Exercices d'oraux 2026

Laurent BERNIS

18 mai 2026

Oral 1

A. Soit A un sous-anneau d'un corps $\mathbf{K}$ ($\mathbf{K} = \mathbf{R}, \mathbf{C}$, etc.). Montrer qu'une matrice M élément de $\mathcal{M}_n(A)$ est inversible dans $\mathcal{M}_n(A)$ (c'est-à-dire est élément de $\mathrm{GL}_n(\mathbf{K})$ et son inverse est dans $\mathcal{M}_n(A)$) si et seulement si $\det(A)$ est un élément inversible de A.

A. bis (X, ENS). Soit N élément de $\mathrm{GL}_2(\mathbf{C})$ à coefficients entiers. On suppose qu'il existe un entier $d \geq 1$ tel que $N^d = I_2$. Montrer que $N^{12} = I_2$.

B.

1. Montrer la convergence et donner la valeur de l'intégrale suivante :

$$\int_0^1 \frac{\ln t}{1-t^2} \mathrm{d}t.$$

2. Montrer que l'application de

$$f \ : \ \mathbf{R}_+ \setminus \{1\} \to \mathbf{R} \, ; \ t \mapsto \frac{\ln t}{1-t^2}$$

   est prolongeable par continuité à $\mathbf{R}_+^*$ en une application $\tilde{f}$.

3. Montrer la convergence et donner la valeur de

$$\int_0^{+\infty} \tilde{f}(t) \mathrm{d}t.$$

Oral 2

A. Montrer que $\mathrm{SO}_n(\mathbf{R})$ est compact, et connexe par arcs.

B. Soit $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$ un espace probabilisé sur lequel seront définies les différentes variables aléatoires. On notera $\mathrm{E}(X)$ l'espérance d'une variable aléatoire X sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$ à valeurs réelles. Par ln, nous désignerons la fonction logarithme, prolongée à $\mathbf{R}_+$ par $\ln(0) = -\infty$.

Soit un entier naturel $n \geq 1$ et soient $X_1, \ldots, X_n$ des variables aléatoires réelles discrètes mutuellement indépendantes telles que, pour tout $k \in [\![1, n]\!]$,

$$\mathbf{P}(X_k = 1) = \mathbf{P}(X_k = -1) = \frac{1}{2}.$$

On définit

$$S_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} X_k,$$

ainsi que, pour tout $\lambda \in \mathbf{R}$,

$$\psi(\lambda) = \ln\left(\mathrm{ch}(\lambda)\right).$$

1. Soit Z une variable aléatoire réelle discrète telle que $\exp(\lambda Z)$ soit d'éspérance finie pour tout réel $\lambda > 0$. Montrer que pour tout réel $\lambda > 0$ et tout $t \in \mathbf{R}$,

$$\mathbf{P}(Z \geq t) \leq \exp(-\lambda t)\mathrm{E}(\exp(\lambda Z)).$$

2. Montrer que $\mathbf{P}(S_n \geq 0) \geq \frac{1}{2}$.
3. Montrer que pour tout $t \in \mathbf{R}$, on a

$$\frac{1}{n}\ln(\mathbf{P}(S_n \geq t)) \leq \inf_{\lambda \geq 0}(\psi(\lambda) - \lambda t).$$

4. Pour tout réel $\lambda \geq 0$, on pose

$$m(\lambda) = \frac{\mathrm{E}(X_1 \exp(\lambda X_1))}{\mathrm{E}(\exp(\lambda X_1))}.$$

Montrer que la fonction m est strictement croissante sur $\mathbf{R}_+$ et que, pour tout élément t de $[0, 1[$, il existe un unique réel $\lambda \geq 0$ tel que $m(\lambda) = t$.

Oral 3

A.Soit A une matrice symétrique réelle définie positive.

1. Montrer qu'il existe un élément B de $\mathcal{S}_n^{++}(\mathbf{R})$ tel que $B^2 = A$.
2. On suppose que M est un élément de $\mathrm{GL}_n(\mathbf{R})$. Montrer qu'il existe couple (O, S) élément de $\mathrm{O}_n(\mathbf{R}) \times \mathcal{S}_n^{++}(\mathbf{R})$ tel que $M = OS$.

   On admet l'unicité d'une telle décomposition.
3. On munit $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ de la norme de Frobenius définie par $\|M\|_2 = \sqrt{\mathrm{tr}(M^\top M)}$. Montrer que pour tout $Q \in \mathrm{O}_n(\mathbf{R})$,

$$\|A - O\|_2 \leq \|A - Q\|_2,$$

avec égalité si et seulement si $Q = 0$.

A bis. On muni $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ de la norme subordonnée à la norme euclidienne canonique. Montrer que l'enveloppe convexe de $\mathrm{O}_n(\mathbf{R})$ est la boulle unité.

B. Donner un équivalent lorsque x tend vers $+\infty$ de $\int_x^{+\infty} \exp(it^2)\mathrm{d}t$.

Oral 4

A. Décomposition QR

Soit un entier $n \geq 2$. L'espace vectoriel $\mathbf{R}^n$ est muni de sa structure euclidienne canonique et $\mathcal{B}_\mathrm{c} = (E_1, E_2, \ldots, E_n)$ désigne sa base canonique. Ses éléments sont notés en colonne.

1. Soit A un élément de $\mathrm{GL}_n(\mathbf{R})$. Montrer qu'il existe un élément Q de $\mathrm{O}_n(\mathbf{R})$ et un élément T de $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ triangulaire supérieure à termes diagonaux positifs tels que :

$$A = QT.$$

2. On suppose disposer d'un couple (Q', T') de matrices telles que :
   — la matrice T' soit triangulaire supérieure à coefficients diagonaux positifs ;
   — la matrice Q' soit orthogonale ;
   — l'égalité $A = Q'T'$ ait lieu.
   Montrer que $(Q, T) = (Q', T')$.

3. On note $C_1, \ldots, C_n$ les colonnes de A. À l'aide de la décomposition $A = QT$, démontrer l'inégalité suivante :
$$|\det(A)| \leq \prod_{j=1}^{n} \|C_j\|$$
Étudier le cas d'égalité.

A bis. Soit A un élément de $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$. Montrer qu'il existe un élément Q de $\mathrm{O}_n(\mathbb{R})$ et un élément T de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ triangulaire supérieure à termes diagonaux positifs tels que :
$$M = QT.$$
A-t-on unicité de cette décomposition.

B. Étudier la nature de l'intégrale $\int_0^{+\infty} \frac{\sin(\sqrt{t})}{t} \mathrm{d}t$.
B bis Étudier la nature de la série $\sum_{n \geq 1} \frac{\sin(\sqrt{n})}{n}$.

Oral 5

A. Soit l'application
$$f \ : \ \mathbf{R}_+^* \times \mathbf{R}_+^* \ ; \ (x, y) \mapsto \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + xy.$$
Soit S le graphe de f.

1. Donner l'équation du plan tangent à S en un point (a, b, c) de S.
2. Montrer que f est minorée et atteint sa borne inférieure en un et un seul point.
3. Montrer que S est fermée. Soit (x_0, y_0, z_0) un élément de $\mathbf{R}^3$. Montrer que la distance de (x_0, y_0, z_0) à S est atteinte au moins en un point.
4. On garde les notation de la question 3. Montrer que si (a, b, c) est un point de S réalisant la distance de (x_0, y_0, z_0) à S,
$$\mathrm{d}((x_0, y_0, z_0), S) = \|(x_0, y_0, z_0) - (a, b, c)\|,$$
Alors $(a - x_0, b - y_0, c - z_0)$ est normal au plan tangent à S en (a, b, c).

B. Soit $\mathbf{K}$ un corps de caractéristique nulle. Montrer que tout élément M de $\mathcal{M}_n(\mathbf{K})$ de trace nulle est semblable à une matrice à diagonale nulle.
B bis. Pour tout couple (B, C) d'éléments de $\mathcal{M}_n(\mathbf{K})$, on note $[B, C] = BC - CB$ (crochet de Lie). Montrer que toute matrice de trace nulle est un crochet de Lie.

Oral 6

A. calculer $\displaystyle\sum_{0 \leq 3k \leq n} \binom{n}{3k}$.
B. (Mines 2017)
Soient f et g des fonctions de la variables réelle x définies par :
$$f(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-xt}}{1 + t^2} \mathrm{d}t \ ; \ g(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{x + t} \mathrm{d}t.$$

1. Donner le domaine de définition de f.
2. Étudier la continuité et la dérivabilité de f.
3. Donner une équation différentielle vérifiée par f.
4. Montrer que f et g coïncident sur $\mathbf{R}_+^*$.
5. En déduire la valeur de $\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t} \mathrm{d}t$.

Oral 7

A bis. (version ÉNS) Soit $(X_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ une suite de variables aléatoires i.i.d. à valeurs dans $\mathbf{N}$, On suppose que $\mathbf{P}(X_1=0)\mathbf{P}(X_1=1)\neq 0$. On pose pour tout $n\in\mathbf{N}^*$, $S_n=X_0+X_1+...X_n$ et l'on convient que $S_0=0$.

Montrer que $\mathbf{P}(4|S_n)\underset{n\to+\infty}{\to}\frac{1}{4}$.

A. (version Centrale)

1. Pour tout réel t et tout entier $n\geq 0$, on pose $f(t)=\mathrm{E}(\exp(\mathrm{i}tX_1)$ et $F_n(t)=\mathrm{E}(\exp(\mathrm{i}tS_n)$. Donner pour toute entier $n\geq 0$, une relation entre f et F_n.
2. Pour tout $n\in\mathbf{N}$, déterminer une relation entre $\mathbf{P}(4|S_n)$ et $\sum\limits_{k=0}^{3}F_n\left(\frac{k\pi}{2}\right)$.
3. Montrer pour tout $t\in]0,2\pi[$, l'inégalité $|f(t)|<1$.
4. Montrer que $\mathbf{P}(4|S_n)\underset{n\to+\infty}{\to}\frac{1}{4}$.

B. Étudiez la nature de la série de terme général $u_n=\cos(\pi\sqrt{n^2+n+n^{2/3}})$.

Oral 8

A. Soit $P\in\mathbf{C}[X]$.

1. À quelle condition P réalise-t-il une surjection de $\mathbf{C}$ sur C ?
2. À quelle condition P réalise-t-il une surjection de $\mathbf{R}$ sur $\mathbf{R}$?

A bis. ENS À quelle condition P réalise-t-il une surjection de $\mathbf{Q}$ sur $\mathbf{Q}$. ?

B. Soit f la fonction de la variable réelle x définie par :

$$f(x)=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{x^{3n}}{(3n)!}.$$

1. Déterminer le domaine de définition de f.
2. Donner une expression de f sans recourir au signe somme en utilisant les développements en série entière de $x\mapsto\exp(j^px)$, pour $p=0,1,2$, ($j=e^{\frac{i2\pi}{3}}$).
3. Même question en montrant que f satisfait une équation différentielle.

Oral 9 A.

1.
2. Montrer qu'il existe un élément B de $\mathcal{S}_n^{++}(\mathbf{R})$ tel que $B^2=A$. Montrer que B est un polynôme en A.
3. On suppose que M est un élément de $\mathrm{GL}_n(\mathbf{R})$. Montrer qu'il existe un et un seul couple (O,S) élément de $\mathrm{O}_n(\mathbf{R})\times\mathcal{S}_n^{++}(\mathbf{R})$ tel que $M=OS$.

B.

Les éléments de $\mathbf{R}^2$ seront notés en colonne. Soit f une application de $\mathbf{R}^2$ dans $\mathbf{R}$ de classe $\mathcal{C}^2$. Pour tout élément X de $\mathbf{R}^2$ on note $H_f(X)$ la matrice hessienne de f en X.

1. Montrer que pour tout $X\in\mathbf{R}^2$,

$$f(X)=f(0_{\mathbf{R}^2})+\nabla f(0_{\mathbf{R}^2})^\top X+\int_0^1(1-t)X^\top H_f(tX)X\mathrm{d}t.$$

On suppose que la matrice hessienne de f est en tout point de $\mathbf{R}^2$ égale à $H_f(0_{\mathbf{R}^2})$. Donner la forme de f.

2. On munit $\mathbf{R}^3$ de sa structure euclidienne canonique. On désigne par G le graphe de f :

$$G = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbf{R}^3 \middle| z = f \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \right\}.$$

On suppose que la matrice hessienne de f en tout point de $\mathbf{R}^2$ est égale à $H_f(0_{\mathbf{R}^2})$ et que $H_f(0_{\mathbf{R}^2})$ est positive. Montrer que le graphe G de f est inclus dans un des demi-espaces fermés délimités par le plan tangent en $\begin{pmatrix} 0_{\mathbf{R}^2} \\ f(0_{\mathbf{R}^2}) \end{pmatrix}$ à G.

Que peut-on dire si $H_f(0_{\mathbf{R}^2})$ est définie-positive ?

Oral 10

Exercice 10 bis — Décomposition en valeurs singulière —

A. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R})$. Posons $B = {}^{\mathrm{t}}AA$ et notons a et b les endomorphismes de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{R})$ canoniquement associés respectivement à a et b. On munit $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{R})$ de sastructure euclidienne canonique.

1. Montrer que $\mathrm{Ker}(b) = \mathrm{Ker}(a)$ et que les valeurs propres de b sont positives ou nulles. On notera r le rang de b, donc aussi celui de a.
2. Montrer qu'il existe une famille $(E_1, ..., E_r)$ orthonormée, telles que pour $i = 1, ..., r$, E_i soit un vecteur propre de b associés à une valeur propre non nulle μ_i.
3. On note pour $i = 1, ..., r$, $F_i = \frac{1}{\sqrt{\mu_i}} a(E_i)$. Montrer que $(F_1, ..., F_r)$ est une base orthonormée de $\mathrm{Im}(a)$. item Montrer qu'il existe des matrices orthogonales P et Q et une matrice diagonale D à coefficients positifs ou nuls telles que :

$$A = PDQ.$$

4. Soit M un élément de $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$.

   Montrer qu'il existe un couple $(0, S)$ élément de $\mathrm{O}_n(\mathbf{R}) \times \mathcal{S}_n^+(\mathbf{R})$ tel que : $M = OS$. Ce couple est-il unique.

A. bis

Déduire du A que en munissant $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ de la norme subordonnée à la norme euclidienne canonique, l'enveloppe convexe de $\mathrm{O}_n(\mathbf{R})$ est la boulle unité.

B. Montrer que l'adhérence d'un convexe d'un e.v.n. est convexe.