1. Intégrale de Riemann

Exercices d'application :

1. Calculer pour $a > 1$ l'intégrale $\displaystyle\int_0^\pi \frac{\mathrm{d}t}{a - \cos t}$.
2. Calculer les limites des suites suivantes :

$$\sum_{k=0}^{n-1} \frac{n}{n^2 + k^2}; \qquad \frac{1}{n^3}\sum_{k=0}^{n-1} k^2 \sin\frac{k\pi}{n}; \qquad \prod_{k=1}^{n}\left(1 + \frac{k^2}{n^2}\right)^{\frac{1}{n}}.$$

Exercice 1 * : Soit f continue par morceaux sur $[0,1]$ et continue en 1. Calculer

$$\lim_{n\to+\infty} n\int_0^1 x^n f(x)dx.$$

Et si f n'est pas continue en 1 ?

Exercice 2 [π est irrationnel] : Soient a et b deux entiers strictement positifs. On considère pour tout entier n le polynôme $P_n = \dfrac{1}{n!}X^n(bX - a)^n$.

1. Prouver que la suite de terme général $I_n = \displaystyle\int_0^\pi P_n(x)\sin x\,dx$ converge vers 0.
2. Prouver que P_n et toutes ses dérivées prennent des valeurs entières en 0 et $\dfrac{a}{b}$.
3. Si l'on suppose π rationnel et valant $\dfrac{a}{b}$, prouver que I_n est un entier non-nul. En déduire que π est irrationnel.

Exercice 3 * :

1. Soit u_n une suite strictement positive. Montrer que si $u_{n+1}/u_n \to l \in \mathbb{R}^+ \cup \{+\infty\}$, alors $\sqrt[n]{u_n}$ converge aussi vers l.
2. Soient $a < b$ deux réels, $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$ deux fonctions continues strictement positives. On pose $u_n = \displaystyle\int_a^b f(t)^n g(t)\mathrm{d}t$ et $v_n = \dfrac{u_{n+1}}{u_n}$. Étudier la monotonie et la convergence de (v_n). Déterminer sa limite.

Exercice 4 * : Soit $F(x) = \displaystyle\int_x^{x^2} \frac{\mathrm{d}t}{\ln t}$ pour $x \in]0,1[\cup]1,+\infty[$.

1. Montrer que F se prolonge par continuité en 0 et en 1.
2. Montrer que F est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbf{R}^+$.
3. Montrer que F est convexe et tracer sa courbe représentative.
4. Donner un développement limité à l'ordre 3 en 1 de F.

Exercice 5 * : Soient $b > a > 0$ et $f(x) = \displaystyle\int_{ax}^{bx} \frac{1 - \cos u}{u^3}du$. Déterminer $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} f(x)$.

2. Intégrales généralisées

Exercices d'application :

1. Soit $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ une fonction continue. Déterminer $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\int_0^1 f(t^n)dt$.
2. Soit $f_1, f_2, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continues telles que $f_1 \leqslant g \leqslant f_2$ et $\displaystyle\int_{\mathbb{R}} f_1$, $\displaystyle\int_{\mathbb{R}} f_2$ convergent. Peut-on affirmer que $\displaystyle\int_{\mathbb{R}} g$ converge ?
3. Déterminer les fonctions périodiques intégrables (resp d'intégrale convergente) sur $\mathbb{R}$.
4. Donner un exemple de fonction $f : [0,+\infty[\to \mathbb{R}^+$ dominée par $t \mapsto 1/t^2$ en $+\infty$ mais non-intégrable.
5. Donner un exemple de fonction f continue sur $\mathbb{R}$ intégrable et telle que f^2 n'est pas intégrable. (Commencer par une fonction continue par morceaux.)
6. Déterminer les fractions rationnelles de $\mathbb{R}(X)$ intégrables sur $\mathbb{R}$.
7. Étudier l'intégrabilité des fonctions suivantes sur l'intervalle indiqué.
   (a) $\dfrac{e^{\sin t}}{t}$ sur $]1,+\infty[$;
   (b) $\dfrac{1}{1 - \sqrt{t}}$ sur $]0,1[$;
   (c) $\ln\tanh x$ sur $]0,+\infty[$;
   (d) $\sqrt{\tan x}$ sur $[0,\pi/2[$;
   (e) $t^\alpha|\ln t|^\beta$ sur $]0,1[$ $(\alpha,\beta \in \mathbb{R})$;
   (f) $e^{-(\ln t)^\alpha}$ sur $[0,+\infty[$ où $\alpha \in \mathbb{R}$;
   (g) $\sqrt{x + \cos x} - \sqrt{x}$ sur $]0,+\infty[$;
   (h) $\sin(\sin x)$ sur $]0,+\infty[$.
8. Calculer les intégrales suivantes après avoir montrer l'intégrabilité :
   (a) $\displaystyle\int_a^b \frac{1}{\sqrt{(b-t)(t-a)}}\mathrm{d}t$ où $a < b$ sont des réels ;

(b) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t^4+1}\mathrm{d}t$;

(c) $\displaystyle\int_0^1 \left(\frac{1}{t} - E\left(\frac{1}{t}\right)\right)\mathrm{d}t$;

(d) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{(1+t^2)^2}$.

(e) $\displaystyle\int_0^{+\infty} t^n e^{-t}\sin t\ \mathrm{d}t\ (n\in\mathbb{N})$.

9. Montrer que $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin^2 t}{t^2}\mathrm{d}t = \int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\sin t}{t}\mathrm{d}t$.

10. Soit $n\in\mathbb{N}^*$ et $f_n : [0,1]\to\mathbb{R}$ affine par morceaux et vérifiant $f_n(0) = 0 = f_n(1/n) = f_n(1)$ et $f_n(1/2n) = n^2$. Montrer que la fonction définie sur $[0,1]$ par $t\mapsto \sup\limits_{n\in\mathbb{N}} f_n(t)$ est continue. Est-elle intégrable ?

Exercice 6 –Mines 2017 : Donner un équivalent en $+\infty$ de $\displaystyle\int_2^x \frac{e^{\sqrt{\ln t}}}{t\ln t}\mathrm{d}t$.

Exercice 7 : Donner un équivalent simple de $I_n = \displaystyle\int_1^{+\infty} e^{-x^n}\mathrm{d}x$.

Exercice 8 – Mines 2010 : Soit $f : a\mapsto \displaystyle\int_0^1 \frac{t-1}{\ln t}t^a\mathrm{d}t$.

1. Déterminer le domaine de définition de f. Étudier sa continuité et sa dérivabilité.
2. Donner une expression simple de $f(a)$.

Exercice 9 – Mines 2010 : Soit $F : \mathbb{R}^{+*}\to\mathbb{R}$ définie par $F(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{e^{-t}}{t+x}\mathrm{d}t$. Déterminer la limite et un équivalent de F en 0^+ et en $+\infty$.

Exercice 10 * : Déterminer $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\int_0^{+\infty}\frac{\sin t}{t+x}\mathrm{d}t$.

Exercice 11 * : Donner un équivalent en $+\infty$ de $x\mapsto \displaystyle\int_0^x \left|\frac{\sin t}{t}\right|\mathrm{d}t$.

Exercice 12 **– Mines 2010 : Soit $g\in\mathcal{C}(\mathbb{R}^+,\mathbb{R})$. On suppose que l'intégrale impropre $\displaystyle\int_0^{+\infty} g$ converge et vaut l. Montrer que $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-xt}g(t)\mathrm{d}t$ tend vers l lorsque x tend vers 0^+.

Exercice 13 *– Intégrale de Dirichlet :

Étudier la dérivabilité de $F : x\mapsto \displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-xt}\frac{\sin t}{t}\mathrm{d}t$ sur $]0,+\infty[$. En déduire la valeur de $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\sin t}{t}\mathrm{d}t$.

Exercice 14 * : Pour $n\in\mathbb{N}^*$, on pose $I_n = \displaystyle\int_0^n \left(1-\frac{t}{n}\right)^n \ln t\ \mathrm{d}t$. Montrer que la suite (I_n) converge vers $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t}\ln t\ \mathrm{d}t$. En déduire $\Gamma'(1)$ en fonction de γ puis $\Gamma'(n+1)$ où $n\in\mathbb{N}^*$.

Exercice 15 * – Comparaison série-intégrale :

1. Étudier la convergence de la série de terme général $\dfrac{\sin n^\alpha}{n}$ où $0<\alpha<1$.
2. Soit $z\in\mathbb{C}$. Étudier la convergence de $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1}\frac{1}{n^z}$.

Exercice 16 : Soient $a<b$ deux nombres réels. On pose $I = \displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{e^{-ax}-e^{-bx}}{x}\mathrm{d}x$.

1. Justifier l'existence de I.
2. Soit $\varepsilon>0$. Montrer que $\displaystyle\int_\varepsilon^{+\infty}\frac{e^{-ax}-e^{-bx}}{x}\mathrm{d}x = \int_{a\varepsilon}^{b\varepsilon}\frac{e^{-x}}{x}\mathrm{d}x$.
3. Montrer que $e^{-b\varepsilon}\ln\dfrac{b}{a}\leqslant \displaystyle\int_{a\varepsilon}^{b\varepsilon}\frac{e^{-x}}{x}\mathrm{d}x\leqslant e^{-a\varepsilon}\ln\frac{b}{a}$. En déduire la valeur de I.

Exercice 17 *– Mines 2017 : Déterminer l'ensemble de définition de $f : x\mapsto \displaystyle\int_0^{\pi/2}\ln(1+x\cos^2\theta)d\theta$. Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]-1,+\infty[$ et calculer f'. En déduire f.

Exercice 18 – Mines 2010 :

1. Soit $\alpha>0$. Calculer $\displaystyle\int_0^\pi \frac{1}{1+\alpha^2\sin^2 t}\mathrm{d}t$.
2. Discuter en fonction de $\alpha\in\mathbb{R}$ l'intégrabilité sur $\mathbb{R}^{+*}$ de $t\mapsto \dfrac{1}{1+t^\alpha\sin^2 t}$.

Exercice 19 *– Centrale 2017 : Montrer que $\displaystyle\int_0^{\pi/2}\ln(\sin t)dt = \int_0^{\pi/2}\ln(\cos t)dt$. En déduire leur valeur commune.

Exercice 20 * : Montrer que la fonction $\ln \circ \Gamma$ est convexe.

Exercice 21 – Centrale 2010 : Soit $G : x \mapsto \displaystyle\int_0^x \frac{\mathrm{d}t}{\ln t}$.

1. Déterminer le domaine de définition de G.
2. Montrer que G est continue puis de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0,1[$.
3. Montrer que G est bijective sur un intervalle à déterminer.
4. Montrer que sa réciproque est continue et de classe $\mathcal{C}^1$.
5. Soit $x \in]0,1[$.
   (a) Trouver une condition nécessaire et suffisante sur x pour qu'il existe $f(x)$ tel que $\displaystyle\int_x^{f(x)} \frac{\mathrm{d}t}{\ln t} = 1$.
   (b) Domaine de définition de f ? Limites aux bornes ?
   (c) Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur ce domaine. Est-elle prolongeable par continuité en 1 ? Dérivable en 1 ?
6. Reprendre la question 5 pour $x > 1$.

Exercice 22 ** : Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue par morceaux et intégrable. On pose $g(x) = \displaystyle\int_{\mathbb{R}} |f(x+t) - f(t)|\mathrm{d}t$.

1. Montrer que g est bien définie.
2. Montrer que si g est continue en 0, elle est continue sur $\mathbb{R}$.
3. On suppose que f est nulle en dehors d'un segment. Montrer que g est continue.
4. Soit $\varepsilon > 0$. Montrer qu'il existe $A > 0$ et une fonction φ continue par morceaux nulle en dehors de $[-A, A]$ telle que $\displaystyle\int_{\mathbb{R}} |f - \varphi| \leqslant \varepsilon$. Montrer que g est continue en 0, puis sur $\mathbb{R}$.
5. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ intégrable et continue. Déterminer

$$\lim_{a \to +\infty} \int_{\mathbb{R}} |f(t+a) - f(t)|\mathrm{d}t.$$

Travaux dirigés 1 –

1. Soit $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ intégrable. Montrer que si f est uniformément continue, alors $\lim\limits_{+\infty} f = 0$. Montrer que si f est seulement continue, f peut ne pas converger vers 0 en $+\infty$.
2. Soit $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$ telle que f^2 et f'^2 sont intégrables. Montrer que $(f^2)'$ est intégrable et en déduire que $\lim\limits_{+\infty} f = 0$.
3. Soit $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$ telle que f et f'^2 sont intégrables. Étudier les limites en $\pm\infty$ de f.
4. Soit $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^2$ telle que f et f''^2 sont intégrables. Montrer que f' tend vers 0 en $+\infty$, puis montrer que f tend vers 0 en $+\infty$.
5. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^2$ avec f et f'' de carré intégrable. Montrer que f' est de carré intégrable et que

$$\left(\int_{\mathbb{R}} f'^2\right)^2 \leqslant \left(\int_{\mathbb{R}} f^2\right)\left(\int_{\mathbb{R}} f''^2\right),$$

puis que f est uniformément continue sur $\mathbb{R}$ et de limite nulle en $\pm\infty$.

Travaux dirigés 2 – Intégrales de Fresnel

On définit $F : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ par $F(t) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{-(x^2+i)t^2}}{x^2+i}\mathrm{d}x$.

1. Étudier du point de vue de l'intégrabilité et de la convergence

$$\int_0^{+\infty} \cos t^2 \mathrm{d}t \quad \text{et} \quad \int_0^{+\infty} \sin t^2 \mathrm{d}t.$$

2. Montrer que $\displaystyle\int_{\mathbb{R}} \frac{\mathrm{d}x}{1+x^4} = \int_{\mathbb{R}} \frac{x^2\mathrm{d}x}{1+x^4} = \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}} \frac{x^2+1}{1+x^4}\mathrm{d}x$ et calculer leur valeur commune. (On pourra se ramener à $]0,+\infty[$ et poser $u = x - 1/x$.)
3. Montrer que F est continue et déterminer sa limite en $+\infty$.
4. Montrer que F est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0,+\infty[$ et calculer $F'(t)$.
5. Déterminer la valeur de $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{it^2}\mathrm{d}t$.
6. Déterminer un équivalent de $\displaystyle\int_x^{+\infty} e^{it^2}\mathrm{d}t$ en $+\infty$.

Indications

Exercice 1. Une méthode naturelle est d'écrire $f(x) = f(x) - f(1) + f(1)$ et de couper l'intégrale en deux. Une méthode plus rapide consiste à effectuer un changement de variable.

Exercice 3. L'inégalité $u_n^2 \leqslant u_{n+1}u_{n+2}$ se ramène à une inégalité classique. Pour la limite, on pourra montrer que pour une suite $a_n > 0$, $\dfrac{a_{n+1}}{a_n} \to l$ implique $\sqrt[n]{a_n} \to a_n$.

Exercice 4. Le plus simple est de remarquer que $\dfrac{1}{\ln t} = \dfrac{t}{t\ln t}$, puis que $\dfrac{1}{t\ln t}$ admet une primitive explicite.

Exercice 5. Remplacer $\dfrac{1-\cos u}{u^3}$ par un équivalent simple.

Exercice 6. Par changement de variable, on se ramène à $\displaystyle\int \frac{e^u}{u}$ et on conclut par IPP.

Exercice 7. Poser $u = x^n$ et utiliser le théorème de convergence dominée.

Exercice 9. Pour les équivalents, poser $u = x + t$.

Exercice 10. Changement de variable : la convergence dominée ne s'applique pas ici.

Exercice 11. Se ramener à une intégrale sur $[0, \pi]$.

Exercice 12. Commencer par une intégration par parties pour faire apparaître la primitive de G s'annulant en 0, puis faire suivre un changement de variable et le théorème de convergence dominée.

Exercice 13. Dériver sous le signe somme donne une expression simple de f sur $]0, +\infty[$. Reste à fixer une constante, puis à étudier la continuité en 0 (voir 12).

Exercice 14. La limite de (I_n) ne pose pas de problème par convergence dominée. Ensuite, se ramener à $\displaystyle\int_0^1 u^n \ln(1-u)$ et remarquer que $\dfrac{1}{n+1}(u^{n+1} - 1)$ est une primitive de u^n.

Exercice 15. Appliquer la méthode du cours.

Exercice 19. Faire apparaitre $\cos t \sin t = \dfrac{1}{2}\sin(2t)$ et exprimer $\displaystyle\int_0^\pi \ln(\sin t)dt$ en fonction de $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \ln(\sin t)dt$.

Exercice 20. La fonction Γ est de classe $\mathcal{C}^2$.

Exercice 22. 5. L'aire sous la courbe est concentrée entre $-A$ et A à ε près fixé. Pour a assez grand, les seules contributions non négligeables proviennent de deux segments disjoints.

Exercice 1. (TD)

1. Raisonner par l'absurde : il existe alors une suite de points assez espacés et s'approchant de $+\infty$ d'image $> \varepsilon$. Au voisinage de ces points, on a une contribution uniforme à l'aire totale.
2. Utiliser l'inégalité de Cauchy-Schwarz.
3. Montrer d'abord que f est uniformément continue puis utiliser la question 1.
4. Commencer par établir l'uniforme continuité de f'. Puis raisonner par l'absurde comme dans la question 1 : on aura $f' \geqslant \varepsilon/2$ sur $[x_n - \eta, x_n + \eta]$ et on peut minorer $\displaystyle\int_{x_n-\eta}^{x_n+\eta} |f|$ par une constante indépendante de n.
5. Commencer par une intégration par parties.