

**Q 1.** Prouvons l'inégalité par récurrence sur  $n$ .

- Le cas  $n = 1$  est clair.
- Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ . Supposons l'inégalité vérifiée au rang  $n$  pour tous réels  $x_1, \dots, x_n$ . Soit  $x_1, \dots, x_{n+1}$ ,  $n+1$  réels.

$$\begin{aligned} \left| \left( \prod_{k=1}^{n+1} (1+x_k) \right) - 1 \right| &= \left| \left( \prod_{k=1}^n (1+x_k) \right) - 1 + x_{n+1} \prod_{k=1}^n (1+x_k) \right| \\ &\leq \left| \left( \prod_{k=1}^n (1+x_k) \right) - 1 \right| + \left| x_{n+1} \prod_{k=1}^n (1+x_k) \right| \quad (\text{inégalité triangulaire}) \\ &\leq \left( \prod_{k=1}^n (1+|x_k|) \right) - 1 + |x_{n+1}| \prod_{k=1}^n (1+|x_k|) \quad (\text{hypothèse de récurrence}) \\ &\leq (1+|x_{n+1}|) \left( \prod_{k=1}^n (1+|x_k|) \right) - 1 \\ &\leq \left( \prod_{k=1}^{n+1} (1+|x_k|) \right) - 1. \end{aligned}$$

**Q 2.** Pour tout  $x \in \mathbb{R}$ ,  $1+x \leq e^x$  par convexité de  $\exp$  (courbe située au dessus de la tangente en  $(0,0)$ , (un dessin serait bienvenu) :

Par conséquent, comme  $1+x_k \geq 0$  pour  $x_k \in [-1, +\infty[$ , on peut multiplier les inégalités  $(1+x_k) \leq e^{x_k}$  de  $k=1$  à  $n$  :

$$\prod_{k=1}^n (1+x_k) \leq \prod_{k=1}^n e^{x_k} = \exp \left( \sum_{k=1}^n x_k \right).$$

**Q 3.** Soit  $t \in \mathbb{C}$ , par développement en série entière de l'exponentielle puis inégalité triangulaire puis  $k! \geq (k-2)!$  :

$$|(1+t) - e^t| = \left| - \sum_{k=2}^{+\infty} \frac{t^k}{k!} \right| \leq \sum_{k=2}^{+\infty} \frac{|t|^k}{k!} \leq |t|^2 \sum_{k=2}^{+\infty} \frac{|t|^{k-2}}{(k-2)!} = |t|^2 e^{|t|}.$$

**Q 4.** On a par l'inégalité triangulaire :

$$|a^n - b^n| = \left| (a-b) \sum_{k=0}^{n-1} a^k b^{n-1-k} \right| \leq |a-b| \sum_{k=0}^{n-1} \underbrace{|a^k|}_{\leq M^k} \underbrace{|b|^{n-1-k}}_{M^{n-1-k}} \leq nM^{n-1}|a-b|.$$

**Q 5.** Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ , on pose  $M = \max \left\{ \left| 1 + \frac{z}{n} \right|, \left| e^{\frac{z}{n}} \right| \right\}$ . D'après les questions précédentes :

$$\left| \left( 1 + \frac{z}{n} \right)^n - e^z \right| = \left| \left( 1 + \frac{z}{n} \right)^n - \left( e^{\frac{z}{n}} \right)^n \right| \leq nM^{n-1} \left| 1 + \frac{z}{n} - e^{\frac{z}{n}} \right| \leq nM^{n-1} \left| \frac{z}{n} \right|^2 e^{\frac{|z|}{n}}$$

De plus, on a  $\left| 1 + \frac{z}{n} \right| \leq 1 + \frac{|z|}{n} \leq e^{\frac{|z|}{n}}$  et  $\left| e^{\frac{z}{n}} \right| = e^{\frac{\operatorname{Re}(z)}{n}} \leq e^{\frac{|z|}{n}}$  donc

$$M \leq e^{\frac{|z|}{n}}$$

et par conséquent,

$$\left| \left( 1 + \frac{z}{n} \right)^n - e^z \right| \leq nM^{n-1} \left| \frac{z}{n} \right|^2 e^{\frac{|z|}{n}} \leq \frac{|z|^2}{n} e^{\frac{(n-1)|z|}{n}} e^{\frac{|z|}{n}} = \frac{|z|^2}{n} e^{|z|}$$

**Q 6.** On a :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, 0 \leq |u_n - e^z| \leq \frac{|z|^2}{n} e^{|z|} \quad \text{et} \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{|z|^2}{n} e^{|z|} = 0,$$

donc par le théorème d'encadrement,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} |u_n - e^z| = 0 \quad \text{c'est-à-dire} \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = e^z.$$

**Q 7.** Pour  $N \geq 2$ ,

$$\prod_{n=2}^N \left( 1 - \frac{1}{n^2} \right) = \prod_{n=2}^N \left( \frac{(n-1)(n+1)}{n^2} \right) = \frac{\prod_{n=2}^N (n-1) \prod_{n=2}^N (n+1)}{\prod_{n=2}^N n \prod_{n=2}^N n} = \frac{1}{N} \frac{N+1}{2}.$$

Donc

$$\lim_{N \rightarrow +\infty} \prod_{n=2}^N \left(1 - \frac{1}{n^2}\right) = \lim_{N \rightarrow +\infty} \frac{N+1}{2N} = \frac{1}{2} \quad \text{d'où} \quad \prod_{n=2}^{+\infty} \left(1 - \frac{1}{n^2}\right) = \frac{1}{2}$$

Et pour  $N \geq 2$ , en séparant le produit pour  $n = 2k$  (alors  $n + (-1)^{n+1} = 2k - 1$ ) et  $n = 2k - 1$  (alors  $n + (-1)^{n+1} = 2k$ ) :

$$\prod_{n=2}^{2N} \left(1 + \frac{(-1)^{n+1}}{n}\right) = \frac{1}{(2N)!} \prod_{n=2}^{2N} (n + (-1)^{n+1}) = \frac{1}{(2N)!} \prod_{k=1}^N (2k - 1) \prod_{k=2}^N (2k) = \frac{1}{2}$$

Donc

$$\prod_{n=2}^{+\infty} \left(1 + \frac{(-1)^{n+1}}{n}\right) = \frac{1}{2}.$$

**Q 8.** Question traitée en TD., on obtient  $(n+2)W_{n+2} = (n+1)W_n$  par une intégration par parties. L'expression de  $W_{2n+1}$  s'obtient alors par récurrence.

**Q 9.** On utilise la formule de Stirling :

$$n! \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \sqrt{2\pi n} \left(\frac{n}{e}\right)^n \quad \text{et} \quad (2n)! \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \sqrt{2\pi(2n)} \left(\frac{2n}{e}\right)^{2n},$$

d'où

$$W_{2n+1} = \frac{2^{2n}}{(2n+1)} \frac{(n!)^2}{(2n)!} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{2^{2n}}{(2n)} \frac{2\pi n (n/e)^{2n}}{2\sqrt{\pi n} (2n/e)^{2n}} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{n}},$$

puis, pour  $n \geq 1$ ,

$$\prod_{k=1}^n \left(1 + \frac{1}{4k^2 - 1}\right) = \prod_{k=1}^n \frac{4k^2}{(2k-1)(2k+1)} = 4^n (n!)^2 \frac{\prod_{k=1}^n (2k)(2k)}{(2n)!(2n+1)!} = (2n+1)W_{2n+1}^2 \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{\pi}{2}.$$

Donc

$$\prod_{n=1}^{+\infty} \left(1 + \frac{1}{4n^2 - 1}\right) = \frac{\pi}{2}$$

**Q 10.** Pour tout  $N \geq n$ , d'après Q2 ( $-\mathbb{P}(A_p) \geq -1$ ) :

$$0 \leq \prod_{p=n}^N (1 - \mathbb{P}(A_p)) \leq \exp\left(\sum_{p=n}^N -\mathbb{P}(A_p)\right).$$

Or la série  $\sum \mathbb{P}(A_p)$  étant divergente et à termes positifs, on en déduit  $\lim_{N \rightarrow +\infty} \sum_{n=p}^N \mathbb{P}(A_p) = +\infty$ , et donc

$$\lim_{N \rightarrow +\infty} \exp\left(\sum_{p=n}^N -\mathbb{P}(A_p)\right) = 0.$$

On conclut avec le théorème d'encadrement que  $\prod_{p=n}^{+\infty} (1 - \mathbb{P}(A_p)) = 0$ .

**Q 11.** La suite  $(B_n)_{n \in \mathbb{N}}$  définie par  $B_n = \bigcup_{p \geq n} A_p$  est décroissante pour l'inclusion donc par continuité décroissante,

$$\mathbb{P}\left(\bigcap_{n \in \mathbb{N}} \bigcup_{p \geq n} A_p\right) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{P}\left(\bigcup_{p \geq n} A_p\right)$$

Or pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{p \geq n} A_p\right) = 1 - \mathbb{P}\left(\bigcap_{p \geq n} \overline{A_p}\right)$$

et par continuité décroissante appliquée à la suite  $(C_q)_{q \geq n}$  où  $C_q = \bigcap_{p=n}^q \overline{A_p}$ , décroissante pour l'inclusion :

$$\mathbb{P}\left(\bigcap_{p \geq n} \overline{A_p}\right) = \lim_{q \rightarrow +\infty} \mathbb{P}\left(\bigcap_{p=n}^q \overline{A_p}\right) \underset{\text{indep.}}{=} \lim_{q \rightarrow +\infty} \prod_{p=n}^q \mathbb{P}(\overline{A_p}) = \prod_{p=n}^{+\infty} (1 - \mathbb{P}(A_p)) \underset{\text{Q10}}{=} 0.$$

D'où :

$$\mathbb{P} \left( \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \bigcup_{p \geq n} A_p \right) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{P} \left( \bigcup_{p \geq n} A_p \right) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left( 1 - \mathbb{P} \left( \bigcap_{p \geq n} \overline{A_p} \right) \right) = 1.$$

**Q 12.** Soit  $x \in S$  et  $n \in \mathbb{N}^*$ .

$$\begin{aligned} Q_{n+1} - Q_n &= \left( \prod_{k=1}^n (1 + |f_k(x)|) \right) (1 + |f_{n+1}(x)| - 1) \\ &\stackrel{Q2}{\leq} \exp \left( \sum_{k=1}^n |f_k(x)| \right) |f_{n+1}(x)| \\ &\leq \exp(R_0(x)) |f_{n+1}(x)| \quad \text{car } \sum_{k=1}^n |f_k(x)| \leq \sum_{k=1}^{+\infty} |f_k(x)| = R_0(x). \end{aligned}$$

Et par le théorème de continuité de la somme d'une série de fonctions, sachant que  $|f_n|$  est continue et  $\sum |f_n|$  converge uniformément sur  $S$ , on en déduit que  $R_0$  est continue sur le segment  $S$  donc  $R_0$  est bornée.

Par conséquent, il existe  $M \geq 0$  tel que pour tout  $x \in S$ ,  $R_0(x) \leq M$  d'où :

$$Q_{n+1} - Q_n \leq e^{R_0(x)} |f_{n+1}(x)| \leq e^M |f_{n+1}(x)|.$$

**Q 13.** On a

$$\begin{aligned} |P_{n+1}(x) - P_n(x)| &= |1 + f_{n+1}(x) - 1| \left| \prod_{k=1}^n (1 + f_k(x)) \right| \\ &\leq |f_{n+1}(x)| \prod_{k=1}^n (1 + |f_k(x)|) \\ &\leq (1 + |f_{n+1}(x)| - 1) Q_n(x) \\ &\leq Q_{n+1}(x) - Q_n(x). \end{aligned}$$

**Q 14.** Commençons par la convergence simple.

Soit  $x \in S$ . Pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ , La série **télescopique**  $\sum_{k \geq 1} P_{k+1}(x) - P_k(x)$  est absolument convergente (donc convergente) car  $|P_{k+1}(x) - P_k(x)| \leq e^M |f_{k+1}(x)|$  et la série  $\sum_{k \geq 1} |f_{k+1}(x)|$  est convergente car la série de fonctions  $\sum_{k \geq 1} |f_k|$  converge uniformément, donc la suite  $(P_n(x))_{n \geq 1}$  est convergente et :

$$P(x) = \prod_{k=1}^{+\infty} (1 + f_k(x)) = \lim_{n \rightarrow +\infty} P_n(x) = \sum_{k=1}^{+\infty} (P_{k+1}(x) - P_k(x)) + P_1(x).$$

Passons à la convergence uniforme

Pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ , pour tout  $x \in S$ , par télescopage :

$$\sum_{k=n}^{+\infty} (P_{k+1}(x) - P_k(x)) = \lim_{N \rightarrow +\infty} P_N(x) - P_n(x) = P(x) - P_n(x) :$$

$$|P_n(x) - P(x)| = \left| - \sum_{k=n}^{+\infty} (P_{k+1}(x) - P_k(x)) \right| \leq \sum_{k=n}^{+\infty} |P_{k+1}(x) - P_k(x)| \leq \sum_{k=n}^{+\infty} e^M |f_{k+1}(x)| = e^M R_n(x),$$

en notant  $R_n(x) = \sum_{k=n+1}^{+\infty} |f_k(x)|$ . D'où par passage à la borne supérieure :

$$\|P_n - P\|_{\infty} \leq e^M \|R_n\|_{\infty}.$$

Or  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \|R_n\|_{+\infty} = 0$  car la série  $\sum |f_n|$  converge uniformément d'où

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \|P_n - P\|_{\infty} = 0.$$

Donc la suite  $(P_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  converge uniformément vers  $P$  sur  $S$ .

**Q 15.** Pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ ,  $P_n$  est continue sur  $S$  par produit (fini) de fonctions continues ( $f_k$  continue) et la suite de fonctions  $(P_n)_{n \geq 1}$  converge uniformément sur  $S$  donc par le théorème de continuité de la limite d'une suite de fonctions. De plus pour tout  $x \in S$  fixé,

$$\ln(P_n(x)) = \sum_{k=1}^n \ln(1 + f_k(x))$$

et la série  $\sum_{k \geq 1} \ln(1 + f_k(x))$  est convergente absolument, en effet  $\lim_{k \rightarrow +\infty} f_k(x) = 0$  par convergence de  $\sum |f_k(x)|$  et donc  $|\ln(1 + f_k(x))| \underset{k \rightarrow +\infty}{\sim} |f_k(x)|$ .

Par conséquent,  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \ln(P_n(x)) = \sum_{k=1}^{+\infty} \ln(1 + f_k(x)) = L \in \mathbb{R}$ , et donc

$$P(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} P_n(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} e^{\ln(P_n(x))} = e^L > 0$$

**Q 16.** Posons pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$  et  $x \in \mathbb{R}_+^*$ ,  $f_n(x) = -e^{-nx^2}$ . Nous allons appliquer la question précédente; pour cela, nous devons vérifier toutes les hypothèses sur la suite  $(f_n)$ .

Soit  $[a, b]$  un segment inclus dans  $\mathbb{R}_+^*$ . On a

- pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ , et  $x \in [a, b]$ ,  $f_n(x) > -1$  car  $e^{-nx^2} < 1$
- la série de fonctions  $\sum_{n \geq 1} |f_n|$  converge uniformément sur  $[a, b]$  car :  
 $|f_n(x)| = e^{-nx^2} \leq e^{-na^2}$  et la série  $\sum e^{-na^2}$  converge puisque  $e^{-na^2} = o\left(\frac{1}{n^2}\right)$ , d'où la convergence normale de la série  $\sum_{n \geq 1} |f_n|$  sur  $[a, b]$ .

Par conséquent, d'après les deux questions précédentes,  $f$  est bien définie et continue sur  $[a, b]$  et ceci pour tout segment  $[a, b]$  inclus dans  $\mathbb{R}_+^*$  donc  $f$  est continue sur  $\mathbb{R}_+^*$ .

**Q 17.** Soit  $x, y$  deux réels tels que  $0 < x \leq y$ .

Alors pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ ,  $-nx^2 \geq -ny^2$  donc  $1 - e^{-nx^2} \leq 1 - e^{-ny^2} \geq 0$ , donc en multipliant ces inégalités :

$$\prod_{n=1}^N (1 - e^{-nx^2}) \leq \prod_{n=1}^N (1 - e^{-ny^2}) \quad \text{d'où} \quad f(x) \leq f(y) \quad \text{par passage à la limite } N \rightarrow +\infty.$$

Donc  $f$  est croissante sur  $\mathbb{R}_+^*$ .

*Limite en 0.* On applique la question Q2 :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^* \quad \forall N \in \mathbb{N}^*, \quad 0 \leq \prod_{n=1}^N (1 - e^{-nx^2}) \leq \exp\left(\sum_{n=1}^N -e^{-nx^2}\right).$$

Or pour tout  $x > 0$ ,  $\sum_{n=1}^{+\infty} -e^{-nx^2} = \frac{-e^{-x^2}}{1 - e^{-x^2}}$  (série géométrique de raison  $e^{-x^2} \in [0, 1[$ ) d'où par passage à la limite quand  $N \rightarrow +\infty$  :

$$\forall x > 0 \in \mathbb{R}_+^* \quad 0 \leq f(x) \leq \exp\left(\frac{-e^{-x^2}}{1 - e^{-x^2}}\right),$$

or  $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{-e^{-x^2}}{1 - e^{-x^2}} = -\infty$  d'où  $\lim_{x \rightarrow 0^+} \exp\left(\frac{-e^{-x^2}}{1 - e^{-x^2}}\right) = 0$ , donc par théorème d'encadrement :

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 0.$$

*Limite en  $+\infty$ .* On applique la question Q1 puis Q2

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^* \quad \forall n \in \mathbb{N}^* \quad \left| \left( \prod_{k=1}^n (1 - e^{-kx^2}) \right) - 1 \right| \leq \left( \prod_{k=1}^n (1 + | -e^{-kx^2} |) \right) - 1 \leq \exp\left(\sum_{k=1}^n e^{-kx^2}\right) - 1.$$

Donc par passage à la limite quand  $n \rightarrow +\infty$ , en utilisant  $\sum_{k=1}^{+\infty} e^{-kx^2} = \frac{e^{-x^2}}{1 - e^{-x^2}}$ ,

$$\forall x > 0 \quad |f(x) - 1| \leq \exp\left(\frac{e^{-x^2}}{1 - e^{-x^2}}\right) - 1.$$

Or  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{-x^2}}{1 - e^{-x^2}} = 0$  donc  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \exp\left(\frac{e^{-x^2}}{1 - e^{-x^2}}\right) = 1$ , d'où par théorème d'encadrement :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} |f(x) - 1| = 0 \quad \text{soit} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 1.$$

**Q 18.** Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ , par dérivation du produit  $P_n(x) = \prod_{k=1}^n (1 + f_k(x))$ ,

$$\forall x \in S \quad P'(x) = \sum_{k=1}^n f'_k(x) \prod_{\substack{\ell=1 \\ \ell \neq k}}^n (1 + f_\ell(x)) = \sum_{k=1}^n f'_k(x) \frac{P_n(x)}{1 + f_k(x)} = P_n(x) \sum_{k=1}^n \frac{f'_k(x)}{1 + f_k(x)}.$$

**Q 19.** Notons pour  $x \in S$ ,  $T(x) = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{f'_k(x)}{1 + f_k(x)}$  et pour  $n \in \mathbb{N}^*$ ,  $T_n(x) = \sum_{k=1}^n \frac{f'_k(x)}{1 + f_k(x)}$ . On a :

$$\begin{aligned} \forall n \in \mathbb{N}^* \quad \forall x \in S \quad |P'_n(x) - P(x)T(x)| &= |P_n(x)T_n(x) - P(x)T(x)| \\ &= |P_n(x)(T_n(x) - T(x)) + T(x)(P_n(x) - P(x))| \\ &\leq |P_n(x)| |T_n(x) - T(x)| + |T(x)| |P_n(x) - P(x)|. \end{aligned}$$

Or la suite  $(P_n)$  converge uniformément vers  $P$  donc par la suite  $(\|P_n\|_\infty)_{n \in \mathbb{N}^*}$  est bornée; il existe  $M \geq 0$ ,  $\|P_n\|_\infty \leq M$  pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ .

De plus, comme pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ ,  $f_n$  est de classe  $\mathcal{C}^1$ ,  $\frac{f'_n}{1+f_n}$  est continue et la série  $\sum_{n \geq 1} \frac{f'_n}{1+f_n}$  converge uniformément sur  $S$ , par application du théorème de continuité de la somme d'une série de fonctions,  $T$  est continue sur le segment  $S$  donc  $T$  est bornée. Par conséquent :

$$\begin{aligned} \forall n \in \mathbb{N}^* \quad \forall x \in S \quad |P'_n(x) - P(x)T(x)| &\leq |P_n(x)| |T_n(x) - T(x)| + |T(x)| |P_n(x) - P(x)| \\ &\leq \underbrace{\|P_n\|_\infty}_{\leq M} \|T_n - T\|_\infty + \|T\|_\infty \|P_n - P\|_\infty. \end{aligned}$$

Donc par passage à la borne supérieure,

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \|P'_n - PT\|_\infty \leq M \|T_n - T\|_\infty + \|T\|_\infty \|P_n - P\|_\infty$$

Or par convergence uniforme de la série  $\sum_{n \geq 1} \frac{f'_n}{1+f_n}$ , la suite  $(T_n)$  converge uniformément vers  $T$  : on a  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \|T_n - T\|_\infty = 0$  et d'après la question Q14,  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \|P_n - P\|_\infty = 0$ .

Donc par théorème d'encadrement,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \|P'_n - PT\|_\infty = 0.$$

Donc la suite de fonctions  $(P'_n)_{n \geq 1}$  converge uniformément sur  $S$  vers  $x \mapsto P(x)T(x)$  : pour tout  $x \in S$ ,  $\lim_{n \rightarrow +\infty} P'_n(x) = P(x)T(x)$ .

On peut maintenant appliquer le théorème de dérivation de la limite d'une suite de fonctions :

- pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ ,  $P_n$  est de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $S$ ;
- la suite  $(P_n)$  converge simplement sur  $S$  vers  $P$ ;
- la suite  $(P'_n)$  converge uniformément sur  $S$  vers  $x \mapsto P(x)T(x)$ .

Par conséquent,  $P = \lim_{n \rightarrow +\infty} P_n$  est de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $S$  et pour tout  $x \in S$ ,  $P'(x) = P(x)T(x)$  or  $P(x) \neq 0$  d'après Q15, d'où :

$$\forall x \in S, \quad \frac{P'(x)}{P(x)} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{f'_n(x)}{1 + f_n(x)}.$$

**Remarque :** Je pense qu'il eût été plus rapide de voir en  $P_n$  la solution du problème de Cauchy  $y' = T_n(x)y$ ;  $Y(a) = P_n(a)$ , on a ainsi une expression simple de  $P_n$  et donc de  $P$  par passage à la limite, dont le caractère  $\mathcal{C}^1$  est presque évident.

**Q 20.** D'après la formule du binôme de Newton,

$$\begin{aligned} P_n(X) &= \frac{1}{2i} \sum_{k=0}^{2n+1} \binom{2n+1}{k} \left( \frac{i^k}{(2n+1)^k} X^k - \frac{(-i)^k}{(2n+1)^k} X^k \right) \\ &= \frac{1}{2i} \left( \frac{i^{2n+1} - (-i)^{2n+1}}{(2n+1)^{2n+1}} X^{2n+1} + R(X) \right) \quad \text{avec } R \in \mathbb{R}_{2n}[X] \\ &= \frac{(-1)^n}{(2n+1)^{2n+1}} X^{2n+1} + R(X) \end{aligned}$$

Donc  $P_n$  est un polynôme de degré  $2n + 1$ .

**Q 21.** Soit  $k \in \llbracket 0, 2n \rrbracket$ .

$$\begin{aligned} 2iP_n(x_k) &= \left(1 + \frac{ix_k}{2n+1}\right)^{2n+1} - \left(1 - \frac{ix_k}{2n+1}\right)^{2n+1} \\ &= \left(\frac{\cos\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right) + i \sin\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right)}{\cos\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right)}\right)^{2n+1} - \left(\frac{\cos\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right) - i \sin\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right)}{\cos\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right)}\right)^{2n+1} \end{aligned}$$

donc

$$\begin{aligned} 2iP_n(x_k) &= \frac{1}{\cos^{2n+1}\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right)} \left(e^{\frac{ik\pi}{2n+1}(2n+1)} - e^{\frac{-ik\pi}{2n+1}(2n+1)}\right) \\ &= \frac{1}{\cos^{2n+1}\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right)} (e^{ik\pi} - e^{-ik\pi}) = 0 \end{aligned}$$

Donc  $x_k$  est une racine de  $P_n$  pour tout  $k \in \llbracket 0, 2n \rrbracket$ .

Mais  $k \mapsto x_k$  est injective (par injectivité de la fonction tangente sur  $\left[0, \frac{\pi}{2}[\cup \right]\frac{\pi}{2}, \pi[$ ), donc l'ensemble  $\{x_k, k \in \llbracket 0, 2n \rrbracket\}$  contient  $2n+1$  racines de  $P_n$  qui est un polynôme de degré  $2n+1$ ; on a donc toutes les racines de  $P_n$ .

**Q 22.** On va regrouper les racines  $x_k$  deux à deux, en remarquant que pour  $1 \leq k \leq n$  :  
 $2n+1-k \in \llbracket n+1, 2n \rrbracket$  et :

$$x_{2n+1-k} = (2n+1) \tan\left(\frac{(2n+1)\pi - k\pi}{2n+1}\right) = (2n+1) \tan\left(\pi - \frac{k\pi}{2n+1}\right) = -(2n+1) \tan\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right) = -x_k$$

D'après la question précédente, il existe  $\mu \in \mathbb{C}$  tel que

$$\begin{aligned} P_n(X) &= \mu \prod_{k=0}^{2n} (X - x_k) = \mu(X - x_0) \prod_{k=1}^n (X - x_k) \prod_{k=n+1}^{2n} (X - x_k) \\ &= \mu X \prod_{k=1}^n (X - x_k) \prod_{k=1}^n (X - \underbrace{x_{2n+1-k}}_{=-x_k}) \quad \text{changement d'indices} \\ &= \mu X \prod_{k=1}^n (X^2 - x_k^2) \\ &= \mu \prod_{k=1}^n (-x_k^2) X \prod_{k=1}^n \frac{X^2 - x_k^2}{-x_k^2} \\ &= \underbrace{\mu(-1)^n \prod_{k=1}^n x_k^2}_{=\lambda} X \prod_{j=1}^n \left(1 - \frac{X^2}{x_j^2}\right) \end{aligned}$$

Il suffit de poser  $\lambda = \mu(-1)^n \prod_{k=1}^n x_k^2$  pour obtenir l'égalité demandée.

**Q 23.** En reprenant la définition de  $P_n$ , sachant que  $P'_n(0)$  est le coefficient en  $X$  dans  $P_n(X)$ , on a :

$$P'_n(0) = \frac{1}{2i} \begin{pmatrix} 2n+1 \\ 1 \end{pmatrix} \frac{i^1 - (-i)^1}{2n+1} = 1$$

De plus en dérivant  $P_n$  avec l'expression de la question Q22, en notant  $Q_n(X) = \prod_{j=1}^n \left(1 - \frac{X^2}{x_j^2}\right)$  :

$$P'_n(X) = \lambda (XQ'_n(X) + Q_n(X)) \quad \text{d'où} \quad P'_n(0) = \lambda Q_n(0) = \lambda$$

Donc  $\lambda = P'_n(0) = 1$  d'où le résultat.

**Q 24.** Soit  $x \in \mathbb{R}$ .

D'après la question Q6,  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{ix}{2n+1}\right)^{2n+1} = e^{ix}$  et  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 - \frac{ix}{2n+1}\right)^{2n+1} = e^{-ix}$  donc :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} P_n(x) = \frac{1}{2i} (e^{ix} - e^{-ix}) = \sin(x)$$

Donc la suite de fonctions polynomiales  $(P_n)$  converge simplement vers  $\sin$  sur  $\mathbb{R}$ .

**Q 25.** Soit  $t \in \mathbb{R}$ , et  $k$  un entier  $\geq 2$ .

Je note  $x_j(t) = (2\lfloor t \rfloor + 1) \tan\left(\frac{j\pi}{2\lfloor t \rfloor + 1}\right)$ .

• Cas 1 :  $t < k - 1$ . Alors  $v_k(t) = v_{k-1}(t) = P_{[t]}(x)$ . L'inégalité est claire.

• Cas 2 :  $k - 1 \leq t < k$ . Alors  $[t] = k - 1$  et  $x_j(t) = x_j(k - 1)$ . Donc :

$$v_k(t) = P_{[t]}(x) = P_{k-1}(x) = x \prod_{j=1}^{k-1} \left( 1 - \frac{x^2}{[x_j(k-1)]^2} \right) \quad (\text{d'après Q23})$$

et  $v_{k-1}(t) = x \prod_{j=1}^{k-1} \left( 1 - \frac{x^2}{x_j(t)^2} \right) = v_k(t)$ . L'inégalité demandée est alors évidente.

• Cas 3 :  $t \geq k$ . Alors  $v_k(t) = v_{k-1}(t) \left( 1 - \frac{x^2}{x_k(t)^2} \right) = x \prod_{j=1}^k \left( 1 - \frac{x^2}{x_j(t)^2} \right)$ .

$$|v_k(t) - v_{k-1}(t)| = |v_{k-1}(t)| \left| \left( 1 - \frac{x^2}{x_k(t)^2} \right) - 1 \right| = |v_{k-1}(t)| \frac{x^2}{x_k(t)^2}$$

Or pour tout  $u \in [0, \frac{\pi}{2}]$ ,  $\tan u \geq u$  (inégalité des accroissements finis à partir de l'inégalité  $\tan'(u) = 1 + \tan^2(u) \geq 1$ ), d'où  $x_k(t) \geq k\pi$ . Par conséquent,

$$|v_k(t) - v_{k-1}(t)| = |v_{k-1}(t)| \frac{x^2}{x_k(t)^2} \leq |v_{k-1}(t)| \frac{x^2}{k^2\pi^2}$$

**Q 26.** Soit  $t \in \mathbb{R}_+$  et  $k \in \mathbb{N}^*$ .

Premier cas :  $t \geq k$ . On applique l'inégalité triangulaire puis l'inégalité de la question 2 :

$$|v_k(t)| = |x| \prod_{j=1}^k \left| 1 - \frac{x^2}{x_j(t)^2} \right| \leq |x| \prod_{j=1}^k \left( 1 + \frac{x^2}{x_j(t)^2} \right) \leq |x| \exp \left( \sum_{j=1}^k \frac{x^2}{x_j(t)^2} \right)$$

Or  $x_j(t)^2 \geq (j\pi)^2$  (cf question précédente) et par croissance de la fonction  $\exp$  :

$$|v_k(t)| \leq |x| \exp \left( \sum_{j=1}^k \frac{x^2}{x_j(t)^2} \right) \leq |x| \exp \left( \sum_{j=1}^k \frac{x^2}{(j\pi)^2} \right)$$

Deuxième cas :  $t < k$ . On utilise le premier cas pour obtenir la première inégalité, puis la croissance de  $\exp$  :

$$|v_k(t)| = P_{[t]}(x) = x \prod_{j=1}^{[t]} \left( 1 - \frac{x^2}{x_j(t)^2} \right) \stackrel{\text{cas 1}}{\leq} |x| \exp \left( \sum_{j=1}^{[t]} \frac{x^2}{(j\pi)^2} \right) \leq |x| \exp \left( \sum_{j=1}^k \frac{x^2}{(j\pi)^2} \right)$$

**Q 27.** On met bout à bout les inégalités des deux questions précédentes,

$$\begin{aligned} \forall k \geq 2, \forall t \in \mathbb{R}_+, \quad |v_k(t) - v_{k-1}(t)| &\leq \frac{x^2}{k^2\pi^2} |v_{k-1}(t)| \\ &\leq \frac{|x|^3}{k^2\pi^2} \exp \left( \sum_{j=1}^{k-1} \frac{x^2}{(j\pi)^2} \right) \\ &\leq \frac{|x|^3}{k^2\pi^2} \exp \left( \sum_{j=1}^{+\infty} \frac{x^2}{(j\pi)^2} \right) \end{aligned}$$

D'où par passage à la borne supérieure,

$$\forall k \geq 2, \quad \|v_k - v_{k-1}\|_\infty \leq \frac{|x|^3}{k^2\pi^2} \exp \left( \sum_{j=1}^{+\infty} \frac{x^2}{(j\pi)^2} \right) \underset{k \rightarrow +\infty}{=} \mathcal{O} \left( \frac{1}{k^2} \right)$$

Donc la série  $\sum_{k \geq 2} \|v_k - v_{k-1}\|_\infty$  est convergente, ce qui signifie que la série de fonctions  $\sum_{k \geq 2} (v_k - v_{k-1})$  converge normalement donc uniformément sur  $\mathbb{R}_+$ .

**Q 28.** Soit  $k \in \mathbb{N}^*$ . On a

$$\tan \left( \frac{j\pi}{2[t] + 1} \right) \underset{t \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{j\pi}{2[t] + 1} \quad \text{donc} \quad \lim_{t \rightarrow +\infty} \tan \left( \frac{j\pi}{2[t] + 1} \right) (2[t] + 1) = j\pi$$

D'où par produit fini de limites finies :

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} v_k(t) = \lim_{t \rightarrow +\infty} x \prod_{j=1}^k \left( 1 - \frac{x^2}{\left( \tan \left( \frac{j\pi}{2[t] + 1} \right) (2[t] + 1) \right)^2} \right) = x \prod_{j=1}^k \left( 1 - \frac{x^2}{(j\pi)^2} \right)$$

Soit  $t \in \mathbb{R}_+$ . Pour tout entier  $k > t$ ,  $v_k(t) = P_{[t]}(x)$  donc

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} v_k(t) = P_{[t]}(x)$$

**Q 29.** Je note pour  $t \in \mathbb{R}_+$  :

$$V(t) = \sum_{k=2}^{+\infty} (v_k(t) - v_{k-1}(t)) = \lim_{k \rightarrow +\infty} v_k(t) - v_1(t) \stackrel{\text{Q28}}{=} P_{[t]}(x) - v_1(t)$$

D'après la question Q24,  $\lim_{t \rightarrow +\infty} P_{[t]}(x) = \sin(x)$  et  $\lim_{t \rightarrow +\infty} v_1(t) = x \left(1 - \frac{x^2}{\pi^2}\right)$  donc :

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} V(t) = \sin(x) - x \left(1 - \frac{x^2}{\pi^2}\right)$$

Calculons maintenant  $\lim_{t \rightarrow +\infty} V(t)$  à l'aide du théorème de la double limite :

- pour chaque  $k \geq 2$ , d'après la question précédente :

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} v_k(t) - v_{k-1}(t) = x \prod_{j=1}^k \left(1 - \frac{x^2}{(j\pi)^2}\right) - x \prod_{j=1}^{k-1} \left(1 - \frac{x^2}{(j\pi)^2}\right)$$

- la série de fonctions  $\sum_{k \geq 2} (v_k - v_{k-1})$  converge uniformément sur  $\mathbb{R}_+$  et  $+\infty$  est une borne de  $\mathbb{R}_+$ .

Donc

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow +\infty} V(t) &= \lim_{t \rightarrow +\infty} \sum_{k=2}^{+\infty} v_k(t) - v_{k-1}(t) = \sum_{k=2}^{+\infty} \lim_{t \rightarrow +\infty} (v_k(t) - v_{k-1}(t)) \\ &= \sum_{k=2}^{+\infty} x \left( \prod_{j=1}^k \left(1 - \frac{x^2}{(j\pi)^2}\right) - \prod_{j=1}^{k-1} \left(1 - \frac{x^2}{(j\pi)^2}\right) \right) \\ &= x \prod_{j=1}^{+\infty} \left(1 - \frac{x^2}{(j\pi)^2}\right) - x \left(1 - \frac{x^2}{\pi^2}\right) \quad \text{par télescopage} \end{aligned}$$

D'où

$$\sin(x) - x \left(1 - \frac{x^2}{\pi^2}\right) = \lim_{t \rightarrow +\infty} V(t) = x \prod_{j=1}^{+\infty} \left(1 - \frac{x^2}{(j\pi)^2}\right) - x \left(1 - \frac{x^2}{\pi^2}\right)$$

D'où

$$\sin(x) = x \prod_{j=1}^{+\infty} \left(1 - \frac{x^2}{(j\pi)^2}\right)$$

**Q 30.** On va appliquer le résultat de la question 19 avec  $S = \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ ,  $f_n(x) = -\frac{x^2}{(n\pi)^2}$ .

Commençons par vérifier que  $(f_n)$  vérifie bien les hypothèses de la question 19 :

- pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ , pour tout  $x \in S$ , on a  $\frac{x^2}{\pi^2} \leq \frac{1}{4}$  donc  $f_n(x) \geq \frac{-1}{4n^2} > -1$ .
- la série de fonctions  $\sum_{n \geq 1} |f_n|$  converge uniformément sur  $S$  car :

$\|f_n\|_\infty \leq \frac{1}{4n^2}$  donc la série  $\sum_{n \geq 1} \|f_n\|_\infty$  converge ce qui signifie que la série de fonctions  $\sum_{n \geq 1} |f_n|$  converge normalement donc uniformément sur  $S$ .

- la série de fonctions  $\sum_{n \geq 1} \frac{f'_n}{1 + f_n}$  converge uniformément sur  $S$  car :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall x \in S, \quad \left| \frac{f'_n(x)}{1 + f_n(x)} \right| = \left| \frac{-2x}{(n\pi)^2 - 1} \right| \leq \frac{\pi}{(n\pi)^2 - 1}$$

Donc par passage à la borne supérieure sur  $S$  :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \left\| \frac{f'_n}{1 + f_n} \right\|_\infty \leq \frac{\pi}{(n\pi)^2 - 1} \quad \text{d'où} \quad \left\| \frac{f'_n}{1 + f_n} \right\|_\infty \underset{n \rightarrow +\infty}{=} \mathcal{O} \left( \frac{1}{n^2} \right)$$

On en déduit la convergence normale sur  $S$  (donc uniforme) de la série de fonctions  $\sum_{n \geq 1} \frac{f'_n}{1 + f_n}$ .

On peut donc maintenant appliquer le résultat de la question 19 avec pour  $x \in S \setminus \{0\}$  :

$$P(x) = \prod_{n=1}^{+\infty} (1 + f_n(x)) = \prod_{n=1}^{+\infty} \left(1 - \frac{x^2}{(n\pi)^2}\right) = \frac{\sin x}{x}, \text{ , et donc } P'(x) = \frac{x \cos x - \sin x}{x^2} :$$

$$\frac{P'(x)}{P(x)} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{f'_n(x)}{1 + f_n(x)} \text{ soit } \frac{x \cos(x) - \sin(x)}{x \sin x} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{-2x}{(n\pi)^2 - x^2}$$

On en déduit :

$$\frac{\cos(x)}{\sin(x)} = \frac{1}{x} - \sum_{j=1}^{+\infty} \frac{2x}{(j\pi)^2 - x^2}$$

**Q 31.** On utilise l'indication. On a  $x^2 \sin(x) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} x^3$  et

$$x \cos(x) - \sin(x) \underset{x \rightarrow 0}{=} x \left(1 - \frac{x^2}{2} + o(x^2)\right) - x + \frac{x^3}{6} + o(x^3) \underset{x \rightarrow 0}{=} \frac{-x^3}{3} + o(x^3)$$

Donc

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \cos(x) - \sin(x)}{x^2 \sin(x)} = -\frac{1}{3}$$

De plus pour tout  $x \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \setminus \{0\}$ , en utilisant la question précédente :

$$\frac{x \cos(x) - \sin(x)}{x^2 \sin(x)} = \frac{1}{x} \left(\frac{\cos(x)}{\sin(x)} - \frac{1}{x}\right) = -\sum_{j=1}^{+\infty} \frac{2}{(j\pi)^2 - x^2}$$

Mais la série de fonctions  $\sum_{j \geq 1} g_j$  où  $g_j(x) = \frac{-2}{(j\pi)^2 - x^2}$  converge uniformément sur  $S$  car  $\|g_j\|_\infty \leq \frac{2}{(j\pi)^2 - \frac{\pi^2}{4}}$  d'où la convergence normale de la série  $\sum_{j \geq 1} g_j$  et donc par le théorème de la double limite (on aurait pu utiliser le théorème de continuité) :

$$\lim_{x \rightarrow 0} -\sum_{j=1}^{+\infty} \frac{2}{(j\pi)^2 - x^2} = \sum_{j=1}^{+\infty} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-2}{(j\pi)^2 - x^2} = \sum_{j=1}^{+\infty} \frac{-2}{(j\pi)^2}$$

D'où

$$-\frac{1}{3} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \cos(x) - \sin(x)}{x^2 \sin(x)} = \sum_{j=1}^{+\infty} \frac{-2}{(j\pi)^2} \text{ i.e. } \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$$

**Q 32.** On applique le théorème de continuité des intégrales à paramètres. On note pour tout  $t \in ]0, +\infty[$ ,  $x \in ]0, +\infty[$ ,  $f(x, t) = t^{x-1} e^{-t}$ .

- pour tout  $t > 0$ ,  $x \mapsto f(x, t) = e^{(x-1) \ln(t)} e^{-t}$  est continue sur  $]0, +\infty[$  par continuité de exp.
- pour tout  $x \in [a, b] \subset ]0, +\infty[$ , pour tout  $t > 0$ ,

$$|f(x, t)| \leq \varphi(t) \text{ avec } \varphi(t) = \begin{cases} t^{a-1} e^{-t} & \text{si } 0 < t < 1 \\ t^{b-1} e^{-t} & \text{si } t \geq 1 \end{cases}$$

et  $\varphi$  est intégrable sur  $]0, +\infty[$ , car  $\varphi$  continue par morceaux sur  $]0, +\infty[$  et :

- en 0 :  $\varphi(t) \underset{t \rightarrow 0^+}{\sim} \frac{1}{t^{1-a}}$  et  $1 - a < 1$  et  $t \mapsto \frac{1}{t^{1-a}}$  intégrable sur  $]0, 1[$  (Riemann).
- en  $+\infty$  :  $\varphi(t) \underset{t \rightarrow +\infty}{=} o\left(\frac{1}{t^2}\right)$  par croissance comparée et  $t \mapsto \frac{1}{t^2}$  intégrable en  $+\infty$ .

Par conséquence,  $\Gamma$  est continue sur  $]0, +\infty[$ .

**Q 33.** On raisonne par récurrence sur  $n$  :

*initialisation* :  $n = 1$ , pour tout  $x > 0$ ,

$$g_1(x) = \int_0^1 u^{x-1} (1-u) du = \left[ \frac{u^x}{x} - \frac{u^{x+1}}{x+1} \right]_0^1 = \frac{1}{x} - \frac{1}{x+1} = \frac{1}{x(x+1)}.$$

*hérédité* : soit  $n \in \mathbb{N}^*$ , supposons pour tout  $x > 0$ ,  $g_n(x) = \frac{n!}{\prod_{k=0}^n (x+k)}$ .

On effectue une intégration par parties (que je ne rédige pas) :

$$\begin{aligned} g_{n+1}(x) &= \int_0^1 u^{x-1} (1-u)^{n+1} du = \frac{n+1}{x} \int_0^1 u^x (1-u)^n du \quad (\text{IPP}) \\ &= \frac{n+1}{x} g_n(x+1) \\ &= \frac{n+1}{x} \frac{n!}{\prod_{k=0}^n (x+1+k)} \quad \text{hyp. de récurrence avec } x+1 \\ &= \frac{(n+1)!}{\prod_{k=0}^{n+1} (x+k)} \end{aligned}$$

**Q 34.** Soit  $x > 0$ . J'applique le théorème de convergence dominée à la suite de fonctions  $(f_n)$  définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall t \geq 0, \quad f_n(x) = \begin{cases} t^{x-1} \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n & \text{si } t \leq n \\ 0 & \text{si } t > n \end{cases}$$

On a :

- pour  $t > 0$ ,  $\lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(t) = \lim_{n \rightarrow +\infty} t^{x-1} \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n = t^{x-1} e^{-t}$  par la question Q6; la suite de fonctions  $(f_n)$  converge simplement sur  $]0, +\infty[$  vers  $t \mapsto t^{x-1} e^{-t}$ .
- pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ , pour tout  $t > 0$ ,

$$|f_n(t)| \leq t^{x-1} e^{-t} \quad \begin{cases} \text{évident} & \text{si } t > n \\ \text{d'après Q2} & \text{si } t \leq n \end{cases}$$

Et  $t \mapsto t^{x-1} e^{-t}$  est intégrable sur  $]0, +\infty[$ ; déjà vu en Q32 mais rappelons le :

$$t^{x-1} e^{-t} \underset{t \rightarrow 0}{\sim} \frac{1}{t^{1-x}} \text{ avec } 1-x < 1 \text{ et } t^{x-1} e^{-t} \underset{t \rightarrow +\infty}{=} o\left(\frac{1}{t^2}\right) \text{ par croissance comparée.}$$

Par conséquent, d'après le théorème de convergence dominée :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^n t^{x-1} \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n dt = \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^{+\infty} f_n(t) dt = \int_0^{+\infty} \lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(t) dt = \int_0^{+\infty} t^{x-1} e^{-t} dt = \Gamma(x)$$

**Q 35.** Soit  $x \in \mathbb{R}_+^*$ . Pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ , par le changement de variable usuel  $u = t/n$ , ( $u \mapsto nu$  est de classe  $C^1$ , strictement croissante, bijective de  $]0, 1]$  dans  $]0, n]$ ) :

$$\int_0^n t^{x-1} \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n dt = \int_0^1 (nu)^{x-1} (1-u)^n n du = n^x g_n(x) = n^x \frac{n!}{\prod_{k=0}^n (x+k)}$$

Donc par la question précédente

$$\Gamma(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^n t^{x-1} \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n dt = \lim_{n \rightarrow +\infty} n^x \frac{n!}{\prod_{k=0}^n (x+k)}$$

**Q 36.** D'après Q29,  $\sin(\pi x) = \pi x \prod_{j=1}^{+\infty} \left(1 - \frac{x^2}{j^2}\right)$  et d'après Q35 :

$$\Gamma(x)\Gamma(1-x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n^x n!}{\prod_{k=0}^n (x+k)} \frac{n^{1-x} n!}{\prod_{k=0}^n (1-x+k)}$$

Or pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ ,

$$\begin{aligned} \frac{n^x n!}{\prod_{k=0}^n (x+k)} \frac{n^{1-x} n!}{\prod_{k=0}^n (1-x+k)} &= \frac{n(n!)^2}{x \prod_{k=1}^n (x+k) \prod_{k=1}^{n+1} (k-x)} \\ &= \frac{1}{x} \left( \prod_{k=1}^n \frac{k^2}{(x+k)(k-x)} \right) \frac{n}{n+1-x} \\ &= \frac{n}{x(n+1-x)} \prod_{k=1}^n \left(1 - \frac{x^2}{k^2}\right)^{-1} \\ &= \frac{n}{x(n+1-x)} \left( \prod_{k=1}^n \left(1 - \frac{x^2}{k^2}\right) \right)^{-1} \end{aligned}$$

Or  $\frac{n}{x(n+1-x)} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{x}$  donc par passage à la limite quand  $n \rightarrow +\infty$  :

$$\Gamma(x)\Gamma(1-x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} \left( \prod_{k=1}^n \left(1 - \frac{x^2}{k^2}\right) \right)^{-1} = \frac{1}{x} \left( \prod_{k=1}^{+\infty} \left(1 - \frac{x^2}{k^2}\right) \right)^{-1} = \frac{1}{x \sin(\pi x)} = \frac{\pi}{\sin(\pi x)}$$

**Q 37.** On pose  $u_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \ln n$ . L'égalité demandée revient à montrer que la suite  $(u_n)$  est convergente. Pour cela, il suffit de montrer que la série télescopique associée  $\sum u_{n+1} - u_n$  est convergente.

On a pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ ,

$$\begin{aligned} u_{n+1} - u_n &= \frac{1}{n+1} - \ln\left(\frac{n+1}{n}\right) = \frac{1}{n} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{-1} - \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) \underset{n \rightarrow +\infty}{=} \frac{1}{n} \left(1 - \frac{1}{n}\right) - \frac{1}{n} + \frac{1}{2n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right) \\ &\underset{n \rightarrow +\infty}{=} \frac{-1}{2n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right) \end{aligned}$$

Donc  $u_{n+1} - u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{=} \mathcal{O}\left(\frac{1}{n^2}\right)$  donc la série  $\sum (u_{n+1} - u_n)$  est convergente donc la suite  $(u_n)$  converge, d'où l'existence de  $\gamma$  tel que  $u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{=} \gamma + o(1)$  c'est à dire :

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \underset{n \rightarrow +\infty}{=} \ln(n) + \gamma + o(1)$$

**Q 38.** Soit  $x \in \mathbb{R}_+^*$ . Pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ ,  $n! = \prod_{k=1}^n k$  et  $e^{\sum_{k=1}^n \frac{x}{k}} = \prod_{k=1}^n e^{\frac{x}{k}}$ .

$$\frac{n^x n!}{\prod_{k=0}^n (x+k)} = \frac{e^{x \ln(n)}}{x} \prod_{k=1}^n \frac{k}{x+k} = \frac{e^{x(\ln(n) - \sum_{k=1}^n \frac{1}{k})}}{x} \prod_{k=1}^n e^{\frac{x}{k}} \left(1 + \frac{x}{k}\right)^{-1}$$

Et d'après la question précédente  $\lim_{n \rightarrow +\infty} e^{x(\ln(n) - \sum_{k=1}^n \frac{1}{k})} = e^{-\gamma x}$  d'où par passage à la limite et Q35 :

$$\Gamma(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{e^{x(\ln(n) - \sum_{k=1}^n \frac{1}{k})}}{x} \prod_{k=1}^n e^{\frac{x}{k}} \left(1 + \frac{x}{k}\right)^{-1} = \frac{e^{-\gamma x}}{x} \prod_{k=1}^{+\infty} e^{\frac{x}{k}} \left(1 + \frac{x}{k}\right)^{-1}$$