(x)\|_2} \geq |||u_0 \circ P||| \geq \frac{n-i}{n} \text{ et } \|y\|_2 = 1.$$

III.2. On sait qu'il existe un vecteur $y_1 \in E$ t.q. $\|y_1\|_2 = 1$ et $\|u_0(y_1)\| = 1$. Soit $F = \mathrm{Vect}(y_1)$ alors, grâce à la question précédente, on sait qu'il existe $y_2 \in F^\perp$ t.q. $\|y_2\|_2 = 1$ et $\|u_0(y_2)\| \geq \dfrac{n-1}{n}$. En outre on a $(y_1|y_2) = 0$.
On procède alors par récurrence. Supposons construite la famille orthonormale $(y_1, \ldots, y_k)$ vérifiant $\forall j \in [1, k]$, $\|u_0(y_j)\| \geq \dfrac{n-j+1}{n}$. On prend $F = \mathrm{Vect}(y_1, \ldots, y_k)$ et on choisit y_{k+1} à l'aide de la question III.1.b. On a effectivement $\|u_0(y_{k+1})\| \geq \dfrac{n-k}{n}$, $\|y_{k+1}\|_2 = 1$ et $(y_j|y_{k+1}) = 0$ pour $j \leq k$ car $y_{k+1} \in F^\perp$. Ceci achève la récurrence.
Conclusion : on a ainsi construit une base orthonormale $(y_1, \ldots, y_n)$ de ℓ_2^n telle que $\|u_0(y_j)\| \geq \dfrac{n-j+1}{n}$ pour tout $j \in [1, n]$.

III.3. Si $j \leq m$ alors $\dfrac{n-j+1}{n} \geq \dfrac{n-m+1}{n} = \dfrac{n-[n/2]}{n} \geq 1/2$ donc $\dfrac{1}{\|u_0(y_j)\|} \leq 2$.

Posons $b_i = \dfrac{a_i}{\|u_0(y_i)\|}$, $b_i^2 \leq 4a_i^2$. On a $\sum\limits_{i=1}^{m} a_i v_i = \sum\limits_{i=1}^{m} b_i u_0(y_i) = u_0\left(\sum\limits_{i=1}^{m} b_i y_i\right)$ d'où

$$\left\|\sum_{i=1}^{m} a_i v_i\right\| \leq \underbrace{|||u_0|||}_{=1} . \quad \underbrace{\left\|\sum_{i=1}^{m} b_i y_i\right\|_2}_{=(\sum\limits_{i=1}^{m} b_i^2)^{1/2} \text{ car } (y_i) \text{ b.o.n.}}$$

$$\leq 2\sum_{i=1}^{m} a_i^2$$

Quatrième partie

IV.1. On peut prendre $n_0 = 0$ car $\sum\limits_{n\geq 0} c_n^2 = \dfrac{c^2}{4} \leq c^2$.

La suite $u_p = \sum\limits_{n\geq p} c_n^2$ est décroissante de limite nulle.

On prend $n_1 = 1$ (qui convient bien ici) puis, par récurrence sur k, si on a choisi n_k on prend pour n_{k+1} le plus petit entier $\geq n_k + 1$ tel que $u_{n_{k+1}} \leq c^2 4^{-(k+1)}$.

IV.2. Soit F_k un sous-espace vectoriel de E de dimension $2(n_{k+1} - n_k) - 1$ (ceci est possible car E est de dimension infinie), on a vu au III que l'on pouvait définir une suite v_{n_k+i} de vecteurs de norme 1 telle que, pour tous réels $a_{n_k+1}, \ldots, a_{n_{k+1}}$ on ait

$$\left\|\sum_{i=n_k+1}^{n_{k+1}} a_i v_i\right\| \leq 2\left(\sum_{i=n_k+1}^{n_{k+1}} a_i^2\right)^{1/2}$$

ce qui est le résultat attendu.

IV.3. Posons $x_n = c_n v_n$ et montrons que, quelque soit le choix des ε_n, la série $\sum \varepsilon_n x_n$ converge.

On utilise le critère de Cauchy, majorons $\left\|\sum\limits_{n=m}^{m+p} \varepsilon_n x_n\right\|$. On note n_k le plus grand entier tel que $n_k + 1 \leq m$ et n_h le plus petit entier tel que $m + p \leq n_h$ alors, en prenant la propriété du III.2 avec $a_n = \varepsilon_n c_n$ si $m \leq n \leq m+p$ et $a_n = 0$ si $n_k + 1 \leq n < m$ on a

$$\left\|\sum_{n=m}^{n_{k+1}} \varepsilon_n x_n\right\| \leq 2\left(\sum_{n=m}^{n_{k+1}} c_n^2\right)^{1/2} \leq 2c2^{-k},$$

de même avec $a_n = 0$ si $m + p < n \leq n_h$ on a

$$\left\| \sum_{n=n_{h-1}+1}^{m+p} \varepsilon_n x_n \right\| \leq 2 \left(\sum_{n=n_{h-1}+1}^{m+p} c_n^2 \right)^{1/2} \leq 2c2^{-(h-1)}.$$

D'où, en utilisant l'inégalité triangulaire

$$\begin{aligned} \left\| \sum_{n=m}^{m+p} \varepsilon_n x_n \right\| &\leq 2c(2^{-k} + 2^{-k-1} + \cdots + 2^{-(h-1)}) \\ &\leq 4c2^{-k}. \end{aligned}$$

la série vérifie bien le critère de Cauchy, elle converge.

IV.4. Il suffit maintenant de choisir $c_n = \dfrac{1}{n+1}$.
Remarque : ceci généralise le résultat du I.4.

Cinquième partie

V.1. Soit $u_1 = u_0 \circ w$.

— u_1 inversible : évident.

— $|||u_0 \circ w||| = \sup\limits_{\|x\|_2=1} \|u_0 \circ w(x)\| = \sup\limits_{\|y\|_2=1} \|u_0(y)\| = |||u_0|||$ car w est bijectif et conserve la norme.

— $\mathrm{Tr}(u_1^{-1} \circ v) = \mathrm{Tr}(w^{-1} \circ u_0^{-1} \circ v) = \mathrm{Tr}(u_0^{-1} \circ v \circ w^{-1}) \leq n|||v \circ w^{-1}||| = n|||v|||$ car w^{-1} est aussi un automorphisme orthogonal.

V.2. **a.** Classique : $f^* \circ f$ est diagonalisable (endomorphisme autoadjoint) et il existe une base orthonormée dans laquelle $M(f^* \circ f) = \mathrm{Diag}(\lambda_i)$ avec $\lambda_i > 0$. On prend pour s l'endomorphisme de matrice $\mathrm{Diag}(\sqrt{\lambda_i})$ dans cette base. s est bien symétrique défini positif.

b. Soit $u = f \circ s^{-1}$ alors $u^* = s^{-1} \circ f^*$ et $u^* \circ u = s^{-1} \circ f^* \circ f \circ s^{-1} = \mathrm{Id}$ donc u est orthogonal et $f = u \circ s$.

V.3. On applique la question précédente à $f = u_0^{-1} \circ u_1$.

V.4. On a $s = u^{-1} \circ u_0^{-1} \circ u_1$ et s symétrique > 0 d'où

$$0 < \det s = |\det s| = \underbrace{|\det u^{-1}|}_{=1} . \frac{|\det u_1|}{|\det u_0|}$$

car le déterminant d'un automorphisme orthogonal vaut ± 1. Or, par définition, $|\det u_0| \geq |\det u_1|$ donc $\det s \leq 1$.
Enfin, comme $s^{-1} = u_1^{-1} \circ (u_0 \circ u)$ on écrit

$$\mathrm{Tr}(s^{-1}) \leq n|||u_0 \circ u||| \underbrace{=}_{\text{cf VI.1}} n|||u_0||| = n.$$

V.5. Classique : on prend le logarithme et on utilise sa stricte concavité. Il y a égalité pour $t_1 = \ldots = t_n$.

V.6. Si $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ désignent les valeurs propres de s ($\lambda_i > 0$) alors $\det s = \lambda_1 \ldots \lambda_n \leq 1$ et $\mathrm{Tr}(s^{-1}) = \dfrac{1}{\lambda_1} + \cdots + \dfrac{1}{\lambda_n} \leq n$.

Si on applique l'inégalité de 5 à $t_i = \dfrac{1}{\lambda_i}$ on obtient

$$1 \leq \left(\prod_{k=1}^{n} \frac{1}{\lambda_k}\right)^{1/n} \leq \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \lambda_k \leq 1.$$

On a ainsi égalité dans l'inégalité du 5 ce qui signifie que $\lambda_1 = \ldots = \lambda_n = 1$.
Conclusion : $s = I$ (s est diagonalisable et admet une seule valeur propre 1) et $u_1 = u_0 \circ u$ donc il y a "unicité" de u_0 à un automorphisme orthogonal près.

Sixième partie

VI.1. — $\Lambda(T)$ est un sous-ensemble non vide minoré de $\mathbb{R}$, il possède une borne inférieure $\pi(T)$.

— Montrons que $\pi(T) \in \Lambda(T)$.

Soit $h > 0$ alors $\pi(T) + h \in \Lambda(T)$ (en effet, $\Lambda(T)$ est un intervalle de $\mathbb{R}$ car si $C \in \Lambda(T)$ alors $\forall C' \geq C$, $C' \in \Lambda(T)$). On a ainsi

$$\forall (x_1, \ldots, x_p) \in X^p,\ \sum_{j=1}^{p} \|T(x_j)\|' \leq (\pi(T) + h) \sup\left\{\left\|\sum_{j=1}^{p} \varepsilon_j x_j\right\| \ ;\ \varepsilon_j = \pm 1\right\}$$

et on sait que l'on peut permuter les quantificateurs $\forall$ donc $\forall (x_1, \ldots, x_p) \in X^p$,

$$\forall h > 0,\ \sum_{j=1}^{p} \|T(x_j)\|' \leq (\pi(T) + h) \sup\left\{\left\|\sum_{j=1}^{p} \varepsilon_j x_j\right\| \ ;\ \varepsilon_j = \pm 1\right\}$$

et quand $h \to 0$, on obtient

$$\forall (x_1, \ldots, x_p) \in X^p,\ \sum_{j=1}^{p} \|T(x_j)\|' \leq \pi(T) \sup\left\{\left\|\sum_{j=1}^{p} \varepsilon_j x_j\right\| \ ;\ \varepsilon_j = \pm 1\right\}$$

soit $\pi(T) \in \Lambda(T)$ c.q.f.d.

VI.2. On prend $p = 1$ alors $\|T(x_1)\|' \leq \pi(T) \sup\{\underbrace{\|\varepsilon_1 x_1\|}_{=\|x_1\|} \ ;\ \varepsilon_1 = \pm 1\}$. Soit T est continue et en outre $|||T||| \leq \pi(T)$ (et en général, on n'a pas égalité, cf. VI.5).

VI.3. On note $\mathcal{AS}(X,Y)$ l'ensemble des applications absolument sommantes de X dans Y.

— $\mathcal{AS}(X,Y) \neq \emptyset$ car l'application nulle est absolument sommante et si $\pi(T) = 0$ alors $T = 0$ or, vu l'inégalité de la question 2, $\pi(T) = 0 \Rightarrow |||T||| = 0 \Rightarrow T = 0$.

— Si $T \in \mathcal{AS}(X,Y)$ alors $\lambda T \in \mathcal{AS}(X,Y)$ et on a $\pi(\lambda T) = |\lambda| \pi(T)$ (évident).

— Montrons l'inégalité triangulaire (et la stabilité pour $+$) :

$$\begin{aligned}\sum_{j=1}^{p} \|(T+U)(x_j)\| &\leq \sum_{j=1}^{p} \|T(x_j)\| + \sum_{j=1}^{p} \|U(x_j)\| \\ &\leq \pi(T) \sup\left\{\left\|\sum_{j=1}^{p} \varepsilon_j x_j\right\| ;\ \varepsilon_j = \pm 1\right\} + \pi(U) \sup\left\{\left\|\sum_{j=1}^{p} \varepsilon_j x_j\right\| ;\ \varepsilon_j = \pm 1\right\} \\ &\leq [\pi(T) + \pi(U)] \sup\left\{\left\|\sum_{j=1}^{p} \varepsilon_j x_j\right\| ;\ \varepsilon_j = \pm 1\right\}\end{aligned}$$

donc $T + U \in \mathcal{AS}(X,Y)$ et $\pi(T+U) \leq \pi(T) + \pi(U)$.

VI.4. Soit $x \in [0,1]$, on pose $|f_j(x)| = \varepsilon_j f_j(x)$ où $\varepsilon_j = \pm 1$ selon le signe de $f_j(x)$. On a ainsi

$$\begin{aligned}\sum_{j=1}^{p} |f_j(x)| &= \sum_{j=1}^{p} \varepsilon_j f_j(x) \\ &\leq \left\|\sum_{j=1}^{p} \varepsilon_j f_j\right\|_\infty \\ &\leq \sup\left\{\left\|\sum_{j=1}^{p} \varepsilon_j f_j\right\|_\infty ;\ \varepsilon_j = \pm 1\right\}.\end{aligned}$$

Cette dernière quantité étant indépendante de x, on peut donc intégrer de 0 à 1 d'où

$$\begin{aligned}\sum_{j=1}^{p} \|J(f_j)\|_1 = \sum_{j=1}^{p} \int_0^1 |f_j(x)|\,\mathrm{d}x &= \int_0^1 \left(\sum_{j=1}^{p} |f_j(x)|\right) \mathrm{d}x \\ &\leq \sup\left\{\left\|\sum_{j=1}^{p} \varepsilon_j f_j\right\|_\infty ;\ \varepsilon_j = \pm 1\right\}\end{aligned}$$

donc J est absolument sommante et $\pi(J) \leq 1$.
Enfin, si $\pi(J) < 1$ alors, en prenant $f = 1$ qui appartient à X on obtient

$$1 = \|f\|_1 \leq \pi(J) \|f\|_\infty < 1$$

ce qui est absurde.
Conclusion : $\pi(J) = 1$.

VI.5. C'est une conséquence immédiate de la partie I.
En effet, la série $\sum x^{(n)}$ est inconditionnellement convergente mais n'est pas absolument convergente. On a $X_p = \sum_{j=1}^{p} \varepsilon_j x^{(j)} = (\varepsilon_0, \ldots, \dfrac{\varepsilon_p}{p+1}, 0, \ldots)$ donc $\|X_p\| = 1$. Or s'il existe $\pi(I)$ alors les sommes partielles $\sum_{j=1}^{p} \| \underbrace{I(x^{(j)})}_{=x^{(j)}} \|$ sont majorées et cela entraîne que la série $\sum x^{(j)}$ est absolument convergente ce qui est faux.

VI.6. **a.** Soit $M_p = \left\| \sum_{j=0}^{p} \varepsilon_j x_j \right\|$ (la borne supérieure est atteinte car on opère sur un ensemble fini) on utilise alors l'inégalité suivante :

$$\begin{aligned}
2\left\|\sum_{j=0}^{p} \varepsilon_j x_j\right\| &= \left\|2\sum_{j=0}^{p} \varepsilon_j x_j\right\| \\
&= \left\|\sum_{j=0}^{p} \varepsilon_j x_j + x_{p+1} + \sum_{j=0}^{p} \varepsilon_j x_j - x_{p+1}\right\| \\
&\leq \left\|\sum_{j=0}^{p} \varepsilon_j x_j + x_{p+1}\right\| + \left\|\sum_{j=0}^{p} \varepsilon_j x_j - x_{p+1}\right\| \leq 2M_{p+1}
\end{aligned}$$

ce qui donne effectivement $M_p \leq M_{p+1}$.

b. On raisonne par l'absurde en supposant que $\lim_{p\to+\infty} M_p = +\infty$.
Montrons par récurrence sur n qu'il existe une suite (p_n) d'entiers strictement croissante et une famille $(\varepsilon_j) \in \{-1, +1\}^{\mathbb{N}}$ telle que $\left\| \sum_{j=0}^{p_n} \varepsilon_j x_j \right\| \geq n$.

— $n = 0$: immédiat.

— On suppose la propriété vraie à l'ordre n. Choisissons $p_{n+1} > p_n$ tel que $M_{p_{n+1}} \geq 1 + n + 2M_{p_n}$. On écrit que $M_{p_{n+1}} = \left\| \sum_{j=0}^{p_{n+1}} \varepsilon'_j x_j \right\|$ et on pose $\varepsilon_j = \varepsilon'_j$ pour $j \in [p_n + 1, p_{n+1}]$.
On a alors

$$\begin{aligned}
\left\|\sum_{j=0}^{p_{n+1}} \varepsilon_j x_j\right\| &= \left\|\sum_{j=0}^{p_{n+1}} \varepsilon'_j x_j - \sum_{j=0}^{p_n} \varepsilon'_j x_j + \sum_{j=0}^{p_n} \varepsilon_j x_j\right\| \\
&\geq \left\|\sum_{j=0}^{p_{n+1}} \varepsilon'_j x_j\right\| - 2M_{p_n} \\
&\geq M_{p_{n+1}} - 2M_{p_n} \geq n + 1.
\end{aligned}$$

Conclusion : la série $\sum x_n$ n'est pas inconditionnellement convergente ce qui est contraire à l'hypothèse donc la suite M_p est croissante et majorée donc convergente.

c. Si T est absolument sommante et $\sum x_n$ inconditionnellement convergente alors, en notant $M = \sup_{p\in\mathbb{N}} M_p$ qui existe d'après la question précédente, on a

$$\sum_{j=0}^{p} \|T(x_j)\|' \leq \pi(T)M$$

donc la série $\sum \|T(x_j\|'$ est convergente.

VI.7. — On a vu au IV.4 que dans un espace de Banach de dimension infinie, il existe une suite (x_n) de vecteurs inconditionnellement convergente mais non absolument convergente.

— On vient de voir à la question précédente que, si I est absolument sommante alors toute suite inconditionnellement convergente est absolument convergente.

On a donc l'implication suivante : si l'identité d'un espace de Banach est absolument sommante alors cet espace est de dimension finie.
Montrons la réciproque. Comme toutes les normes sont équivalentes, choisissons la norme 1 pour E espace vectoriel normé de dimension n, rapporté à une base $\mathcal{B}$. On identifie E à $\mathbb{R}^n$ et on écrit $x_j = (x_{j,1}, \ldots, x_{j,n})$. On a les relations

$$\sum_{j=1}^{p} \|x_j\|_1 = \sum_{j=1}^{p}\sum_{i=1}^{n} |x_{j,i}| = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{p} |x_{j,i}|$$
$$\left\|\sum_{j=1}^{p} \varepsilon_j x_j\right\|_1 = \left\|\left(\sum_{j=1}^{p} \varepsilon_j x_{j,1}, \ldots, \sum_{j=1}^{p} \varepsilon_j x_{j,n}\right)\right\|_1 = \sum_{i=1}^{n}\left|\sum_{j=1}^{p} \varepsilon_j x_{j,i}\right|.$$

Soit $i_0 \in [1, n]$ tel que $M = \sum_{j=1}^{p} |x_{j,i_0}| = \max \sum_{j=1}^{p} |x_{j,i}|$ alors $\sum_{j=1}^{p} \|x_j\|_1 \leq nM$ puis, en prenant $\varepsilon_j = \operatorname{sgn}(x_{j,i_0})$, on a $\left\|\sum_{j=1}^{p} \varepsilon_j x_j\right\|_1 \geq M$.
Conclusion : on a ainsi prouvé que, pour toute suite (x_j) de vecteurs de E,

$$\sum_{j=1}^{p} \|x_j\|_1 \leq n \sup \left\{ \left\|\sum_{j=1}^{p} \varepsilon_j x_j\right\|_1 \; ; \; \varepsilon_j = \pm 1 \right\}.$$

Finalement on a l'équivalence : l'identité d'un espace de Banach est absolument sommante ssi cet espace est de dimension finie.