DM n^{o}9

EXERCICE

Soit la série entière de la variable complexe z, $\sum\limits_{n\geq 1}^{+\infty} \frac{z^n}{\sqrt{n}}$.

1. Donner le rayon de convergence de cette série entière. On note f sa somme.
2. Déterminer l'ensemble Z des complexes z pour lesquels l'application

$$u \mapsto \frac{1}{e^{u^2} - z}$$

est intégrable sur $]0, +\infty[$. Soit

$$g\ :\ Z \to \mathbf{C}\,;\ z \mapsto \frac{2z}{\sqrt{\pi}} \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}u}{e^{u^2} - z}.$$

3. Montrer que f et g coïncident sur $\{z \in \mathbf{C}|\ |z| < 1\}$.
4. Montrer que $f(e^{i\theta}) = g(e^{i\theta})$, pour tout $\theta \in]0, 2\pi[$.

PROBLÈME

Fonction Γ

I. La fonction gamma

On va étudier la fonction Γ d'Euler, déjà rencontrée en exercice et définie, rappelons le, sur $\mathbf{R}_+^*$ par

$$\Gamma\ : \mathbf{R}_+^* \to \mathbf{R}\,; x \mapsto \int_0^{+\infty} t^{x-1} e^{-t} \mathrm{d}t,$$

pour tout réel strictement positif.

1. Montrer que Γ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ et donner l'expression de ses dérivées.
2. Montrer que pour tout réel $x \geq 0$, $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$; en déduire $\Gamma(n)$ pour tout entier $n \geq 1$.
3. Montrer que Γ est convexe.
4. Montrer que la dérivée de Γ s'annule en un et un seul point de $\mathbf{R}_+^*$.
5. Donner la limite en $+\infty$ et un équivalent en 0 de Γ. Tracer l'allure de la courbe représentative de Γ.
6. Soit un réel $x > 0$. Pour tout entier $n \geq 0$, l'application

$$u_n\ :\ \mathbf{R}_+^* \to \mathbf{R}\,;\ t \mapsto \begin{cases} t^{x-1}\left(1 - \frac{t}{n}\right)^{\frac{1}{n}}, & \text{si } t \leq n, \\ 0, & \text{sinon.} \end{cases}.$$

   Montrer que $\int_0^{+\infty} u_n(t)\mathrm{d}t$ tend vers $\Gamma(x)$ lorsque n tend vers $+\infty$.
   On considère dans le suite l'applications

$$I\ :\ \mathbf{R}_+^* \to \mathbf{R}\,;\ x \mapsto \int_0^1 t^{x-1} e^{-t} \mathrm{d}t$$

7. Montrer que pour tout réel $x > 0$,

$$I(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n!(n+x)}$$

8. Montrer que pour tout réel x qui n'est pas un entier négatif ou nul, $\sum \frac{(-1)^n}{n!(n+x)}$ converge.
9. Montrer que pour réel x, $\int_1^{+\infty} t^{x-1}e^{-t}\mathrm{d}t$ converge.

   On dispose donc du prolongement à $\mathbf{C} \setminus \mathbf{Z}_-$ de Γ suivant :

$$\tilde{\Gamma} \ : \ \mathbf{R} \setminus \mathbf{Z}_- \to \mathbf{R}\,;\ x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n!(n+x)} + \int_1^{+\infty} t^{x-1}e^{-t}\mathrm{d}t.$$

10. Montrer que $\tilde{\Gamma}$ est indéfiniment dérivable.

III. Caractérisation de la fonction gamma par convexité de son logarithme

On se propose de donner une caractérisation de la fonction Γ due à Bohr[1] et Mollerup, plus précisément :

l'ensemble $\mathcal{F}$ des applications f de $\mathbf{R}_+^*$ dans $\mathbf{R}$ strictement positives, continues, telles que

i. $f(1) = 1$;

ii. Pour tout $x \in \mathbf{R}_+^*$, $f(x+1) = xf(x)$;

iii. l'application $\ln \circ f$ *est convexe*[2].

possède un unique élément, la fonction Γ d'Euler.

1. Inégalité d'Hölder

   Soient p et q des réels conjugués, c'est-à-dire que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.

   On rappelle l'inégalité d'Hölder vue en exercice en début d'année :

   Soit n un entier naturel non nul, pour tout n-uplets $(x_i)_{i=1,\dots,n}$ et $(y_i)_{i=1,\dots,n}$ de réels positifs ou nuls, on a

$$\sum_{i=1}^n x_i y_i \leq \left(\sum_{i=1}^n x_i^p\right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{i=1}^n y_i^q\right)^{\frac{1}{q}}. \tag{1}$$

   Soient f et g des éléments de $\mathcal{C}^0(\mathbf{R}_+^*, \mathbf{R})$.

   (a) Soient $[a,b]$ un segment non réduit à un point inclus dans $\mathbf{R}_+^*$. Montrer que

$$\left|\int_a^b f(t)g(t)\mathrm{d}t\right| \leq \left(\int_a^b |f|^p\right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_a^b |g|^q\right)^{\frac{1}{q}}. \tag{2}$$

   (b) On suppose que $|f|^p$ et $|g|^p$ sont intégrables sur $\mathbf{R}_+^*$. Montrer que fg est intégrable sur $\mathbf{R}_+^*$ et que

$$\left|\int_0^{+\infty} f(t)g(t)\mathrm{d}t\right| \leq \left(\int_0^{+\infty} |f|^p\right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_0^{+\infty} |g|^q\right)^{\frac{1}{q}}. \tag{3}$$

   (*Inégalité d'Hölder.*)

2. Montrer que $\Gamma \in \mathcal{F}$.
3. Soit f un élément de $\mathcal{F}$. Possons $g = \ln \circ f$. Montrer que pour tout élément x de $]0,1[$ et tout entier naturel non nul n,

$$\ln n \leq \frac{g\,(n+1+x) - g\,(n+1)}{x} \leq \ln\,(n+1)\,.$$

   En déduire, que pour tout élément x de $]0,1[$ et tout entier naturel non nul n,

$$0 \leq g\,(x) - \ln\left(\frac{n!n^x}{x\,(x+1)\dots.(x+n)}\right) \leq \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right).$$

1. Le frère !
2. Ce qui veut dire que f est très convexe.

4. En déduire que $f = \Gamma$.
5. Montrer que pour tout élément x de $\mathbf{R}_+^*$, $\Gamma(x) = \lim_{n \to +\infty} \left(\frac{n! n^x}{x(x+1)....(x+n)} \right)$.
6. Retrouver le résultat de la question précédente en utilisant la question I. 6.

IV. Fonction B[3]

1. Montrer que la quantité $\mathrm{B}(x, y) = \int_0^1 t^{x-1} (1-t)^{y-1} \,\mathrm{d}\, t$ est bien définie pour tout élément x et tout élément y de $\mathbf{R}_+^*$.
2. Montrer que pour tout élément x et tout élément y de $\mathbf{R}_+^*$,
$$\mathrm{B}(x, y) = \frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)}.$$
On pourra utiliser la partie I.
3. Calculer $\mathrm{B}\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$, en déduire $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)$, puis $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-s^2} \,\mathrm{d}\, s$.
Application : Une particule est attirée vers un point fixe O, par une force inversement proportionnelle à sa distance à O. Si la particule est initialement au repos, calculer le temps qu'elle mettra à atteindre le point O.

3. Il s'agit d'un *bêta* majuscule

Indication pour l'exercice

1. Regardez simplement série de Riemann $\sum_{n\geq 1} \frac{1^n}{\sqrt{n}}$

2. Soit $z \in \mathbf{C}$. L'intégrabilité de $u \mapsto \frac{1}{\mathrm{e}^{u^2}-z}$ sur $]0,+\infty[$ exige (pour respecter le programme) que cette application soit définie et continue par morceaux sur $]0,+\infty[$. Comme l'exponentiel induit une bijection de $\mathbf{R}_+^*$ sur $]1,+\infty[$, si $u \mapsto \frac{1}{\mathrm{e}^{u^2}-z}$ est intégrable sur $]0,+\infty[$, alors z n'est pas élément de $]1,+\infty[$.

   Suposons inversement : $z \notin]1,+\infty[$.

   Regarder la convergence au voisinage de $+\infty$, puis de 0, dans le dernier cas distinguer $z=1$ zt $z \neq 1$

   Concluons : $Z = \mathbf{C} \setminus [1,+\infty[$.

3. Soit z un élément du disque ouvert unité de $\mathbf{C}$.

   Posons $h\ :]0,+\infty[\to \mathbf{R}\,;\ u \mapsto \frac{z}{\mathrm{e}^{u^2}-z}$ et pour $n \in \mathbf{N}^*$, $f_n;]0,+\infty[\to \mathbf{R}\,;\ u \mapsto z^n(\mathrm{e}^{-u^2})^n$, ainsi la série $\sum_{n\geq 1} f_n$ converge simplement et a pour somme h. Notons que tant les f_n que f sont continues.

   Utiliser par exemple le théorème d'interversion série/intégrale

$$g(z) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \sum_{n=1}^{+\infty} \int_{\mathbf{R}_+^*} f_n = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{z^n}{\sqrt{n}} = f(z).$$

4. *On peut constater que le théorème précédent ne marche plus pour z de module* 1*. Sans doute pourrait-on montrer le résultat par une transformation d'Abel pour la série, ou plus sûrement en appliquant, comme on le voit souvent le théorème de convergence dominée. Nous allons donner une preuve élémentaire.*

   Soit $\theta \in]0,2\pi[$ et $z = \mathrm{e}^{i\theta}$ Gardons les notations de 3, et notons pour tout $n \in \mathbf{N}^*$ S_n la somme partielle de la série $\sum_{n\geq 1} f_n$.

   Pour tout $N \in \mathbf{N}^*$ et tout $u \in]0,+\infty[$, puisque $z \neq 1$, le cours de première sur les suites géométriques affirme non sans raison que $h = \sum_{n=1}^{N} f_n + \frac{z^{N+1}\mathrm{e}^{-(N+1)u^2}}{1-z\mathrm{e}^{-u^2}}$, etc.