Majoration du rayon spectral de la matrice de Hilbert

Soit n un entier $\geqslant 1$. L'espace vectoriel $\mathbb{R}^n$ est muni de sa structure euclidienne canonique. La norme euclidienne associée est notée $\| \ \|$. On note $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices carrées d'ordre n à coefficients réels, et on identifiera $\mathbb{R}^n$ à l'ensemble $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ des matrices colonnes à coefficients réels. On note ${}^tX = (x_0 \ x_1 \cdots x_{n-1}) \in \mathscr{M}_{1,n}(\mathbb{R})$ la matrice ligne transposée de la matrice colonne

$$X = \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ \vdots \\ x_{n-1} \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R}).$$

Enfin, on note $\widetilde{X}$ la fonction polynomiale définie sur $\mathbb{R}$ par la formule

$$\widetilde{X}(t) = \sum_{k=0}^{n-1} x_k t^k.$$

L'objet du problème est l'étude de quelques propriétés de la *matrice de Hilbert* $H_n = \left(h_{j,k}^{(n)}\right)_{0 \leqslant j,k \leqslant n-1} \in \mathscr{M}_{n,n}(\mathbb{R})$ définie par

$$H_n = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \cdots & \frac{1}{n} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \cdots & \frac{1}{n+1} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ \frac{1}{n} & \frac{1}{n+1} & \cdots & \frac{1}{2n-1} \end{pmatrix}.$$

On a donc $h_{j,k}^{(n)} = \frac{1}{j+k+1}$ pour tous $j, k \in \{0, 1, \ldots, n-1\}$.

A. Une propriété de Perron-Frobenius

1) Montrer que la matrice H_n est symétrique réelle et définie positive. On pourra s'aider du calcul de l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 \left(\widetilde{X}(t)\right)^2 dt$.

On note $\mathscr{V}$ le sous-espace propre de H_n associé à la plus grande valeur propre ρ_n de H_n.

2) Montrer que $X \in \mathscr{V}$ si et seulement si ${}^tX \, H_n \, X = \rho_n \|X\|^2$.

Soit $X_0 = \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ \vdots \\ x_{n-1} \end{pmatrix}$ un vecteur non nul de $\mathscr{V}$. On note $|X_0| = \begin{pmatrix} |x_0| \\ |x_1| \\ \vdots \\ |x_{n-1}| \end{pmatrix}$.

3) Établir l'inégalité ${}^tX_0\, H_n\, X_0 \leqslant {}^t|X_0|\, H_n\, |X_0|$ et en déduire que $|X_0| \in \mathscr{V}$.

4) Montrer que $H_n|X_0|$, puis que X_0, n'a aucune coordonnée nulle.

5) En déduire la dimension du sous-espace propre $\mathscr{V}$.

B. Inégalité de Hilbert

Soit $X = \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ \vdots \\ x_{n-1} \end{pmatrix}$ un vecteur de $\mathbb{R}^n$ et P un polynôme à coefficients réels.

6) En s'aidant du calcul de l'intégrale $\displaystyle\int_0^\pi P(e^{i\theta})e^{i\theta}\,\mathrm{d}\theta$, montrer l'inégalité $\displaystyle\left|\int_{-1}^1 P(t)\,\mathrm{d}t\right| \leqslant \int_0^\pi \left|P(e^{i\theta})\right|\mathrm{d}\theta$, puis l'inégalité ${}^tXH_nX \leqslant \displaystyle\int_0^\pi \left|\widetilde{X}(e^{i\theta})\right|^2\mathrm{d}\theta$.

7) En déduire que ${}^tXH_nX \leqslant \pi\|X\|^2$.

8) Montrer que la suite $(\rho_n)_{n\geqslant 1}$ est croissante et convergente.

C. Un opérateur intégral

Dans la suite du problème, pour tout entier $n > 0$ et tout réel x, on pose

$$K_n(x) = \sum_{k=0}^{n-1} x^k.$$

Soit E l'espace vectoriel des fonctions à valeurs réelles, continues et intégrables sur $[0,1[$ et $T_n : E \to E$ l'application définie par

$$T_n(f)(x) = \int_0^1 K_n(tx)f(t)\,\mathrm{d}t.$$

9) Montrer que T_n est un endomorphisme de E, dont 0 est valeur propre. (On rappelle que $\lambda \in \mathbb{C}$ est valeur propre de T_n s'il existe $f \in E$ non nulle telle que $T_n(f) = \lambda f$.)

10) Pour tout $X \in \mathbb{R}^n$, calculer $T_n(\widetilde{X})$. En déduire que T_n et H_n ont les mêmes valeurs propres non nulles.

On note $\mathscr{A}$ l'ensemble des fonctions $\varphi \in E$ à valeurs strictement positives sur $]0,1[$ telles que $\frac{1}{\varphi}$ admette un prolongement continu sur $[0,1]$. On rappelle que ρ_n est la plus grande valeur propre de H_n.

11) En utilisant un vecteur propre associé à ρ_n, montrer que

$$\rho_n \leqslant \inf_{\varphi \in \mathscr{A}} \sup_{x \in]0,1[} \frac{1}{\varphi(x)} \int_0^1 K_n(tx)\varphi(t)\,\mathrm{d}t$$

En utilisant la partie A, montrer que l'on a égalité dans l'inégalité précédente.

D. Une majoration explicite des rayons spectraux

Soit $\varphi \in \mathscr{A}$ et $n \in \mathbb{N}$. Dans la suite du problème, on pose, pour tout $x \in]0,1[$:

$$\begin{aligned}
r_n(x) &= \frac{1}{\varphi(x)} \int_0^1 K_n(tx)\varphi(t)\,\mathrm{d}t,\\
J_n(x) &= \int_0^1 \frac{t^n \varphi(t)}{1-tx}\,\mathrm{d}t,\\
\Phi_n(x) &= \frac{x^n J_n(x)}{\varphi(x)}.
\end{aligned}$$

La fonction Gamma d'Euler est définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par la formule

$$\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} t^{x-1} e^{-t}\,\mathrm{d}t.$$

On admet, et on pourra utiliser sans démonstration, les formules suivantes :

$$\begin{aligned}
\Gamma(x+1) &= x\,\Gamma(x) && \text{pour tout } x > 0.\\
\Gamma(n) &= (n-1)! && \text{pour tout entier } n > 0.\\
\frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)} &= \int_0^1 t^{\alpha-1}(1-t)^{\beta-1}\,\mathrm{d}t && \text{pour tous réels } \alpha > 0, \beta > 0.
\end{aligned}$$

12) Montrer que J_n est dérivable sur $]0,1[$ et que l'on a l'égalité

$$xJ_n'(x) = \int_0^1 \frac{t^n \varphi(t)}{(1-tx)^2}\,\mathrm{d}t - J_n(x).$$

On suppose dorénavant que $\varphi \in \mathscr{A}$ est de classe C^1 sur $[0,1[$ et que $(1-t)\varphi(t) \to 0$ lorsque $t \to 1^-$.

13) Montrer que

$$nJ_n(x) = c + nJ_{n-1}(x) + (x-1)\int_0^1 \frac{t^n\varphi(t)}{(1-tx)^2}\,\mathrm{d}t + \int_0^1 \frac{t^n(1-t)\varphi'(t)}{1-tx}\,\mathrm{d}t$$

où c est un coefficient à déterminer et où φ' désigne la dérivée de φ. (On pourra traiter à part le cas $n=0$, où l'on considère que $nJ_{n-1}(x)=0$ et où l'on montrera que $c=\varphi(0)$.)

14) Déduire des deux questions précédentes que

$$x(1-x)J_n'(x) = c+(n+1)(x-1)J_n(x)+n\int_0^1 t^{n-1}\varphi(t)\,\mathrm{d}t+\int_0^1 \frac{t^n(1-t)\varphi'(t)}{1-tx}\,\mathrm{d}t.$$

15) Soit $\gamma\in\mathbb{R}$. Résoudre l'équation différentielle $(1-t)y'=-\gamma y$ sur l'intervalle $[0,1[$. À quelles conditions une solution $y(t)$ de cette équation différentielle vérifie-t-elle les hypothèses faites sur φ ?

On suppose désormais ces conditions réalisées et que la fonction φ est la solution de cette équation différentielle telle que $\varphi(0)=1$.

16) Montrer que la fonction Φ_n est dérivable sur $]0,1[$ et que l'on a :

$$\Phi_n'(x) = -(\gamma+1)\frac{\Phi_n(x)}{x} + c_n\frac{x^{n-1}}{(1-x)^{1+\gamma}}$$

où l'on donnera l'expression de la constante c_n en fonction de n et de γ.

17) En déduire que pour tout $x\in\,]0,1[$,

$$\Phi_n(x) = \frac{c_n}{x^{1+\gamma}}\int_0^x \frac{t^{n+\gamma}}{(1-t)^{1+\gamma}}\,\mathrm{d}t.$$

18) En déduire que pour $n\geqslant 1$,

$$\rho_n \leqslant \inf_{\alpha\in\,]0,1[}\ \sup_{x\in\,]0,1[}\ \frac{1}{x^{1-\alpha}}\int_0^x \frac{1-\theta_n t^n}{t^\alpha(1-t)^{1-\alpha}}\,\mathrm{d}t$$

où l'on a posé $\theta_n = \dfrac{n!}{(1-\alpha)(2-\alpha)\dots(n-\alpha)}$.

Un calcul montre, et on l'admet, que l'inégalité précédente implique l'inégalité :

$$\rho_n \leqslant \inf_{\alpha\in\,]0,1[}\ \theta_n^{(1-\alpha)/n}\int_0^{\theta_n^{-1/n}} \frac{\mathrm{d}t}{t^\alpha(1-t)^{1-\alpha}}.$$

19) En déduire que $\rho_n\leqslant 2\omega_n\arcsin\left(\dfrac{1}{\omega_n}\right)$, où l'on a posé $\omega_n = 2\left(\dfrac{(n!)^2}{(2n)!}\right)^{1/2n}$.

20) Donner un équivalent de ω_n-1, puis un équivalent de $\pi-2\omega_n\arcsin\frac{1}{\omega_n}$ lorsque $n\to+\infty$.

FIN DU PROBLÈME