

CONCOURS MINES-PONTS

CORRIGÉ MATHÉMATIQUES II - MP

D'après M. Laamoum

Fonctions de matrices symétriques, continuité et convexité

Matrices de permutations

1 ▷

Soit $(\sigma, \sigma') \in B_n$. Notons (E_1, \dots, E_n) la base canonique de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{R})$

Pour $j = 1, \dots, n$

$$\omega(\sigma)(\omega(\sigma')E_j) = \omega(\sigma)E_{\sigma'(j)} = E_{\sigma(\sigma'(j))} = E_{\sigma \circ \sigma'(j)} = (\omega(\sigma \circ \sigma'))E_j$$

Donc $\omega(\sigma \circ \sigma')$ et $\omega(\sigma)(\omega(\sigma'))$ sont égales puisque elles ont les mêmes colonnes.

2 ▷

Soit $\sigma \in B_n$. La j^{e} colonne de $\omega(\sigma)$ est E_{σ_j} , pour $j = 1, \dots, n$; donc les n colonnes de $\omega(\sigma)$ sont les vecteurs de la base canonique de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{R})$ elles forment donc une base orthonormée et donc :

$$\omega(\sigma) \in O_n(\mathbf{R}).$$

Donc $\omega(\mathcal{B}_n) \subset O_n(\mathbf{R})$.

3 ▷

Notons $D = \text{Diag}((d_i)_{1 \leq i \leq n})$, $D' := \text{Diag}((d'_i)_{1 \leq i \leq n})$ et $P := \omega(\sigma)$ Soit $j \in \{1, \dots, n\}$.

$$PD'E_j = d_{\sigma(j)}PE_j = d_{\sigma(j)}E_{\sigma(j)} \text{ et } DPE_j = DE_{\sigma(j)} = d_{\sigma(j)}E_{\sigma(j)}.$$

Donc $\text{Diag}(d_1, \dots, d_n)\omega(\sigma) = \omega(\sigma)\text{Diag}(d_{\sigma(1)}, \dots, d_{\sigma(n)})$, les deux matrices ayant même colonnes (ou d'endomorphismes canoniquement associés coïncidant sur la base canonique).

4 ▷ Soit $D = \text{Diag}(d_1, \dots, d_n)$ et $D' = \text{Diag}(d'_1, \dots, d'_n)$ deux éléments de $\mathcal{D}_n(\mathbf{R})$.

• HYPOTHÈSE : D et D' ont le même ensemble de coefficients diagonaux, chacun ayant le même nombre d'occurrences dans D et D' .

Donc il existe $\sigma \in \mathcal{B}_n$ telle que $d'_i = d_{\sigma(i)}$ pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$ et $D' = \text{Diag}(d_{\sigma(1)}, \dots, d_{\sigma(n)})$.

D'après la question 3 on a $D\omega(\sigma) = \omega(\sigma)D'$, comme $\omega(\sigma) \in \omega(\mathcal{B}_n) \subset O_n(\mathbf{R})$ alors $\omega(\sigma)^{-1} = {}^t\omega(\sigma)$ et

$$D' = {}^t\omega(\sigma) D \omega(\sigma)$$

• HYPOTHÈSE : Il existe $M \in \omega(\mathcal{B}_n)$ telle que $D' = {}^tMDM$.

On dispose de $\sigma \in \mathcal{B}_n$ telle que $M = \omega(\sigma)$, la question 3 donne

$$DM = M \text{Diag}(d_{\sigma(1)}, \dots, d_{\sigma(n)}) \text{ et } \text{Diag}(d_{\sigma(1)}, \dots, d_{\sigma(n)}) = {}^tMDM$$

donc en posant $D' = \text{Diag}(d_{\sigma(1)}, \dots, d_{\sigma(n)})$, alors D et D' sont semblables et ont donc même valeurs propres chacune avec le même ordre de multiplicité, donc D et D' ont le même ensemble de coefficients diagonaux, chacun ayant le même nombre d'occurrences dans D et D' .

Fonctions de matrices symétriques

5 ▷ Soit $S \in \mathcal{S}_n(I)$. S est symétrique réelle, d'après le théorème spectral il existe $P \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ et $D = \text{Diag}(s_1, \dots, s_n)$ tel que $S = P D {}^t P$, $S \in \mathcal{S}_n(I)$ donc $\text{Sp}(S) = \{s_1, \dots, s_n\} \subset I$.

En prenant $\Omega = {}^t P$, on obtient : $S = {}^t \Omega \text{Diag}(s_1, \dots, s_n) \Omega$ avec $(s_i)_{1 \leq i \leq n} \in I^n$.

6 ▷ Soit $(s_i)_{1 \leq i \leq n} \in I^n$, supposons que dans $(s_i)_{1 \leq i \leq n}$ il y a m éléments deux à deux différents notés a_1, \dots, a_m , avec $1 \leq m \leq n$, alors $\{a_1, \dots, a_m\} = \{s_1, \dots, s_n\}$. Posons

$$\begin{aligned} \varphi : \mathbb{R}_{m-1}[X] &\rightarrow \mathbb{R}^m \\ P &\mapsto (P(a_1), \dots, P(a_m)) \end{aligned}$$

φ est linéaire. Soit $P \in \ker \varphi$ alors il admet m racines deux à deux distinctes (les a_i) et il est de degré inférieur à $n-1$, donc $P = 0$. Ainsi $\ker \varphi = \{0\}$ et φ est injective, entre deux espaces de même dimension donc elle est bijective.

Soit $P = \varphi^{-1}(f(a_1), \dots, f(a_m))$, on a alors $\forall i \in \llbracket 1, m \rrbracket, P(a_i) = f(a_i)$ ou encore $\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, P(s_i) = f(s_i)$.

P est appelé polynôme d'interpolation de Lagrange, il a pour expression $P(X) = \sum_{k=1}^r f(a_k) \prod_{\substack{1 \leq i \leq r \\ i \neq k}} \frac{X - a_i}{a_k - a_i}$.

7 ▷

Observons que les ensembles $\{s_i\}_{1 \leq i \leq n}$ et $\{s'_i\}_{1 \leq i \leq n}$ sont égaux, il s'agit du spectre de S , puisque $\Omega^\top = \Omega^{-1}$.

Considérons P le polynôme vérifiant : $\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, P(s_i) = f(s_i)$.

Par le cours

$$P(S) = {}^t \Omega \text{Diag} \left((P(s_i))_{1 \leq i \leq n} \right) \Omega = {}^t \Omega' \text{Diag} \left((P(s'_i))_{1 \leq i \leq n} \right) \Omega' \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R}),$$

ainsi

$$P(S) = {}^t \Omega \text{Diag} \left((f(s_i))_{1 \leq i \leq n} \right) \Omega = {}^t \Omega' \text{Diag} \left((f(s'_i))_{1 \leq i \leq n} \right) \Omega' \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R}).$$

8 ▷

— Soit $S \in \mathcal{S}_n(I)$, $s_1, \dots, s_n \in I$ et $\Omega \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ tels que $S = {}^t \Omega \text{Diag} \left((s_i)_{1 \leq i \leq n} \right) \Omega$.

On a $u : \mathbb{R}^I \rightarrow \mathcal{S}_n(\mathbb{R})^{\mathcal{S}_n(I)}$, si $\varphi \in \mathbb{R}^I$ alors $u(\varphi)(S) = {}^t \Omega \text{Diag} \left((\varphi(s_i))_{1 \leq i \leq n} \right) \Omega$.

Soit $f, g \in \mathbb{R}^I$ et $\lambda \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} u(f + \lambda g)(S) &= {}^t \Omega \text{Diag} \left(((f + \lambda g)(s_i))_{1 \leq i \leq n} \right) \Omega \\ &= {}^t \Omega \text{Diag} \left((f(s_i))_{1 \leq i \leq n} \right) \Omega + \lambda {}^t \Omega \text{Diag} \left((g(s_i))_{1 \leq i \leq n} \right) \Omega \\ &= u(f) + \lambda u(g)(S) \end{aligned}$$

Comme S est quelconque : $u(f + \lambda g) = u(f) + \lambda u(g)$ et u est linéaire.

Remarque : la définition $v = T \circ u$ n'a pas de sens, car u n'est pas à valeur dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

— $v : \mathbb{R}^I \rightarrow \mathbb{R}$, pour $\varphi \in \mathbb{R}^I$ et $S \in \mathcal{S}_n(I)$ on a $v(\varphi) = \text{Tr}(u(\varphi))$.

Tr et u sont linéaires donc v est linéaire.

— Ecrivons $xI_n = {}^t I_n \text{Diag}(x, \dots, x) I_n$ avec I_n la matrice identité, $I_n \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$.

Donc $u(\varphi)(xI_n) = {}^t I_n \text{Diag}(\varphi(x), \dots, \varphi(x)) I_n = \varphi(x) I_n$.

Ainsi, $\forall \varphi \in \mathbb{R}^I, \forall x \in I, u(\varphi)(xI_n) = \varphi(x) I_n$.

9 ▷

— Injectivité de u :

Soit $\varphi \in \ker(u)$. Donc $u(\varphi) = 0$ et pour tout $S \in \mathcal{S}_n(I), u(\varphi)(S) = 0_n$, en particulier, pour tout $x \in I,$

$xI_n \in \mathcal{S}_n(I)$, donc $u(\varphi)(xI_n) = \varphi(x) I_n = 0_n$. Ainsi, pour tout $x \in I, \varphi(x) = 0$, φ est la fonction nulle $0_{(\mathbb{R}^I)}$.

Donc $\ker(u) = \{0_{(\mathbb{R}^I)}\}$ et u est injective.

— Surjectivité de u :

- Si $n = 1$, alors $\mathcal{S}_n(I)$ et $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ sont assimilés à I et \mathbb{R} .
 $u : \mathbb{R}^I \rightarrow \mathbb{R}^I$, si $\varphi \in \mathbb{R}^I$ et $S = (s) = {}^t I_1(s) I_1$ alors $u(\varphi)(s) = (\varphi(s))$ ainsi $u(\varphi) = \varphi$.
 u est l'application identité de \mathbb{R}^I , donc elle est surjective.
- Si $n > 1$. Soit $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R}) \setminus \{\alpha I_n, \alpha \in \mathbb{R}\}$ et f la fonction, de $\mathcal{S}_n(I)$ vers $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$, constante égale à A .
 Supposons qu'il existe $\varphi \in \mathbb{R}^I$ vérifiant $u(\varphi) = f$, alors pour $x \in I$, $u(\varphi)(x I_n) = \varphi(x) I_n = A$, ce qui est absurde, u n'est pas surjective.
 Ainsi, u est surjective si et seulement si $n = 1$.

10 \triangleright f est polynomiale, soit $P \in \mathbb{R}[X]$ tel que $f(x) = P(x)$ pour tout $x \in I$.

Soit $S \in \mathcal{S}_n(I)$, $s_1, \dots, s_n \in I$ et $\Omega \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ tels que $S = {}^t \Omega \text{Diag} \left((s_i)_{1 \leq i \leq n} \right) \Omega$. On a alors

$$\begin{aligned} u(f)(S) &= {}^t \Omega \text{Diag} \left((f(s_i))_{1 \leq i \leq n} \right) \Omega \\ &= {}^t \Omega \text{Diag} \left((P(s_i))_{1 \leq i \leq n} \right) \Omega \\ &= P \left({}^t \Omega \text{Diag} \left((s_i)_{1 \leq i \leq n} \right) \Omega \right) \\ &= P(S) \end{aligned}$$

Réciproquement, supposons qu'il existe $P \in \mathbb{R}[X]$ tel que : $\forall S \in \mathcal{S}_n(I), u(f)(S) = P(S)$. En particulier, pour tout $x \in I$, $u(f)(x I_n) = P(x I_n) = P(x) I_n$. D'après la question 8 on a $u(f)(x I_n) = f(x) I_n$. Ce qui donne pour tout $x \in I$, $f(x) = P(x)$. Ainsi, f est polynomiale et la réciproque est vraie.

11 \triangleright Soit $S \in \mathcal{S}_n(I)$, $s_1, \dots, s_n \in I$ et $\Omega \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ tels que $S = {}^t \Omega \text{Diag} \left((s_i)_{1 \leq i \leq n} \right) \Omega$.

— Convergence simple :

On suppose que $\varphi_k \xrightarrow{CVS} \varphi$ sur I donc $\forall x \in I$, $\varphi_k(x) \xrightarrow{k \rightarrow +\infty} \varphi(x)$.

- On a

$$u(\varphi_k)(S) = \Omega {}^t \text{Diag} \left((\varphi_k(s_i))_{1 \leq i \leq n} \right) \Omega = \Omega {}^t D_k \Omega$$

La suite $(D_k)_{k \in \mathbb{N}}$ converge vers la matrice $D = \text{Diag} \left((\varphi(s_i))_{1 \leq i \leq n} \right)$, et l'application $M \mapsto {}^t \Omega M \Omega$ est linéaire en dimension finie donc elle est continue.

Ainsi, $u(\varphi_k)(S) \xrightarrow{k \rightarrow +\infty} u(\varphi)(S)$ et $u(\varphi_k) \xrightarrow{CVS} u(\varphi)$ sur $\mathcal{S}_n(I)$.

- Tr est continue, elle est linéaire en dimension finie, donc $\text{Tr}(u(\varphi_k))(S) \xrightarrow{k \rightarrow +\infty} \text{Tr}(u(\varphi))(S)$, par suite $v(\varphi_k) \xrightarrow{CVS} v(\varphi)$ sur $\mathcal{S}_n(I)$.

— Convergence uniforme .

Toutes les normes de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ sont équivalentes, on choisit la norme euclidienne $\|\cdot\|_2$ donnée par $\|A\|_2 = \sqrt{\text{Tr}(A {}^t A)}$, $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Remarquons que $\|{}^t \Omega A \Omega\|_2 = \|A\|_2$.

- On a

$$\|u(\varphi_k)(S) - u(\varphi)(S)\|_2^2 = \|\text{Diag} \left((\varphi_k(s_i) - \varphi(s_i))_{1 \leq i \leq n} \right)\|_2^2 = \sum_{i=1}^n |\varphi_k(s_i) - \varphi(s_i)|^2$$

Donc $\|u(\varphi_k)(S) - u(\varphi)(S)\|_2 \leq \sqrt{n} \|\varphi_k - \varphi\|_{\infty, I}$, avec $\|\cdot\|_{\infty, I}$ est la norme de la convergence uniforme sur I , ceci est valable pour tout S dans $\mathcal{S}_n(I)$ par suite

$$\|u(\varphi_k) - u(\varphi)\|_{\infty, \mathcal{S}_n(I)} = \sup_{S \in \mathcal{S}_n(I)} \|u(\varphi_k)(S) - u(\varphi)(S)\|_2 \leq \sqrt{n} \|\varphi_k - \varphi\|_{\infty, I}$$

Si $(\varphi_k)_{k \in \mathbb{N}}$ converge uniformément vers φ sur I , alors $\|\varphi_k - \varphi\|_{\infty, I} \xrightarrow{k \rightarrow +\infty} 0$ par suite

$$\|u(\varphi_k) - u(\varphi)\|_{\infty, \mathcal{S}_n(I)} \xrightarrow{k \rightarrow +\infty} 0,$$

ainsi $(u(\varphi_k))_{k \in \mathbb{N}}$ converge uniformément vers $u(\varphi)$ sur $\mathcal{S}_n(I)$.

- La trace d'une matrice est égale à la somme de ses valeurs propres, donc

$$|v(\varphi_k)(S) - v(\varphi)(S)| = \left| \sum_{i=1}^n (\varphi_k(s_i) - \varphi(s_i)) \right| \leq n \|\varphi_k - \varphi\|_{\infty, I}$$

et

$$\sup_{S \in \mathcal{S}_n(I)} |v(\varphi_k)(S) - v(\varphi)(S)| \leq n \|\varphi_k - \varphi\|_{\infty, I}$$

ainsi $(v(\varphi_k))_{k \in \mathbb{N}}$ converge uniformément vers $v(\varphi)$ sur $\mathcal{S}_n(I)$.

Norme et convexité

12 ▷ Soit $S \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$. D'après le théorème spectral, \mathbb{R}^n admet une base orthonormée (V_1, \dots, V_n) formée de vecteurs propres de S . Notons λ_i la valeur propre associée à V_i .

Soit $X \in \mathbb{R}^n$, il s'écrit $X = \sum_{i=1}^n x_i V_i$. On a alors

$$SX = \sum_{i=1}^n x_i \lambda_i V_i \text{ et } {}^t X S X = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n x_i x_j \lambda_i {}^t V_i V_j$$

(V_1, \dots, V_n) est orthonormée dans \mathbb{R}^n donc $\langle V_i, V_j \rangle_{\mathbb{R}^n} = {}^t V_i V_j = \delta_{i,j}$, ainsi ${}^t X S X = \sum_{i=1}^n \lambda_i x_i^2$ et

$$\min(\text{Sp}(S)) \sum_{i=1}^n x_i^2 \leq {}^t X S X \leq \max(\text{Sp}(S)) \sum_{i=1}^n x_i^2$$

Comme ${}^t X X = x_1^2 + \dots + x_n^2$, on a donc

$$\min(\text{Sp}(S)) {}^t X X \leq {}^t X S X \leq \max(\text{Sp}(S)) {}^t X X$$

Si $X \in \Sigma$ alors ${}^t X X = 1$. On en déduit

$$\forall X \in \Sigma, \min(\text{Sp}(S)) \leq {}^t X S X \leq \max(\text{Sp}(S))$$

Puisque ${}^t V_i S V_i = \lambda_i$ pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$ alors $\text{Sp}(S) \subset \{ {}^t X S X ; X \in \Sigma \}$ et $\min(\text{Sp}(S))$ (resp $\max(\text{Sp}(S))$) est atteint, donc

$$\min(\text{Sp}(S)) = \min \{ {}^t X S X ; X \in \Sigma \} \text{ et } \max(\text{Sp}(S)) = \max \{ {}^t X S X ; X \in \Sigma \}$$

13 ▷

— Soit $S, S' \in \mathcal{S}_n(I)$ et $t \in [0, 1]$. Pour $X \in \Sigma$, on a

$${}^tX((1-t)S + tS')X = (1-t) {}^tX S X + t {}^tX S' X$$

Comme $t \geq 0$ et $1-t \geq 0$, la question précédente donne

$$(1-t) \min(\text{Sp}(S)) + t \min(\text{Sp}(S')) \leq {}^tX((1-t)S + tS')X \leq (1-t) \max(\text{Sp}(S)) + t \max(\text{Sp}(S'))$$

Donc $(1-t) \min(\text{Sp}(S)) + t \min(\text{Sp}(S')) \leq \min \{ {}^tX((1-t)S + tS')X ; X \in \Sigma \} = \min(\text{Sp}((1-t)S + tS'))$, de même on a $\max(\text{Sp}((1-t)S + tS')) \leq (1-t) \max(\text{Sp}(S)) + t \max(\text{Sp}(S'))$, par suite

$$\text{Sp}((1-t)S + tS') \subset [(1-t) \min(\text{Sp}(S)) + t \min(\text{Sp}(S')), (1-t) \max(\text{Sp}(S)) + t \max(\text{Sp}(S'))] \quad (*)$$

Les spectres S, S' sont dans I qui est convexe, donc l'intervalle ci-dessus est inclus dans I , ainsi

$$\text{Sp}((1-t)S + tS') \subset I \text{ et } (1-t)S + tS' \in \mathcal{S}_n(I).$$

On a montré que $\forall S, S' \in \mathcal{S}_n(I), \forall t \in [0, 1], (1-t)S + tS' \in \mathcal{S}_n(I)$ donc $\mathcal{S}_n(I)$ est une partie convexe de $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$.

— Soit $M \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$, $\rho(M) = \max\{|\lambda| ; \lambda \in \text{Sp}(M)\}$ (appelé rayon spectral).

- Soit $S \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ et $\alpha \in \mathbb{R}$, $\text{Sp}(\alpha S) = \{\alpha\lambda ; \lambda \in \text{Sp}(S)\}$, $\text{Sp}(S)$ est fini, donc $\rho(\lambda S) = |\lambda|\rho(S)$.
- Soit $S \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ telle que $\rho(S) = 0$, alors $\text{Sp}(S) = \{0\}$, comme S est diagonalisable, alors $S = 0_n$.
- Soit $S, S' \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$.

La relation (*) de la question 12 pour $t = \frac{1}{2}$, donne

$$\text{Sp}(S + S') \subset [\min(\text{Sp}(S)) + \min(\text{Sp}(S')), \max(\text{Sp}(S)) + \max(\text{Sp}(S'))]$$

de plus

$$-\rho(S) \leq \min(\text{Sp}(S)) \leq \max(\text{Sp}(S)) \leq \rho(S),$$

donc $\text{Sp}(S + S') \subset [-\rho(S) - \rho(S'), \rho(S) + \rho(S')]$, ce qui donne $\rho(S + S') \leq \rho(S) + \rho(S')$.

Ainsi, ρ est une norme sur $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$.

Continuité des fonctions de matrices symétriques

14 ▷ Soit $S \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$, le polynôme caractéristique χ_S , de S , est de degré n , donc χ est définie de $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ vers $\mathbb{R}_n[X]$.

Les applications composante de χ dans la base canonique de $\mathbf{R}[X]$ sont donc continues. Donc χ est continue.

15 ▷ Soit $M \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ et une suite $(M_k)_{k \in \mathbb{N}}$ de $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ qui converge vers M . Par continuité de la norme ρ (1-lipschitzienne) $\rho(M_k) \xrightarrow[k \rightarrow +\infty]{} \rho(M)$.

Ainsi $(\rho(M_k))_{k \in \mathbb{N}}$ est une suite bornée. Comme $\|\Lambda_k\| \leq \rho(M_k)$ pour tout $k \in \mathbb{N}$ alors $(\Lambda_k)_{k \in \mathbb{N}}$ bornée dans \mathbb{R}^n , elle admet donc une valeur d'adhérence.

Posons $\Lambda_k = (\lambda_{1,k}, \dots, \lambda_{n,k})$ et φ strictement croissante de \mathbb{N} vers \mathbb{N} , telle que $\Lambda_{\varphi(k)} \xrightarrow[k \rightarrow +\infty]{} \Lambda$ avec $\Lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_n)$.

Du fait que $\lambda_{1,k} \leq \dots \leq \lambda_{n,k}$ et par passage à la limite on a $\lambda_1 \leq \dots \leq \lambda_n$ et Λ est une valeur d'adhérence croissante.

16 ▷ Supposons que $(\Lambda_{\alpha(k)})_{k \in \mathbb{N}}$ converge. Or $M_k \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{} M$, donc $M_{\alpha(k)} \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{} M$. On sait que χ est continue et donc $\chi(M_k) \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{} \chi(M)$, par suite $\chi(M_{\alpha(k)}) \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{} \chi(M)$. Posons $\Lambda_k = (\lambda_{1,k}, \dots, \lambda_{n,k})$ et $\Lambda_{\alpha(k)} \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{} (\ell_1, \dots, \ell_n)$ une suite croissante, donc

$$\chi_{M_{\alpha(k)}} = \prod_{i=1}^n (X - \lambda_{i,\alpha(k)})$$

et

$$\chi_{M_{\alpha(k)}} \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{} \prod_{i=1}^n (X - \ell_i)$$

Par unicité de la limite, on a

$$\chi_M = \prod_{i=1}^n (X - \ell_i)$$

Ainsi (ℓ_1, \dots, ℓ_n) est la suite croissante des valeurs propres de M et $\Lambda_{\alpha(k)} \xrightarrow[k \rightarrow +\infty]{} \text{Sp}_\uparrow(M)$.

17 \triangleright La suite $(\Lambda_k)_{k \in \mathbb{N}}$ bornée dans \mathbb{R}^n , espace vectoriel de dimension finie, et admet une unique valeur d'adhérence $\Lambda = \text{Sp}_\uparrow(M)$.

Donc $(\Lambda_k)_{k \in \mathbb{N}}$ converge vers Λ .

On a donc pour tout $M \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ et toute suite $(M_k)_k$ tendant vers M , $(\text{Sp}_\uparrow(M_k))_k$ converge vers $\text{Sp}_\uparrow(M)$ dans \mathbb{R}^n . Donc Sp_\uparrow est continue sur $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$.

18 \triangleright Comme $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est de dimension finie, Il suffit de montrer que $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ est une partie fermée et bornée de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

— On a $\mathcal{O}_n(\mathbb{R}) = \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), M^t M = I_n\}$. Les applications suivantes

$$\begin{array}{ccc} \varphi_1 : \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) & \rightarrow & (\mathcal{M}_n(\mathbb{R}))^2 \\ A & \mapsto & (A, {}^t A) \end{array} \quad \begin{array}{ccc} \varphi_2 : (\mathcal{M}_n(\mathbb{R}))^2 & \rightarrow & \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \\ (A, B) & \mapsto & AB \end{array}$$

sont continues, φ_1 est linéaire en dimension finie et φ_2 est bilinéaire en dimension finie. Ainsi l'application $\psi = \varphi_2 \circ \varphi_1$ est continue et $\psi(M) = M^t M$.

Ainsi $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ est l'image réciproque par ψ du fermé $\{I_n\}$, donc $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ est un fermé.

— On a pour toute matrice $M \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$, $\|M\|_2 = \text{Tr}(M^t M) = n$, donc $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ est une partie bornée de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

19 \triangleright Soit $\varphi \in \mathcal{C}^0(I, \mathbb{R})$, montrons $u(\varphi)$ est continue par la caractérisation séquentielle de la continuité.

Soit $(M_k)_{k \in \mathbb{N}}$ une suite de $\mathcal{S}_n(I)$ qui converge vers une matrice M . On note, pour $k \in \mathbb{N}$, $\Lambda_k = (\lambda_{1,k}, \dots, \lambda_{n,k})$ le spectre ordonné de M_k . Pour tout k , il existe $\Omega_k \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ telle que

$$M_k = {}^t \Omega_k \text{Diag}((\lambda_{i,k})_{1 \leq i \leq n}) \Omega_k$$

On a alors

$$u(\varphi)(M_k) = {}^t \Omega_k \text{Diag}((\varphi(\lambda_{i,k})_{1 \leq i \leq n})) \Omega_k$$

Soit L une valeur d'adhérence de la suite $(u(\varphi)(M_k))_{k \in \mathbb{N}}$, et $(u(\varphi)(M_{\sigma(k)}))_{k \in \mathbb{N}}$ une sous suite qui converge vers L .

On sait que la suite $(\Lambda_k)_{k \in \mathbb{N}}$ converge vers le spectre croissant $\Lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ de M .

Comme $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ est un compact, il existe une suite extraite $(\Omega_{\sigma(\tau(k))})_{k \in \mathbb{N}}$ de $(\Omega_{\sigma(k)})_{k \in \mathbb{N}}$ qui converge vers $\Omega \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$.

On a $\lambda_{i,\sigma(\tau(k))} \xrightarrow[k \rightarrow +\infty]{} \lambda_i$ pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$ donc

$$M_{\sigma(\tau(k))} \xrightarrow[k \rightarrow +\infty]{} {}^t \Omega \text{Diag}((\lambda_i)_{1 \leq i \leq n}) \Omega \quad \text{et} \quad u(\varphi)(M_{\sigma(\tau(k))}) \xrightarrow[k \rightarrow +\infty]{} {}^t \Omega \text{Diag}((\varphi(\lambda_i))_{1 \leq i \leq n}) \Omega$$

$(M_{\sigma(\tau(k))})_{k \in \mathbb{N}}$ est une sous suite convergente de $(M_k)_{k \in \mathbb{N}}$ donc elle converge vers M , par unicité de la limite, on a

$$M = {}^t \Omega \text{Diag}((\lambda_i)_{1 \leq i \leq n}) \Omega$$

par suite

$${}^t \Omega \text{Diag}((\varphi(\lambda_i))_{1 \leq i \leq n}) \Omega = u(\varphi)(M)$$

On a donc $u(\varphi)(M_{\sigma(\tau(k))}) \xrightarrow{k \rightarrow +\infty} u(\varphi)(M)$.

Puisque $(u(\varphi)(M_{\sigma(k)}))_{k \in \mathbb{N}}$ converge vers L alors $(u(\varphi)(M_{\sigma(\tau(k))}))_{k \in \mathbb{N}}$ converge vers L , d'où $L = u(\varphi)(M)$.

La suite $(u(\varphi)(M_k))_{k \in \mathbb{N}}$ admet donc une valeur d'adhérence unique $L = u(\varphi)(M)$.

De plus toutes les suites $(\varphi(\lambda_{i,k}))_{k \in \mathbb{N}}$ sont bornées, pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, donc la suite $(\rho(u(\varphi)(M_k)))_{k \in \mathbb{N}}$ est bornée et $(u(\varphi)(M_k))_{k \in \mathbb{N}}$ est bornée. D'après question 17 on a $(u(\varphi)(M_k))_{k \in \mathbb{N}}$ converge vers $u(\varphi)(M)$. Ce qui prouve $u(\varphi)$ est continue.

Comme l'application Tr est continue alors $v(\varphi)$ est aussi continues.

Convexité des fonctions de matrices symétriques

20 ▷

— Soit $U \in \mathcal{U}_S$. Il existe alors $\Omega \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ tel que $U = {}^t\Omega S \Omega$. Posons $(\varepsilon_i)_{1 \leq i \leq n}$ la base canonique de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.

Remarquons que pour tout $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $[U]_{k,k} = {}^t\varepsilon_k U \varepsilon_k$, donc $[U]_{k,k} = {}^tX S X$ avec $X = \Omega \varepsilon_k$.

Comme $\Omega \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ et ${}^t\varepsilon_k \varepsilon_k = 1$ alors $X \in \Sigma$.

D'après la question 12, on a ${}^tX S X \in [\min(\text{Sp}(S)), \max(\text{Sp}(S))] \subset I$, donc $[U]_{k,k} \in I$.

— Soit f convexe sur I et $S \in \mathcal{S}_n(I)$. Notons $\text{Sp}_\uparrow(S) = (\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ on a

$$v(f)(S) = \sum_{i=1}^n f(\lambda_i) .$$

Considérons la matrice $\Omega = (\omega_{ij})_{1 \leq i, j \leq n} \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ et $U = {}^t\Omega D \Omega$ avec $D = \text{Diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$.

On a D et U sont dans \mathcal{U}_S et

$$\sum_{k=1}^n f([D]_{k,k}) = \sum_{i=1}^n f(\lambda_i) = v(f)(S)$$

D'autre part, pour tout $i, j \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $\omega_{ij} = {}^t\varepsilon_i \Omega \varepsilon_j$, posons $X_j = \Omega \varepsilon_j$ la j -ème colonne de Ω . Alors :

$$[U]_{jj} = {}^tX_j \text{Diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n) X_j = \sum_{i=1}^n \omega_{ij}^2 \lambda_i$$

On sait que les colonnes d'une matrice orthogonale sont unitaires donc $\sum_{i=1}^n \omega_{ij}^2 = 1$, ce qui donne

$$f\left(\sum_{i=1}^n \omega_{ij}^2 \lambda_i\right) \leq \left(\sum_{i=1}^n \omega_{ij}^2 f(\lambda_i)\right)$$

ainsi

$$\sum_{j=1}^n f([U]_{jj}) = \sum_{j=1}^n f\left(\sum_{i=1}^n \omega_{ij}^2 \lambda_i\right) \leq \sum_{j=1}^n \left(\sum_{i=1}^n \omega_{ij}^2 f(\lambda_i)\right)$$

par interversion des \sum dans la dernière somme on obtient $\sum_{j=1}^n f([U]_{jj}) \leq v(f)(S)$.

Comme $\sum_{k=1}^n f([D]_{k,k}) = v(f)(S)$ alors

$$\max \left\{ \sum_{k=1}^n f([U_{k,k}]); U \in \mathcal{U}_S \right\} = v(f)(S)$$

21 ▷ Soit f est convexe sur I et $(A, B) \in \mathcal{S}_n(I)^2$, pour $t \in [0, 1]$, $(1-t)A + tB \in \mathcal{S}_n(I)$.

Soit $U = (\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ et $\Omega \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ telles que $U = {}^t\Omega ((1-t)A + tB) \Omega$. On a :

$$v(f)((1-t)A + tB) = \sum_{i=1}^n f(\lambda_i) = \sum_{k=1}^n f([U]_{k,k})$$

Or, $[U]_{k,k} = (1-t)[{}^t\Omega A\Omega]_{k,k} + t[{}^t\Omega B\Omega]_{k,k}$ et par convexité de f on a

$$v(f)((1-t)A + tB) \leq (1-t) \sum_{k=1}^n f([{}^t\Omega A\Omega]_{k,k}) + t \sum_{k=1}^n f([{}^t\Omega B\Omega]_{k,k})$$

De la question précédente on a $\sum_{k=1}^n f([{}^t\Omega A\Omega]_{k,k}) \leq v(f)(A)$ et $\sum_{k=1}^n f([{}^t\Omega B\Omega]_{k,k}) \leq v(f)(B)$.

Ainsi

$$v(f)((1-t)A + tB) \leq (1-t)v(f)(A) + tv(f)(B)$$

22 \triangleright Si f est convexe alors $v(f)$ l'est aussi d'après la question 21.

Réciproquement, supposons que $v(f)$ est convexe sur $\mathcal{S}_n(I)$. Soit $x, y \in I$ et $t \in [0, 1]$, on a

$$v(f)((1-t)xI_n + tyI_n) \leq (1-t)v(f)(xI_n) + tv(f)(yI_n)$$

les matrices qu'on a sont diagonales, ce qui donne

$$nf((1-t)x + ty) \leq n((1-t)f(x) + tf(y))$$

par suite f est convexe.