

I. Préliminaires

1. La fonction $t \mapsto \ln(1+t)$ est concave sur son intervalle de définition $] -1, +\infty[$ (la dérivée seconde est négative), donc la courbe représentative est située au-dessus de la tangente au point d'abscisse 0, ce qui fournit l'inégalité

$$\forall t \in] -1, +\infty[\quad \ln(1+t) \leq t .$$

La fonction $g : t \mapsto t \ln t$, définie sur $\mathbb{R}_+^*$, vérifie $g'(t) = 1 + \ln t$. On a donc g décroissante sur $]0, e^{-1}]$, croissante sur $[e^{-1}, +\infty[$ et $g(t)$ est minimal pour $t = e^{-1}$, ce qui donne l'inégalité

$$\forall t \in]0, +\infty[\quad t \ln t \geq g(e^{-1}) = -\frac{1}{e} .$$

2. D'après le cours, ψ est un $\mathcal{C}^1$ -difféomorphisme de I sur J si et seulement si $\forall x \in I \quad \psi'(x) \neq 0$. Dans ce cas, on a, sur J , $(\psi^{-1})' = \frac{1}{\psi' \circ \psi^{-1}}$, autrement dit, si $y \in J$, on a $(\psi^{-1})'(y) = \frac{1}{\psi'(x)}$ en posant $x = \psi^{-1}(y) \in I$, c'est-à-dire $y = \psi(x)$.

II. Construction d'une application particulière

3. • Si $f \in H$, alors pour un certain $\rho > 0$, on a une majoration de la forme

$$\forall u \in \mathbb{R} \quad \left| f(u) e^{-\frac{u^2}{2}} \right| = f(u) e^{-\frac{u^2}{2}} \leq \frac{1}{\rho} e^{-\rho u^2} ,$$

cette fonction majorante étant intégrable sur $\mathbb{R}$ (en effet, $\lim_{u \rightarrow \pm\infty} u^2 e^{-\rho u^2} = \lim_{v \rightarrow +\infty} v e^{-\rho v} = 0$ par croissances comparées, donc $e^{-\rho u^2}$ est négligeable devant $\frac{1}{u^2}$ au voisinage de $-\infty$ et de $+\infty$). Comme $f \in H_0$, la fonction $u \mapsto f(u) e^{-\frac{u^2}{2}}$ est donc intégrable sur $\mathbb{R}$ et *a fortiori* sur $] -\infty, x]$ pour tout x réel, ce qui justifie l'existence de $F_f(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

- La fonction F_f est une primitive de la fonction *continue* $u \mapsto f(u) e^{-\frac{u^2}{2}}$, donc F_f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et

$$\forall u \in \mathbb{R}, \quad (F_f)'(u) = f(u) e^{-\frac{u^2}{2}} \neq 0 .$$

Donc F_f réalise un $\mathcal{C}^1$ -difféomorphisme de $\mathbb{R}$ sur $F_f(\mathbb{R})$. De plus on a $\lim_{-\infty} F_f = 0$ (reste d'une intégrale) et $\lim_{+\infty} F_f = \sqrt{2\pi}$ car $f \in H_0$, donc

$$F_f(\mathbb{R}) =] \lim_{-\infty} F_f, \lim_{+\infty} F_f[=]0, \sqrt{2\pi}[$$

Conclusions : F_f est un $\mathcal{C}^1$ -difféomorphisme (croissant) de $\mathbb{R}$ sur $]0, \sqrt{2\pi}[$.

4. Il existe une et une seule fonction $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ telle que

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad F_f(\varphi(x)) = F_1(x) .$$

c'est :

$$\varphi = (F_f)^{-1} \circ F_1 .$$

5. L'application φ est la composée de deux $\mathcal{C}^1$ -difféomorphismes (F_1 de $\mathbb{R}$ sur $]0, \sqrt{2\pi}[$, puis $(F_f)^{-1}$ de $]0, \sqrt{2\pi}[$ sur $\mathbb{R}$), donc c'est un $\mathcal{C}^1$ -difféomorphisme de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$; il est strictement croissant comme composée de deux applications strictement croissantes.

6. On a $\varphi'(x) > 0$ pour tout x réel, d'où l'existence de $\ln(\varphi'(x))$. Dérivons la relation $\varphi = (F_f)^{-1} \circ F_1$, cela donne

$$\varphi' = (F_1)' \cdot \left(((F_f)^{-1})' \circ F_1 \right) = \frac{(F_1)'}{(F_f)' \circ (F_f)^{-1} \circ F_1} = \frac{(F_1)'}{(F_f)' \circ \varphi} ,$$

autrement dit, pour tout x réel, on a la relation

$$\varphi'(x) = \frac{F_1'(x)}{F_f'(\varphi(x))} = \frac{e^{-\frac{x^2}{2}}}{f(\varphi(x)) e^{-\frac{\varphi(x)^2}{2}}}.$$

En prenant le logarithme, on obtient

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad \ln(\varphi'(x)) + \ln(f(\varphi(x))) - \frac{1}{2} \varphi(x)^2 = -\frac{x^2}{2}.$$

De même, $(\varphi^{-1})'(x) > 0$ et, de $\varphi^{-1} = (F_1)^{-1} \circ F_f$, on tire

$$(\varphi^{-1})' = \frac{(F_f)'}{(F_1)' \circ \varphi^{-1}}, \quad \text{soit} \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad (\varphi^{-1})'(x) = \frac{f(x) e^{-\frac{x^2}{2}}}{e^{-\frac{\varphi^{-1}(x)^2}{2}}},$$

puis

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \ln((\varphi^{-1})'(x)) - \ln(f(x)) - \frac{1}{2} (\varphi^{-1}(x))^2 = -\frac{x^2}{2}.$$

- 7.** La fonction $g : u \mapsto h(u) f(u) e^{-\frac{u^2}{2}}$ est continue par morceaux et intégrable sur $\mathbb{R}$, l'application φ est un $\mathcal{C}^1$ -difféomorphisme de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$; il résulte donc d'un théorème du programme que l'application $(g \circ \varphi) \varphi'$ est intégrable sur $\mathbb{R}$ avec $\int_{\mathbb{R}} g = \int_{\mathbb{R}} (g \circ \varphi) \varphi'$, c'est-à-dire

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} h(u) f(u) e^{-\frac{u^2}{2}} du &= \int_{-\infty}^{+\infty} h(\varphi(v)) f(\varphi(v)) e^{-\frac{\varphi(v)^2}{2}} \varphi'(v) dv \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} h(\varphi(v)) e^{-\frac{v^2}{2}} dv, \end{aligned}$$

d'après les calculs de la question précédente.

- 8.** Prenons $A = \max\{1, \varphi^{-1}(0)\}$. On a alors $A > 0$ et, pour $x \geq A$, la fonction φ est croissante et positive sur $[x, x+1]$ donc il en est de même de φ^2 , la fonction $u \mapsto e^{-\frac{u^2}{2}}$ est décroissante et positive sur $[x, x+1]$; ainsi, pour $u \in [x, x+1]$, on a $\varphi^2(u) \geq \varphi^2(x) \geq 0$ et $e^{-\frac{u^2}{2}} \geq e^{-\frac{(x+1)^2}{2}} \geq 0$ donc, en multipliant membre à membre ces inégalités, on a

$$\forall u \in [x, x+1] \quad \varphi^2(u) e^{-\frac{u^2}{2}} \geq \varphi^2(x) e^{-\frac{(x+1)^2}{2}}.$$

Enfin, en intégrant par rapport à u sur le segment $[x, x+1]$, on obtient l'inégalité demandée.

- 9. •** Soit la fonction $h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $x \mapsto x^2$. La fonction $g : u \mapsto h(u) f(u) e^{-\frac{u^2}{2}}$ est intégrable sur $\mathbb{R}$ car

$$\forall u \in \mathbb{R}, 0 \leq h(u) f(u) e^{-\frac{u^2}{2}} = u^2 f(u) e^{-\frac{u^2}{2}} \leq \frac{1}{\rho} u^2 e^{-\rho u^2},$$

cette fonction majorante étant intégrable sur $\mathbb{R}$ par des considérations de croissances comparées habituelles. De la question **7.**, on déduit alors que la fonction $u \mapsto \varphi(u)^2 e^{-\frac{u^2}{2}}$ est

intégrable sur $\mathbb{R}$, ce qui entraîne notamment que $\lim_{x \rightarrow +\infty} \int_x^{x+1} \varphi^2(u) e^{-\frac{u^2}{2}} du = 0$. Il existe donc un réel positif C tel que pour tout $x \in [C, +\infty[$,

$$\int_x^{x+1} \varphi^2(u) e^{-\frac{u^2}{2}} du \leq 1.$$

Pour $x \geq \max\{A, C\}$, on a alors, par la question 8., $\varphi^2(x) e^{-\frac{(x+1)^2}{2}} \leq 1$, donc $|\varphi(x)| \leq e^{\frac{(x+1)^2}{4}} = e^{\frac{(|x|+1)^2}{4}}$.

- Pour achever de répondre à la question, il faut reprendre une démarche analogue lorsque x tend vers $-\infty$. Commençons par dire que $\lim_{x \rightarrow -\infty} \int_{x-1}^x \varphi^2(u) e^{-\frac{u^2}{2}} du = 0$ donc il existe un réel négatif C' tel que pour tout $x \in]-\infty, C']$,

$$0 \leq \int_{x-1}^x \varphi^2(u) e^{-\frac{u^2}{2}} du \leq 1.$$

Par ailleurs, en prenant $A' = \min\{0, \varphi^{-1}(0)\}$, si $x \leq A'$, alors, pour tout $u \in [x-1, x]$, on a $\varphi(u) \leq \varphi(x) \leq 0$ d'où $0 \leq \varphi^2(x) \leq \varphi^2(u)$, et $0 \leq x^2 \leq u^2 \leq (x-1)^2 = (|x|+1)^2$, donc $0 \leq e^{-\frac{(|x|+1)^2}{2}} \leq e^{-\frac{u^2}{2}}$ puis, par multiplication d'inégalités à membres positifs, $\varphi^2(u) e^{-\frac{u^2}{2}} \geq \varphi^2(x) e^{-\frac{(|x|+1)^2}{2}}$; en intégrant enfin cette inégalité par rapport à u sur $[x-1, x]$, on obtient, pour tout $x \in]-\infty, A']$

$$\int_{x-1}^x \varphi^2(u) e^{-\frac{u^2}{2}} du \geq \varphi^2(x) e^{-\frac{(|x|+1)^2}{2}}.$$

Pour $x \leq \min\{A', C'\}$, on a alors $\varphi^2(x) e^{-\frac{(|x|+1)^2}{2}} \leq 1$, c'est-à-dire $|\varphi(x)| \leq e^{\frac{(|x|+1)^2}{4}}$.

- Il ne reste plus qu'à choisir $B = \max\{A, C, |A'|, |C'|\}$ pour en finir avec cette question assez technique. On a maintenant pour tout réel u tel que $|u| \geq B$

$$|\varphi(u)| \leq e^{\frac{(|u|+1)^2}{4}}.$$

10. Remarquons que, si g est une fonction dérivable, alors la dérivée de $u g(u) e^{-\frac{u^2}{2}}$ vaut :

$$(g'(u) - u g(u)) e^{-\frac{u^2}{2}}.$$

On cherche alors g telle que $g'(u) - u g(u) = u \varphi(u) - u^2 - \varphi'(u) + 1$ et on trouve, sans trop de peine que $g(u) = u - \varphi(u)$ convient. En conclusion,

$$\int_a^u (v \varphi(v) - v^2 - \varphi'(v) + 1) e^{-\frac{v^2}{2}} dv = (u - \varphi(u)) e^{-\frac{u^2}{2}} + C.$$

11. Si a et b sont deux réels, on a donc

$$\int_a^b (u \varphi(u) - u^2 - \varphi'(u) + 1) e^{-\frac{u^2}{2}} du = (b - \varphi(b)) e^{-\frac{b^2}{2}} - (a - \varphi(a)) e^{-\frac{a^2}{2}}.$$

Or, la fonction $u \mapsto (u - \varphi(u))e^{-\frac{u^2}{2}}$ tend vers zéro en $-\infty$ et $+\infty$: en effet, $\lim_{u \rightarrow \pm\infty} ue^{-\frac{u^2}{2}} = 0$ et, pour $|u|$ assez grand, on a

$$0 \leq |\varphi(u) e^{-\frac{u^2}{2}}| \leq \exp\left(\frac{(|u|+1)^2}{4} - \frac{u^2}{2}\right) = \exp\left(-\frac{u^2 - 2|u| - 1}{4}\right) \xrightarrow{u \rightarrow \pm\infty} 0.$$

L'intégrale I est donc convergente et

$$I = \lim_{b \rightarrow +\infty} (b - \varphi(b)) e^{-\frac{b^2}{2}} - \lim_{a \rightarrow -\infty} (a - \varphi(a)) e^{-\frac{a^2}{2}} = 0 ;.$$

Remarque. Ce raisonnement prouve seulement la convergence de l'intégrale (doublement) impropre I , et non pas l'intégrabilité de la fonction considérée (l'intégrande) comme il est demandé dans le préambule...

III. Une inégalité intéressante

12. • En utilisant l'inégalité (2) du "préliminaire" et le fait que $f \in H$, on obtient

$$-\frac{1}{e} e^{-\frac{u^2}{2}} \leq f(u) \ln(f(u)) e^{-\frac{u^2}{2}} \leq \frac{1}{\rho} e^{-\rho u^2} \left(-\ln \rho + \left(\frac{1}{2} - \rho\right) u^2 \right).$$

La fonction $u \mapsto f(u) \ln(f(u)) e^{-\frac{u^2}{2}}$ est encadrée par deux fonctions intégrables sur $\mathbb{R}$, donc est intégrable sur $\mathbb{R}$. En effet, si a, b, c sont trois fonctions réelles continues par morceaux sur un intervalle J et vérifient $a \leq b \leq c$ sur J , les fonctions a et c étant intégrables sur J , on déduit les inégalités $b \leq c \leq |c|$, $-b \leq -a \leq |a|$, puis $|b| \leq \max\{|a|, |c|\} \leq |a| + |c|$ et la fonction $|a| + |c|$ est intégrable sur J , donc b aussi. On a donc la convergence (absolue) de l'intégrale $E(f)$.

• Pour la convergence de l'intégrale $\Phi(f)$, notons que

$$|u - \varphi(u)|^2 e^{-\frac{u^2}{2}} \leq (|u| + \varphi(u))^2 e^{-\frac{u^2}{2}} = u^2 e^{-\frac{u^2}{2}} + 2|u| \varphi(u) e^{-\frac{u^2}{2}} + \varphi(u)^2 e^{-\frac{u^2}{2}}$$

et chaque terme est une fonction de u intégrable sur $\mathbb{R}$ (évident pour le premier, déjà dit à la question 9. pour le troisième, et conséquence de $2|u|\varphi(u) \leq u^2 + \varphi(u)^2$ pour le deuxième).

13. En appliquant la question 7. avec $h(u) = \ln(f(u))$, on obtient

$$E(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} \ln(f(\varphi(u))) e^{-\frac{u^2}{2}} du.$$

14. Calculons :

$$\begin{aligned} E(f) - \Phi(f) &= \int_{-\infty}^{+\infty} \left[\ln(f(\varphi(u))) - \frac{1}{2} (u - \varphi(u))^2 \right] e^{-\frac{u^2}{2}} du \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\frac{1}{2} \varphi(u)^2 - \frac{u^2}{2} - \ln(\varphi'(u)) - \frac{u^2}{2} + u\varphi(u) - \frac{1}{2} \varphi(u)^2 \right) e^{-\frac{u^2}{2}} du \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \left(u\varphi(u) - u^2 - \ln(\varphi'(u)) \right) e^{-\frac{u^2}{2}} du \end{aligned}$$

en utilisant les calculs de la question 6. Par ailleurs, cela ne change de retrancher l'intégrale I de la question 11., cette dernière étant nulle. On obtient ainsi

$$\begin{aligned} E(f) - \Phi(f) &= E(f) - \Phi(f) - I \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \left(u\varphi(u) - u^2 - \ln(\varphi'(u)) - u\varphi(u) + u^2 + \varphi'(u) - 1 \right) e^{-\frac{u^2}{2}} du \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\varphi'(u) - 1 - \ln(\varphi'(u)) \right) e^{-\frac{u^2}{2}} du. \end{aligned}$$

15. De l'inégalité (1) du préambule, on déduit $E(f) \geq \Phi(f)$.

16. Une condition nécessaire et suffisante pour que $E(f)$ soit égal à $\Phi(f)$ est que l'on ait $\forall u \in \mathbb{R} \quad \varphi'(u) - 1 - \ln(\varphi'(u)) = 0$ (en effet, une fonction continue, positive, et intégrable sur $\mathbb{R}$ a une intégrale nulle si et seulement si c'est la fonction nulle). Or, la fonction $x \mapsto \ln x - x + 1$ ne s'annule que pour $x = 1$, la condition citée équivaut donc à $\varphi'(u) = 1$, soit $\varphi(u) = u + C$.

Mais, si $\varphi(x) = x + C$, alors $\varphi^{-1}(x) = x - C$ et la deuxième relation de la question 6. donne $f(x) = \exp\left(Cx - \frac{C^2}{2}\right)$. On vérifie qu'un tel choix de f conduit bien à $\varphi(x) = x + C$: en effet,

$$\int_{-\infty}^{x+C} e^{Cu - \frac{C^2}{2}} e^{-\frac{u^2}{2}} du = \int_{-\infty}^{x+C} e^{-\frac{(u-C)^2}{2}} du = \int_{-\infty}^x e^{-\frac{u^2}{2}} du.$$

Il reste enfin à vérifier que la fonction $x \mapsto \exp\left(Cx - \frac{C^2}{2}\right)$ appartient à H_0 , ce qui est un peu pénible... Allons-y toutefois : pour tout $C \in \mathbb{R}$ fixé, il faut prouver l'existence de $\rho > 0$ tel que $\forall x \in \mathbb{R} \quad g(x) \leq 1$, en posant

$$g(x) = \rho \exp\left(\rho x^2 - \frac{(x-C)^2}{2}\right) = \rho \exp\left(\left(\rho - \frac{1}{2}\right)x^2 + Cx - \frac{C^2}{2}\right).$$

($g(x)$ dépend aussi des paramètres C et ρ). On constate que $g'(x) = ((2\rho - 1)x + C)g(x)$ donc, en choisissant $\rho \in \left]0, \frac{1}{2}\right[$, la fonction g est positive et atteint son maximum en

$x = \frac{C}{1 - 2\rho}$; on calcule la valeur de ce maximum, on trouve $\max_{\mathbb{R}} g = \rho \exp\left(\frac{\rho C^2}{1 - 2\rho}\right)$.

Comme cette expression tend vers zéro lorsque ρ tend vers 0, il est bien possible de choisir $\rho \in \left]0, \frac{1}{2}\right[$ pour lequel ce maximum est inférieur à 1, la condition (A) de l'énoncé est alors vérifiée pour une telle valeur de ρ , donc $f \in H$, puis $f \in H_0$ (évident : translation de la variable dans l'intégrale comme ci-dessus).

En conclusion, les fonctions f telles que $E(f) = \Phi(f)$ sont les fonctions $x \mapsto \exp\left(Cx - \frac{C^2}{2}\right)$, pour tout C réel.