

DM n^o9

EXERCICE Soit la série entière de la variable complexe z , $\sum_{n \geq 1}^{\infty} \frac{z^n}{\sqrt{n}}$.

1. Donner le rayon de convergence de cette série entière. On note f sa somme.
2. Déterminer l'ensemble Z des complexes z pour lesquels l'application

$$u \mapsto \frac{1}{e^{u^2} - z}$$

est intégrable sur $]0, +\infty[$. Soit

$$g : Z \rightarrow \mathbf{C}; z \mapsto \frac{2z}{\sqrt{\pi}} \int_0^{+\infty} \frac{du}{e^{u^2} - z}.$$

3. Montrer que f et g coïncident sur $\{z \in \mathbf{C} \mid |z| < 1\}$.
4. Montrer que $f(e^{i\theta}) = g(e^{i\theta})$, pour tout $\theta \in]0, 2\pi[$.

PROBLÈME

FONCTION Γ

I. La fonction gamma

On va étudier la fonction Γ d'Euler, déjà rencontrée en exercice et définie, rappelons le, sur \mathbf{R}_+^* par

$$\Gamma : \mathbf{R}_+^* \rightarrow \mathbf{R}; x \mapsto \int_0^{+\infty} t^{x-1} e^{-t} dt,$$

pour tout réel strictement positif.

1. Montrer que Γ est de classe \mathcal{C}^∞ et donner l'expression de ses dérivées.
2. Montrer que pour tout réel $x \geq 0$, $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$; en déduire $\Gamma(n)$ pour tout entier $n \geq 1$.
3. Montrer que Γ est convexe.
4. Montrer que la dérivée de Γ s'annule en un et un seul point de \mathbf{R}_+^* .
5. Donner la limite en $+\infty$ et un équivalent en 0 de Γ . Tracer l'allure de la courbe représentative de Γ .
6. Soit un réel $x > 0$. Pour tout entier $n \geq 0$, l'application

$$u_n : \mathbf{R}_+^* \rightarrow \mathbf{R}; t \mapsto \begin{cases} t^{x-1} \left(1 - \frac{t}{n}\right)^{\frac{1}{n}}, & \text{si } t \leq n, \\ 0, & \text{sinon.} \end{cases}$$

Montrer que $\int_0^{+\infty} u_n(t) dt$ tend vers $\Gamma(x)$ lorsque n tend vers $+\infty$.

On considère dans la suite l'application

$$I : \mathbf{R}_+^* \rightarrow \mathbf{R}; x \mapsto \int_0^1 t^{x-1} e^{-t} dt$$

7. Montrer que pour tout réel $x > 0$,

$$I(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n!(n+x)}$$

8. Montrer que pour tout réel x qui n'est pas un entier négatif ou nul, $\sum \frac{(-1)^n}{n!(n+x)}$ converge.

9. Montrer que pour réel x , $\int_1^{+\infty} t^{x-1} e^{-t} dt$ converge.

On dispose donc du prolongement à $\mathbf{C} \setminus \mathbf{Z}_-$ de Γ suivant :

$$\tilde{\Gamma} : \mathbf{R} \setminus \mathbf{Z}_- \rightarrow \mathbf{R}; x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n!(n+x)} + \int_1^{+\infty} t^{x-1} e^{-t} dt.$$

10. Montrer que $\tilde{\Gamma}$ est indéfiniment dérivable.

III. Caractérisation de la fonction gamma par convexité de son logarithme

On se propose de donner une caractérisation de la fonction Γ due à Bohr¹ et Mollerup, plus précisément :

l'ensemble \mathcal{F} des applications f de \mathbf{R}_+^ dans \mathbf{R} strictement positives, continues, telles que*

i. $f(1) = 1$;

ii. Pour tout $x \in \mathbf{R}_+^$, $f(x+1) = xf(x)$;*

iii. l'application $\ln \circ f$ est convexe².

possède un unique élément, la fonction Γ d'Euler.

1. INÉGALITÉ D'HÖLDER

Soient p et q des réels conjugués, c'est-à-dire que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.

On rappelle l'inégalité d'Hölder vue en exercice en début d'année :

Soit n un entier naturel non nul, pour tout n -uplets $(x_i)_{i=1,\dots,n}$ et $(y_i)_{i=1,\dots,n}$ de réels positifs ou nuls, on a

$$\sum_{i=1}^n x_i y_i \leq \left(\sum_{i=1}^n x_i^p \right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{i=1}^n y_i^q \right)^{\frac{1}{q}}. \quad (1)$$

Soient f et g des éléments de $\mathcal{C}^0(\mathbf{R}_+^*, \mathbf{R})$.

(a) Soient $[a, b]$ un segment non réduit à un point inclus dans \mathbf{R}_+^* . Montrer que

$$\left| \int_a^b f(t)g(t)dt \right| \leq \left(\int_a^b |f|^p \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_a^b |g|^q \right)^{\frac{1}{q}}. \quad (2)$$

(b) On suppose que $|f|^p$ et $|g|^q$ sont intégrables sur \mathbf{R}_+^* . Montrer que fg est intégrable sur \mathbf{R}_+^* et que

$$\left| \int_0^{+\infty} f(t)g(t)dt \right| \leq \left(\int_0^{+\infty} |f|^p \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_0^{+\infty} |g|^q \right)^{\frac{1}{q}}. \quad (3)$$

(Inégalité d'Hölder.)

2. Montrer que $\Gamma \in \mathcal{F}$.

3. Soit f un élément de \mathcal{F} . Posons $g = \ln \circ f$. Montrer que pour tout élément x de $]0, 1[$ et tout entier naturel non nul n ,

$$\ln n \leq \frac{g(n+1+x) - g(n+1)}{x} \leq \ln(n+1).$$

En déduire, que pour tout élément x de $]0, 1[$ et tout entier naturel non nul n ,

$$0 \leq g(x) - \ln \left(\frac{n!n^x}{x(x+1)\dots(x+n)} \right) \leq \ln \left(1 + \frac{1}{n} \right).$$

1. Le frère!

2. Ce qui veut dire que f est très convexe.

4. En déduire que $f = \Gamma$.

5. Montrer que pour tout élément x de \mathbf{R}_+^* , $\Gamma(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{n! n^x}{x(x+1)\dots(x+n)} \right)$.

6. Retrouver le résultat de la question précédente en utilisant la question I. 6.

IV. Fonction B³

1. Montrer que la quantité $B(x, y) = \int_0^1 t^{x-1} (1-t)^{y-1} dt$ est bien définie pour tout élément x et tout élément y de \mathbf{R}_+^* .

2. Montrer que pour tout élément x et tout élément y de \mathbf{R}_+^* ,

$$B(x, y) = \frac{\Gamma(x) \Gamma(y)}{\Gamma(x+y)}.$$

On pourra utiliser la partie I.

3. Calculer $B\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$, en déduire $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)$, puis $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-s^2} ds$.

Application : Une particule est attirée vers un point fixe O, par une force inversement proportionnelle à sa distance à O. Si la particule est initialement au repos, calculer le temps qu'elle mettra à atteindre le point O.

3. Il s'agit d'un *bêta* majuscule

Solution

1. MÉTHODE 1. La série de Riemann $\sum_{n \geq 1} \frac{1^n}{\sqrt{n}}$ ne converge pas absolument donc $R \leq 1$; cette série ne diverge pas grossièrement, donc $R \geq 1$. Au total : $R = 1$.

MÉTHODE 2. La série entière est de la forme $\sum n^\alpha z^n$, le cours assure que $R = 1$.

MÉTHODE 3. les coefficient de la série entière ne s'annulent pas et $\frac{u_{n+1}}{u_n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 1$ donc

$$R = \frac{1}{1} = 1.$$

2. Soit $z \in \mathbf{C}$. L'intégrabilité de $u \mapsto \frac{1}{e^{u^2-z}}$ sur $]0, +\infty[$ exige (pour respecter le programme) que cette application soit définie et continue par morceaux sur $]0, +\infty[$. Comme l'exponentielle induit une bijection de \mathbf{R}_+^* sur $]1, +\infty[$, si $u \mapsto \frac{1}{e^{u^2-z}}$ est intégrable sur $]0, +\infty[$, alors z n'est pas élément de $]1, +\infty[$.

Supposons inversement : $z \notin]1, +\infty[$.

$u \mapsto \frac{1}{e^{u^2-z}}$ est intégrable au voisinage de $+\infty$, puisque

$$0 \leq \left| \frac{1}{e^{u^2-z}} \right| = o_{u \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{u^2} \right).$$

Si $z \neq 1$ alors $u \mapsto \frac{1}{e^{u^2-z}}$ est intégrable au voisinage de 0, puisque prolongeable par continuité en 0. Si $z = 1$ alors

$$0 \leq \left| \frac{1}{e^{u^2-1}} \right| \underset{u \rightarrow +\infty}{\sim} \left(\frac{1}{u^2} \right)$$

et donc $u \mapsto \frac{1}{e^{u^2-1}}$ est non intégrable au voisinage de 0.

Concluons : $Z = \mathbf{C} \setminus [1, +\infty[$.

3. Soit z un élément du disque ouvert unité de \mathbf{C} (qui est bien inclus dans Z , ouf !).

Posons $h :]0, +\infty[\rightarrow \mathbf{R}$; $u \mapsto \frac{z}{e^{u^2-z}}$ et pour $n \in \mathbf{N}^*$, $f_n :]0, +\infty[\rightarrow \mathbf{R}$; $u \mapsto z^n (e^{-u^2})^n$, ainsi la série $\sum_{n \geq 1} f_n$ converge simplement et a pour somme h . Notons que tant les f_n que h sont continues.

Pour tout entier $n \geq 1$, le changement de variable bijectif et \mathcal{C}^1 « $t = \sqrt{n}u$ » assure en même temps que l'intégrabilité de f_n , l'égalité :

$$\int_0^{+\infty} |f_n(u)| du = \frac{|z|^n}{\sqrt{n}} \int_0^{+\infty} e^{-t^2} dt = \frac{\sqrt{\pi} |z|^n}{2\sqrt{n}}.$$

La question 1 suffit à affirmer la convergence de $\sum_{n \geq 1} \int_{\mathbf{R}_+^*} |f_n|$.

Donc le théorème d'interversion série/intégrale dit entre autre que :

$$g(z) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \sum_{n=1}^{+\infty} \int_{\mathbf{R}_+^*} f_n = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{z^n}{\sqrt{n}} = f(z).$$

4. On peut constater que le théorème précédent ne marche plus pour z de module 1. Sans doute pourrait-on montrer le résultat par une transformation d'Abel pour la série, ou plus sûrement en appliquant, comme on le voit souvent le théorème de convergence dominée. Nous allons donner une preuve élémentaire.

Soit $\theta \in]0, 2\pi[$ et $z = e^{i\theta}$. Gardons les notations de 3, et notons pour tout $n \in \mathbf{N}^*$ S_n la somme partielle de la série $\sum_{n \geq 1} f_n$.

Pour tout $N \in \mathbf{N}^*$ et tout $u \in]0, +\infty[$, puisque $z \neq 1$, le cours de première sur les suites géométriques affirme non sans raison que $h = \sum_{n=1}^N f_n + \frac{z^{N+1}e^{-(N+1)u^2}}{1-ze^{-u^2}}$, et donc par linéarité de l'intégrale de fonctions intégrables :

$$g(z) = \sum_{n=1}^N \frac{z^n}{\sqrt{n}} + \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{+\infty} \frac{z^{N+1}e^{-(N+1)u^2}}{1-ze^{-u^2}} du.$$

Remarquons que $u \mapsto |1 - ze^{-u^2}|$ est continue et a des limites en 0 et $+\infty$ non nulles, il atteint donc son minimum, noté m qui est non nul. Pour tout $N \in \mathbf{N}^*$, on a les majorations suivantes

$$\frac{2}{\sqrt{\pi}} \left| \int_0^{+\infty} \frac{z^{N+1}e^{-(N+1)u^2}}{1-ze^{-u^2}} du \right| \leq \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{+\infty} \frac{e^{-(N+1)u^2}}{m} du \leq \frac{1}{m\sqrt{N+1}}.$$

Donc, par encadrement $\frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{+\infty} \frac{z^{N+1}e^{-(N+1)u^2}}{1-ze^{-u^2}} du$ tend vers 0 lorsque N tend vers $+\infty$, si bien que $\sum_{n=1}^N \frac{z^n}{\sqrt{n}}$ converge de somme $g(z)$.

Finalement z est dans le domaine de définition de f et $f(z) = g(z)$.

PROBLÈME

FONCTION Γ

I. La fonction gamma

On va étudier la fonction Γ d'Euler, déjà rencontrée en exercice et définie, rappelons le, sur \mathbf{R}_+^* par

$$\Gamma : \mathbf{R}_+^* \rightarrow \mathbf{R}; x \mapsto \int_0^{+\infty} t^{x-1} e^{-t} dt,$$

pour tout réel strictement positif.

1. Montrer que Γ est de classe \mathcal{C}^∞ et donner l'expression de ses dérivées.

Penser à bien mettre en valeurs les différentes hypothèses avec des items clairs.

La majoration locale est simple si l'on écrit : pour tout $x \in [a, b]$ et $t \in \mathbf{R}_+^*$,

$$\left| \frac{\partial^k f}{\partial x^k}(x, t) \right| \leq \left| \frac{\partial^k f}{\partial x^k}(a, t) \right| + \left| \frac{\partial^k f}{\partial b^k}(x, t) \right|,$$

chaque terme du second membre majore à lui seul pour $t < 1$ ou $t \geq 1$. On a vu que ce majorant est intégrable.

2. Montrer que pour tout réel $x \geq 0$, $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$; en déduire $\Gamma(n)$ pour tout entier $n \geq 1$.
3. Montrer que Γ est convexe. Si l'on veut respecter le programme la stricte positivité de γ'' exige que l'on écrive : « l'intégrande est continue positive et non nulle. »
4. Montrer que la dérivée de Γ s'annule en un et un seul point de \mathbf{R}_+^* .
5. Donner la limite en $+\infty$ et un équivalent en 0 de Γ . Tracer l'allure de la courbe représentative de Γ .

6. Soit un réel $x > 0$. Pour tout entier $n \geq 0$, l'application

$$u_n : \mathbf{R}_+^* \rightarrow \mathbf{R}; t \mapsto \begin{cases} t^{x-1} \left(1 - \frac{t}{n}\right)^{\frac{1}{n}}, & \text{si } t \leq n, \\ 0, & \text{sinon.} \end{cases}$$

Montrer que $\int_0^{+\infty} u_n(t) dt$ tend vers $\Gamma(x)$ lorsque n tend vers $+\infty$.

On doit mettre en relief la structure :

- Convergence simple
- Hypothèse de domination

La convergence simple commence par « soit $t_0 \in \mathbf{R}_+^*$.

Dans l'hypothèse de domination il faut distinguer deux cas : soit $n \in \mathbf{N}^*$ et $t \in \mathbf{R}_+^*$,

- premier cas $n \geq t$
- Second cas $n < t$

Dans les deux cas la même fonction majore.

7. Montrer que pour tout réel $x > 0$,

$$I(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n!(n+x)}$$

8. Montrer que pour tout réel x qui n'est pas un entier négatif ou nul, $\sum \frac{(-1)^n}{n!(n+x)}$ converge.

9. Montrer que pour réel x , $\int_1^{+\infty} t^{x-1} e^{-t} dt$ converge.

On dispose donc du prolongement à $\mathbf{C} \setminus \mathbf{Z}_-$ de Γ suivant :

$$\tilde{\Gamma} : \mathbf{R} \setminus \mathbf{Z}_- \rightarrow \mathbf{R}; x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n!(n+x)} + \int_1^{+\infty} t^{x-1} e^{-t} dt.$$

10. Montrer que $\tilde{\Gamma}$ est indéfiniment dérivable.

- Le caractère \mathcal{C}^∞ de

$$\mathbf{R} \setminus \mathbf{Z}_- \rightarrow \mathbf{R}; x \mapsto \int_1^{+\infty} t^{x-1} e^{-t} dt.$$

se prouve comme pour Γ en plus simple.....

- Montrons Le caractère \mathcal{C}^∞ de Γ^* , où

$$\Gamma^* : \mathbf{R} \setminus \mathbf{Z}_- \rightarrow \mathbf{R}; x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n!(n+x)}$$

On note pour tout $n \in \mathbf{N}$

$$v_n : \mathbf{R} \setminus \mathbf{Z}_- \rightarrow \mathbf{R}; x \mapsto \frac{(-1)^n}{n!(n+x)}.$$

La clef du succès dans ce genre d'exercice (domaine de définition du type $\mathbf{R} \setminus \mathbf{Z}_*$ est de raisonner sur les composantes connexes et de travailler sur une série amputée des premiers termes.

Posons $I_0 =]0, +\infty[$ et pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, $I_n =]-N, -N+1[$. Comme $\mathbf{R} \setminus \mathbf{Z}_-$ est la réunion disjointe des I_n ; pour $n \in \mathbf{N}$ et que les I_n sont ouverts il suffit de prouver le caractère \mathcal{C}^∞ de la restriction de Γ^* à chacun de ses ensembles.

Soit $N \in \mathbf{N}$. On montre le caractère \mathcal{C}^∞ de la restriction de $\sum_{n=N+1}^{+\infty} v_n$ à chacun de ses ensembles, celui de $\sum_{n=0}^N v_n$ étant immédiat (somme finie d'applications \mathcal{C}^∞).

Il convient de bien mettre en valeur les trois points à vérifier dans le théorème de la classe \mathcal{C}^k pour les séries d'application.

Détaillons le principal la convergence uniforme sur I_N de la série des dérivées d'ordre k pour tout $x \in I_N$, et tout entier $n \geq N + 1$,

$$|v_n^{(k)}| = \left| \frac{k!(-1)^{n+k}}{n!(n+x)^{k+1}} \right| = \frac{k!}{n!(x - (-n))^{k+1}} \leq \frac{k!}{n!(x - (-(N+1)))^{k+1}} \leq \frac{k!}{n!(-N - (-(N+1)))^{k+1}} = \leq \frac{k!}{n!}$$

Or la série exponentielle $k! \sum \frac{1}{n!}$ converge donc la série d'applications $\sum_{n \geq N+1} v_n^{(k)}$ converge normalement donc uniformément sur I_N ...

III. Caractérisation de la fonction gamma par convexité de son logarithme

1. INÉGALITÉ D'HÖLDER

(a) Soient $[a, b]$ un segment non réduit à un point inclus dans \mathbf{R}_+^* . Montrer que

$$\left| \int_a^b f(t)g(t)dt \right| \leq \left(\int_a^b |f|^p \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_a^b |g|^q \right)^{\frac{1}{q}}. \quad (4)$$

Il faut toujours lire et écouté l'énoncé ici celui-ci voulait que l'on déduisit l'inégalité dans le cas continue de l'inégalité discrète donnée, et non refaire le travail analogue à celui fournit pour obtenir l'inégalité discrète dans le cas continue. L'outil évalué dans cette question était l'utilisation des sommes de Riemann.

Penser à invoquer la continuité des fonctions puissances.

(b) On suppose que $|f|^p$ et $|g|^q$ sont intégrables sur \mathbf{R}_+^* . Montrer que fg est intégrable sur \mathbf{R}_+^* et que

$$\left| \int_0^{+\infty} f(t)g(t)dt \right| \leq \left(\int_0^{+\infty} |f|^p \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_0^{+\infty} |g|^q \right)^{\frac{1}{q}}. \quad (5)$$

(Inégalité d'Hölder.)

Attention l'inégalité de Young bien qu'adaptée au problème n'est pas au programme. Il suffisa it de majorer :

$$\int_a^x |f(t)g(t)|dt \leq \left(\int_a^b |f|^p \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_a^b |g|^q \right)^{\frac{1}{q}} \leq \left(\int_a^{+\infty} |f|^p \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_a^{+\infty} |g|^q \right)^{\frac{1}{q}}.$$

La primitive de $|f||g|$ étant majorée sur $[a, +\infty[$ et $|f||g|$ POSITIVE cette application est intégrable sur $[a, +\infty[$. On procède de même pour la borne 0.

2. Montrer que $\Gamma \in \mathcal{F}$.

Là encore utilisez l'énoncé qu'il faut comprendre dans sa globalité : la convexité de $\ln(\Gamma)$ ne nécessite pas le calcul de la dérivée seconde et l'étude de son signe par l'inégalité de Cauchy&Schwarz (ce qu'il aurait fallu faire en d'autres circonstances), c'est une conséquence **immédiate** de l'inégalité de Hölder avec $p = \frac{1}{\lambda}$ et $q = \frac{1}{1-\lambda}$

3. Soit f un élément de \mathcal{F} . Posons $g = \ln \circ f$. Montrer que pour tout élément x de $]0, 1[$ et tout entier naturel non nul n ,

$$\ln n \leq \frac{g(n+1+x) - g(n+1)}{x} \leq \ln(n+1).$$

En déduire, que pour tout élément x de $]0, 1[$ et tout entier naturel non nul n ,

$$0 \leq g(x) - \ln \left(\frac{n!n^x}{x(x+1)\dots(x+n)} \right) \leq \ln \left(1 + \frac{1}{n} \right).$$

Faite une figure illustrant la croissance des pentes de $\ln(f)$...

4. En déduire que $f = \Gamma$. On a l'égalité sur $]0, 1[$ par la question précédente et en 1 par hypothèse. L'équation fonctionnelle assure alors l'égalité sur \mathbf{R}_+^* par récurrence ou raisonnement direct.
5. Montrer que pour tout élément x de \mathbf{R}_+^* , $\Gamma(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{n!n^x}{x(x+1)\dots(x+n)} \right)$.

Le résultat tombe pour $x \in]0, 1[$. Le plus simple était de l'étendre par récurrence.

6. Retrouver le résultat de la question précédente en utilisant la question I. 6.

Les intégrations par parties sont ce qu'il y avait de plus rapide.

IV. Fonction B⁴

1. Montrer que la quantité $B(x, y) = \int_0^1 t^{x-1} (1-t)^{y-1} dt$ est bien définie pour tout élément x et tout élément y de \mathbf{R}_+^* .
2. Montrer que pour tout élément x et tout élément y de \mathbf{R}_+^* ,

$$B(x, y) = \frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)}.$$

On pourra utiliser la partie I.

Il suffit de poser pour $y \in \mathbf{R}_+^*$

$$f : \mathbf{R}_+^* \rightarrow \mathbf{R}; x \mapsto \frac{B(x, y)\Gamma(x+y)}{\Gamma(y)}$$

et de vérifier que $f = \gamma$ grâce à la caractérisation de Bohr. La log-convexité, là encore est une conséquence sans malice de l'inégalité de Hölder.

3. Calculer $B\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$, en déduire $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)$, puis $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-s^2} ds$.

On a grâce au changement de variable « $x = \sin^2 \theta$ » que

$$B\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) = \pi.$$

La question 2 donne $\gamma\left(\frac{1}{2}\right)$ qui fournit $\int_0^{+\infty} e^{-s^2} ds$ par le changement « $u = \sqrt{t}$ » et par parité de la gaussienne sont intégrale.

Application : Une particule est attirée vers un point fixe O , par une force inversement proportionnelle à sa distance à O . Si la particule est initialement au repos, calculer le temps qu'elle mettra à atteindre le point O .

Désignons par P la position initiale et munissons la droite (O, P) portant la trajectoire du repère (O, \vec{i}) où $\vec{i} = \frac{\vec{OP}}{\|\vec{OP}\|}$, enfin désignons par m la masse.

Notons $T \in \mathbf{R} \cup \{+\infty\}$ le temps « d'arrivé » de la particule en O , qui est encore la durée de la chute.

4. Il s'agit d'un *bêta* majuscule

Soit r la fonction coordonnée de la position de la particule dans (O, \vec{i}) au cours du temps t . Elle est régit par la loi :

$$mr'' = -\frac{k}{r}, \quad (6)$$

où k est une constante. On en déduit que pour tout $t \in]0, T[$,

$$\frac{1}{2}mr'(t)^2 + k \ln(r(t)) = k \ln(r(0)). \quad (\text{intégrale première de l'énergie}) \quad (7)$$

Comme $r'(0) = 0$, on a par (6) que $r' < 0$ sur $]0, T[$ et donc r réalise une bijection décroissante de $]0, T[$ sur $]0, r(0)[$. On notera τ la bijection réciproque qui fournit le temps de passage en une position. Alors, par changement de variable (bijectif et \mathcal{C}^1 , « $t = \tau(x)$ »,

$$T = \int_0^T dt = \int_{r(0)}^{r(T)} \tau'(x) dx = \int_{r(0)}^0 \frac{1}{r'(\tau(x))} dx.$$

Mais par (7)

$$r'(\tau(x)) = -\sqrt{\frac{2}{m} \ln\left(\frac{r(0)}{r(\tau(x))}\right)} = -\sqrt{\frac{2k}{m} \ln\left(\frac{r(0)}{x}\right)}.$$

Donc

$$T = \int_0^{r(0)} \frac{1}{\sqrt{\frac{2k}{m} \ln\left(\frac{r(0)}{x}\right)}} dx = \sqrt{\frac{m}{2k}} \int_0^{r(0)} \frac{1}{\sqrt{\ln\left(\frac{r(0)}{x}\right)}} dx.$$

Le changement de variable « $-u = \ln\left(\frac{r_0}{x}\right)$ » donne

$$\begin{aligned} T &= \sqrt{\frac{m}{2k}} \int_{+\infty}^0 \frac{-r(0) \exp(-u)}{\sqrt{u}} du = r(0) \sqrt{\frac{m}{2k}} \int_0^{+\infty} \exp(-u) u^{\frac{1}{2}-1} du \\ &= r(0) \sqrt{\frac{m}{2k}} \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = r(0) \sqrt{\frac{m\pi}{2k}}. \end{aligned}$$