

DS n°4

Il sera, dans la notation, tenu compte de la présentation et de la qualité de la rédaction. Les résultats devront obligatoirement être encadrés *à la règle*, le texte et les *formules* ponctuées, un minimum de 80% des *s* du pluriel et de 70% des accents est requis.

Pénalités (jusqu'à 15% de la note) pour :

- manque de soin ou de lisibilité ;
- formules mathématiques non ponctuées ;
- recours à des abréviations autres que ssi (tt., qqs., fct., ens...), ou symboles logiques mélangés à du texte.

L'usage de la calculatrice est interdite.

SUJET TYPE MINES-CENTRALE

EXERCICE

1. On considère la fonction

$$g : \begin{cases} \mathbf{R} & \longrightarrow \mathbf{R} \\ t & \longmapsto \begin{cases} \frac{\sin t}{t} & \text{si } t \neq 0, \\ 1 & \text{si } t = 0. \end{cases} \end{cases}$$

Montrer que la fonction g est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbf{R}$.

2. (a) Prouver la convergence de l'intégrale impropre $\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t} dt$.

On **admet** l'égalité : $\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t} dt = \frac{\pi}{2}$.

- (b) Déterminer, pour $j \in \mathbf{N}^*$, la valeur de l'intégrale $\int_0^{+\infty} \frac{\sin(jt)}{t} dt$.

3. Donner le développement limité à l'ordre 4 de la fonction $t \mapsto \ln g(t)$.

4. On rappelle que $\int_0^{+\infty} e^{-\frac{u^2}{2}} dt = \sqrt{\frac{\pi}{2}}$.

Donner un équivalent, lorsque n tend vers $+\infty$, de $\int_0^{\frac{\ln n}{\sqrt{n}}} e^{-\frac{nt^2}{6}} dt$.

5. Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 2.

- (a) Vérifier que l'intégrale impropre $\int_0^{+\infty} \frac{\sin^n t}{t^n} dt$ est convergente.

- (b) Quelle est la valeur de $I_p = \int_0^{+\infty} \frac{\sin^2 t}{t^2} dt$?

6. La suite $(I_p)_{p \in \mathbf{N}}$ admet-elle une limite où pour tout entier naturel p non nul, $\int_0^{+\infty} \frac{\sin^{2p} t}{t^{2p}} dt$.

PROBLÈME

Avertissement : dans ce problème, apparaissent de nombreuses intégrales impropres. On prendra soin de justifier systématiquement leur convergence même lorsque ce n'est pas explicitement demandé.

I. Préliminaires.

1. Montrer les inégalités suivantes :

$$\forall t \in]-1, +\infty[, \ln(1+t) \leq t \quad (1).$$

$$\forall t \in]0, +\infty[, t \ln(t) \geq -\frac{1}{e} \quad (2).$$

2. Soit ψ une bijection de l'intervalle ouvert I sur l'intervalle ouvert J . Si ψ est de classe C^1 sur I , donner une condition nécessaire et suffisante pour que ψ soit un C^1 -difféomorphisme de I sur J . Dans ce cas, rappeler l'expression de la dérivée de ψ^{-1} .

II. Construction d'une application particulière.

On note H l'ensemble des fonctions f strictement positives, continues sur $\mathbf{R}$, pour lesquelles il existe $\rho > 0$ (dépendant de f) tel que, pour tout réel x :

$$0 < f(x) \leq \frac{1}{\rho} \exp \left(\left(\frac{1}{2} - \rho \right) x^2 \right) \quad (A).$$

On note H_0 , le sous-ensemble de H des fonctions f telles que :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(u) e^{-u^2/2} du = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-u^2/2} du = \sqrt{2\pi}.$$

Dans tout le reste de l'énoncé, f est un élément de H_0

3. Soit F_f définie par

$$F_f(x) = \int_{-\infty}^x f(u) e^{-u^2/2} du.$$

En particulier,

$$F_1(x) = \int_{-\infty}^x e^{-u^2/2} du.$$

Montrer que F_f est un C^1 difféomorphisme de $\mathbf{R}$ sur $]0, \sqrt{2\pi}[$.

4. Montrer qu'il existe une unique fonction φ de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$ telle que, pour tout réel x , on ait

$$\int_{-\infty}^{\varphi(x)} f(u) e^{-u^2/2} du = \int_{-\infty}^x e^{-u^2/2} du$$

5. Montrer que φ est monotone et que φ est un C^1 difféomorphisme de $\mathbf{R}$ sur $\mathbf{R}$.
6. Pour tout réel x , calculer

$$\ln(\varphi'(x)) + \ln(f(\varphi(x))) - \frac{1}{2}\varphi(x)^2.$$

et

$$\ln((\varphi^{-1})'(x)) + \ln(f(x)) - \frac{1}{2}\varphi^{-1}(x)^2.$$

7. Soit h une fonction continue par morceaux de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$ telle que la fonction $u \mapsto h(u)f(u)e^{-u^2/2}$ soit intégrable sur $\mathbf{R}$.

Montrer l'identité suivante :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} h(u)f(u)e^{-u^2/2} du = \int_{-\infty}^{+\infty} h(\varphi(u))e^{-u^2/2} du.$$

8. Montrer qu'il existe un réel $A > 0$ tel que pour tout réel $x \geq A$, on ait :

$$\int_x^{x+1} \varphi^2(u) e^{-u^2/2} du \geq \varphi^2(x) e^{-(x+1)^2/2}.$$

9. Montrer qu'il existe un réel $B > 0$ tel que pour tout réel $|u| \geq B$, on ait :

$$|\varphi(u)| \leq e^{(|u|+1)^2/4}$$

10. Déterminer une primitive de la fonction

$$u \mapsto (u\varphi(u) - u^2 - \varphi'(u) + 1)e^{-u^2/2}$$

11. Calculer l'intégrale suivante :

$$I = \int_{-\infty}^{+\infty} (u\varphi(u) - u^2 - \varphi'(u) + 1)e^{-u^2/2} du.$$

III. Une inégalité intéressante.

On introduit les notations suivantes :

$$E(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(u) \ln(f(u)) e^{-u^2/2} du.$$

$$\Phi(f) = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} |u - \varphi(u)|^2 e^{-u^2/2} du.$$

12. Justifier la convergence de ces deux intégrales.

13. Montrer l'identité :

$$E(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} \ln(f(\varphi(u))) e^{-u^2/2} du$$

14. Montrer l'égalité suivante :

$$E(f) - \Phi(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} (\varphi'(u) - 1 - \ln(\varphi'(u))) e^{-u^2/2} du.$$

3

15. Quelle est la relation d'ordre entre $\Phi(f)$ et $E(f)$?

16. Déterminer les fonctions telles que $E(f) = \Phi(f)$.

FIN du PROBLEME