I. Préliminaires

I.A - *Projection sur un convexe fermé*

Q 1. On a $\|a+b\|^2 = \langle a+b, a+b\rangle = \langle a,a\rangle + \langle a,b\rangle + \langle b,a\rangle + \langle b,b\rangle$
donc $\|a+b\|^2 = \|a\|^2 + \|b\|^2 + 2\langle a,b\rangle$ et de même $\|a-b\|^2 = \|a\|^2 + \|b\|^2 - 2\langle a,b\rangle$
Par somme, on a $\boxed{\text{l'identité du parallélogramme : } \|a+b\|^2 + \|a-b\|^2 = 2(\|a\|^2 + \|b\|^2)}$
Géométriquement, dans un parallélogramme (ABCD) (i.e. $\overrightarrow{\mathrm{AB}} = \overrightarrow{\mathrm{DC}}$), on a

$$\mathrm{AB}^2 + \mathrm{BC}^2 + \mathrm{CD}^2 + \mathrm{DA}^2 = \mathrm{AC}^2 + \mathrm{BD}^2$$

Q 2. On suppose que u, v et v' dans E vérifient $v \neq v'$ et $\|u-v\| = \|u-v'\|$.
On a $2\left\|u - \dfrac{v+v'}{2}\right\| = \|u-v+u-v'\|$
En appliquant la question précédente on a $\|(u-v)+(u-v')\|^2 + \|v'-v\|^2 = 2\left(\|u-v\|^2 + \|u-v'\|^2\right) = 4\|u-v\|^2$
Comme $v \neq v'$, on a $\|v'-v\|^2 > 0$
donc $\|(u-v)+(u-v')\| < 2\|u-v\|$ car $\sqrt{\cdot}$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}^+$
En divisant par 2, on a alors $\boxed{\left\|u - \dfrac{v+v'}{2}\right\| < \|u-v\|}$

Q 3. Comme $\mathrm{F} \neq \emptyset$, prenons $y \in \mathrm{F}$ et considérons $\mathrm{K} = \mathrm{F} \bigcap \mathrm{B}(u, \|u-y\|)$ où $\mathrm{B}(u, \|u-y\|)$ désigne la boule fermée de centre u est de rayon $\|u-y\|$.
K est un fermé de E par intersection, non vide car $y \in \mathrm{K}$ et borné car $\mathrm{K} \subset \mathrm{B}(u, \|u-y\|)$
De plus E est dimension finie car euclidien donc K est un compact.
De plus l'application $x \longmapsto \|u-x\|$ est continue sur K
ainsi par le théorème des bornes atteintes, cette application y admet un minimum en un certain $v \in \mathrm{K}$
On a donc $\forall x \in \mathrm{K},\ \|u-v\| \leqslant \|u-x\| \leqslant \|u-y\|$ car $\mathrm{K} \subset \mathrm{B}(u, \|u-y\|)$
De plus $(\mathrm{F} \setminus \mathrm{K}) \subset (\mathrm{E} \setminus \mathrm{B}(u, \|u-y\|))$ et donc $\forall x \in \mathrm{F} \setminus \mathrm{K},\ \|u-v\| \leqslant \|u-y\| \leqslant \|u-x\|$
On a bien $\boxed{\text{l'existence de } v \text{ dans F tel que } \forall w \in \mathrm{F},\ \|u-v\| \leqslant \|u-w\|}$

Q 4. On suppose que C est un convexe fermé non vide de E et u est un vecteur de E.
L'existence voulue est établie en **Q3**.
Par l'absurde s'il existait $v \neq v'$ dans C tels que $\forall w \in \mathrm{C},\ \|u-v\| \leqslant \|u-w\|$ et $\forall w \in \mathrm{C},\ \|u-v'\| \leqslant \|u-w\|$
On aurait alors $\|u-v\| = \|u-v'\|$, et on pourrait appliquer **Q2**,
ainsi $\left\|u - \dfrac{v+v'}{2}\right\| < \|u-v\|$ or $\dfrac{v+v'}{2} \in \mathrm{C}$ car C est convexe
ceci est en contradiction avec $\forall w \in \mathrm{C},\ \|u-v\| \leqslant \|u-w\|$
On a établi $\boxed{\text{qu'il existe un unique } v \text{ dans C tel que } \forall w \in \mathrm{C},\ \|u-v\| \leqslant \|u-w\|}$

I.B - Inégalité de Hölder pour l'espérance

Visiblement, on suppose que pour $\alpha > 0$, la fonction $x \mapsto x^\alpha$ est définie au moins sur $\mathbb{R}^+$ et s'annule en 0

Q 5. Soit deux réels positifs a et b.
Si a ou b est nul alors $ab = 0 \leqslant \frac{a^p}{p} + \frac{a^q}{q}$.
Sinon, on a $\frac{1}{p} \in [0,1]$ et par concavité du logarithme sur $]0,+\infty[$, on a :

$$\frac{1}{p}\ln(a^p) + \left(1 - \frac{1}{p}\right)\ln(b^q) \leqslant \ln\left(\frac{1}{p}a^p + \left(1 - \frac{1}{p}\right)b^q\right)$$

d'où $\ln(a \times b) \leqslant \ln\left(\frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}\right)$

Comme exp est croissante, on peut conclure que dans tous les cas : $\boxed{ab \leqslant \dfrac{a^p}{p} + \dfrac{a^q}{q}}$

Q 6. *On remarque que comme l'univers est fini, les variables aléatoires admettent des moments à tout ordre.*
Par positivité de l'espérance, on a : $\mathbb{E}(|\mathrm{X}|^p) \geqslant 0$ et $\mathbb{E}(|\mathrm{Y}|^q) \geqslant 0$

Premier cas : On suppose que $\mathbb{E}(|\mathrm{X}|^p) = \mathbb{E}(|\mathrm{Y}|^q) = 1$.

Pour tout $\omega \in \Omega$, on a $|\mathrm{X}(\omega)\mathrm{Y}(\omega)| \leqslant \frac{|\mathrm{X}(\omega)|^p}{p} + \frac{|\mathrm{Y}(\omega)|^q}{q}$ d'après la question précédente

donc $|\mathrm{XY}| \leqslant \frac{1}{p}|\mathrm{X}|^p + \frac{1}{q}|\mathrm{Y}|^q$

d'où $\mathbb{E}\left(|\mathrm{XY}|\right) \leqslant \frac{1}{p}\mathbb{E}\left(|\mathrm{X}|^p\right) + \frac{1}{q}\mathbb{E}\left(|\mathrm{Y}|^q\right)$ par croissance et linéarité de l'espérance

donc $\mathbb{E}\left(|\mathrm{XY}|\right) \leqslant \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1 = \mathbb{E}(|\mathrm{X}|^p)\mathbb{E}(|\mathrm{Y}|^q)$

Deuxième cas : On suppose que $\mathbb{E}(|\mathrm{X}|^p) > 0$ et $\mathbb{E}(|\mathrm{Y}|^q) > 0$

Je note $\lambda = \mathbb{E}(|\mathrm{X}|^p), \mathrm{X}' = \frac{1}{\lambda^{1/p}}\mathrm{X}$, $\mu = \mathbb{E}(|\mathrm{Y}|^p)$ et $\mathrm{Y}' = \frac{1}{\mu^{1/q}}\mathrm{Y}$

Ainsi on a $\mathbb{E}(|\mathrm{X}'|^p) = \mathbb{E}(|\mathrm{Y}'|^q) = 1$ et on peut appliquer le premier cas à X' et Y'

donc
$$\mathbb{E}\left(|\mathrm{X}'\mathrm{Y}'|\right) \leqslant \mathbb{E}(|\mathrm{X}'|^p)\mathbb{E}(|\mathrm{Y}'|^q) \text{ et ainsi } \mathbb{E}\left(\left|\frac{\mathrm{XY}}{\lambda^{1/p}\mu^{1/q}}\right|\right) \leqslant 1$$

ce qui donne $\mathbb{E}\left(|\mathrm{XY}|\right) \leqslant \lambda^{1/p}\mu^{1/q} = \mathbb{E}\left(|\mathrm{X}|^p\right)^{1/p}\mathbb{E}\left(|\mathrm{Y}|^q\right)^{1/q}$

Troisième cas : On suppose que $\mathbb{E}(|\mathrm{X}|^p) = 0$ ou $\mathbb{E}(|\mathrm{Y}|^q) = 0$.

Sans perte de généralité, traitons le cas $\mathbb{E}(|\mathrm{X}|^p) = 0$.

Alors $\displaystyle\sum_{x \in \mathrm{X}(\Omega)} |x|^p \mathbb{P}(\mathrm{X} = x) = 0$ selon la formule du transfert

Comme il s'agit d'une somme finie de réels positifs, on a $\forall x \in \mathrm{X}(\Omega) \setminus \{0\},\ \mathbb{P}(\mathrm{X} = x) = 0$

donc X est nulle presque sûrement donc il en est de même pour XY et aussi pour $|\mathrm{XY}|$

d'où $\mathbb{E}(|\mathrm{XY}|) = 0 = \mathbb{E}\left(|\mathrm{X}|^p\right)^{1/p}\mathbb{E}\left(|\mathrm{Y}|^q\right)^{1/q}$

$\mathbb{E}(|\mathrm{XY}|) \leqslant \mathbb{E}\left(|\mathrm{X}|^p\right)^{1/p}\mathbb{E}\left(|\mathrm{Y}|^q\right)^{1/q}$

Conclusion : Dans tous les cas, on a $\boxed{\mathbb{E}(|\mathrm{XY}|) \leqslant \mathbb{E}\left(|\mathrm{X}|^p\right)^{1/p}\mathbb{E}\left(|\mathrm{Y}|^q\right)^{1/q}}$

I.C - Espérance conditionnelle

Q 7. On a $\mathbb{E}(\mathrm{X}) = \displaystyle\sum_{x \in \mathrm{X}(\Omega)} x \cdot \mathbb{P}(\mathrm{X} = x)$ or selon la formule des probabilités totales avec $(\mathrm{A}_1, \ldots, \mathrm{A}_m)$ un système complet d'événements de probabilités non nulles, on a $\forall x \in \mathrm{X}(\Omega)$, $\mathbb{P}(\mathrm{X} = x) = \displaystyle\sum_{i=1}^{m} \mathbb{P}_{\mathrm{A}_i}(\mathrm{X} = x) \cdot \mathbb{P}(\mathrm{A}_i)$

donc $\mathbb{E}(\mathrm{X}) = \displaystyle\sum_{x \in \mathrm{X}(\Omega)} \sum_{i=1}^{m} x \cdot \mathbb{P}_{\mathrm{A}_i}(\mathrm{X} = x) \cdot \mathbb{P}(\mathrm{A}_i) = \sum_{i=1}^{m} \mathbb{P}(\mathrm{A}_i) \cdot \sum_{x \in \mathrm{X}(\Omega)} x \cdot \mathbb{P}_{\mathrm{A}_i}(\mathrm{X} = x)$ (sommes finies)

ce qui permet de conclure : $\boxed{\mathbb{E}(\mathrm{X}) = \displaystyle\sum_{i=1}^{m} \mathbb{P}(\mathrm{A}_i) \cdot \mathbb{E}(\mathrm{X}|\mathrm{A}_i)}$

I.D - Variables aléatoires à queue sous-gaussienne

Q 8. Comme indiqué, je note $X^2(\Omega) = \{y_1, \ldots, y_n\}$ où $n > 0$ et $0 \leqslant y_1 < y_2 < \cdots < y_n$. Je note également $y_0 = 0$.

On remarque que : $\mathbb{R}^+ = \{0\} \bigcup \left(\bigcup_{i=0}^{n-1}]\sqrt{y_i}, \sqrt{y_{i+1}}] \right) \bigcup]\sqrt{y_n}, +\infty[$ (union disjointe)

Soit $t \geqslant 0$.
Pour $i \in [\![0, n-1]\!]$, si $t \in \left]\sqrt{y_i}, \sqrt{y_{i+1}}\right]$, on a $y_i < t^2 \leqslant y_{i+1}$ car $x \mapsto x^2$ est croissante sur $\mathbb{R}^+$
donc $(|X| \geqslant t) = (X^2 \geqslant t^2) = (X^2 \geqslant y_{i+1})$ ainsi $\mathbb{P}(|X| \geqslant t) = \mathbb{P}(X^2 \geqslant y_{i+1})$
donc la fonction $t \longmapsto \mathbb{P}(|X| \geqslant t)$ est constante sur $\left]\sqrt{y_i}, \sqrt{y_{i+1}}\right]$
de même la fonction $t \longmapsto \mathbb{P}(|X| \geqslant t)$ est constante égale à 0 sur $\left]\sqrt{y_n}, +\infty\right[$,
donc la fonction $t \longmapsto \mathbb{P}(|X| \geqslant t)$ est continue par morceaux sur $\mathbb{R}^+$
et par produit la fonction $t \longmapsto t\mathbb{P}(|X| \geqslant t)$ est continue par morceaux sur $\mathbb{R}^+$
de plus $t \longmapsto 0$ est intégrable sur $\left[\sqrt{y_n}, +\infty\right[$ donc
ainsi $t \longmapsto t\mathbb{P}(|X| \geqslant t)$ est intégrable sur $\left[\sqrt{y_n}, +\infty\right[$ et donc sur $\mathbb{R}^+$
On a d'après Chasles :

$$2\int_0^{+\infty} t\mathbb{P}(|X| \geqslant t)\,\mathrm{d}t = 2\left(\sum_{i=0}^{n-1} \int_{\sqrt{y_i}}^{\sqrt{y_{i+1}}} t\mathbb{P}(|X| \geqslant t)\,\mathrm{d}t\right) + 2\int_{\sqrt{y_n}}^{+\infty} t\mathbb{P}(|X| \geqslant t)\,\mathrm{d}t = \sum_{i=0}^{n-1} 2\int_{\sqrt{y_i}}^{\sqrt{y_{i+1}}} t\mathbb{P}\left(X^2 \geqslant y_{i+1}\right)\,\mathrm{d}t$$

Pour $i \in [\![0, n-1]\!]$, on a $2\displaystyle\int_{\sqrt{y_i}}^{\sqrt{y_{i+1}}} t\mathbb{P}\left(X^2 \geqslant y_{i+1}\right)\,\mathrm{d}t = \left[t^2\mathbb{P}\left(X^2 \geqslant y_{i+1}\right)\right]_{t=\sqrt{y_i}}^{t=\sqrt{y_{i+1}}} = (y_{i+1} - y_i)\,\mathbb{P}\left(X^2 \geqslant y_{i+1}\right)$
donc

$$2\int_0^{+\infty} t\mathbb{P}(|X| \geqslant t)\,\mathrm{d}t = \sum_{i=0}^{n-1} y_{i+1}\mathbb{P}\left(X^2 \geqslant y_{i+1}\right) - \sum_{i=0}^{n-1} y_i\mathbb{P}\left(X^2 \geqslant y_{i+1}\right) = \sum_{i=1}^{n} y_i\mathbb{P}\left(X^2 \geqslant y_i\right) - \sum_{i=0}^{n-1} y_i\mathbb{P}\left(X^2 \geqslant y_{i+1}\right)$$

or $y_n\mathbb{P}\left(X^2 \geqslant y_n\right) = y_n\mathbb{P}\left(X^2 = y_n\right)$ et $y_0\mathbb{P}\left(X^2 \geqslant y_0\right) = 0$
de plus pour $i \in [\![1, n-1]\!]$, on a $\left(X^2 \geqslant y_i\right) = \left(X^2 = y_i\right) \bigcup \left(X^2 \geqslant y_{i+1}\right)$ (union disjointe)
ainsi $\mathbb{P}\left(X^2 \geqslant y_i\right) = \mathbb{P}\left(X^2 = y_i\right) + \mathbb{P}\left(X^2 \geqslant y_{i+1}\right)$ d'où

$$2\int_0^{+\infty} t\mathbb{P}(|X| \geqslant t)\,\mathrm{d}t = y_n\mathbb{P}\left(X^2 = y_n\right) + \sum_{i=1}^{n-1} y_i\mathbb{P}\left(X^2 = y_i\right) = \sum_{y \in X^2(\Omega)} y\mathbb{P}\left(X^2 = y\right)$$

On a bien $\boxed{\mathbb{E}(X^2) = 2\displaystyle\int_0^{+\infty} t\mathbb{P}(|X| \geqslant t)\,\mathrm{d}t}$

Q 9. La fonction $t \longmapsto at\exp(-bt^2)$ est continue et positive sur $[0, +\infty[$ (1)

Soit $A > 0$. On a $2\displaystyle\int_0^{A} at\exp(-bt^2)\,\mathrm{d}t = \left[\frac{a}{-b}\exp(-bt^2)\right]_{t=0}^{t=A} = -\frac{a}{b}\exp(-bA^2) + \frac{a}{b}$

Ainsi $\displaystyle\int_0^{A} at\exp(-bt^2)\,\mathrm{d}t \underset{A \to +\infty}{\longrightarrow} \frac{a}{2b}$

ce qui prouve l'intégrabilité de $t \longmapsto at\exp(-bt^2)$ sur $[0,+\infty[$ avec (1)
De plus $\forall t \geqslant 0,\ t\mathbb{P}(|X| \geqslant t) \leqslant at\exp(-bt^2)$

d'où $\boxed{\mathbb{E}(X^2) = 2\int_0^{+\infty} t\mathbb{P}(|X| \geqslant t)\ \mathrm{d}t \leqslant 2\int_0^{+\infty} at\exp(-bt^2)\ \mathrm{d}t = \frac{a}{b}}$

Q 10. Soit $t \in \mathbb{R}$. Soit $x \in \mathbb{R}$.
On a $|x+\delta| \geqslant |x| + |\delta|$ selon l'inégalité triangulaire
ce qui permet de conclure que $\boxed{\mathbb{P}(|X+\delta| \geqslant t) \leqslant \mathbb{P}(|X| \geqslant t - |\delta|)}$

Q 11. Soit $t \in \mathbb{R}$. On a

$$a - \frac{t^2 b}{2} - \left(-b(t-|\delta|)^2\right) = \frac{t^2 b}{2} - 2b|\delta|t + a + b\delta^2 = b\frac{(t-2|\delta|)^2}{2} + a - b\delta^2 \geqslant 0$$

comme $b|\delta|^2 \leqslant a$, ceci prouve $\boxed{-b(t-|\delta|)^2 \leqslant a - \frac{t^2 b}{2}}$

Q 12. Soit $t \in \mathbb{R}$ tel que $t \geqslant |\delta|$.
En servant de Q10. puis de l'hypothèse en I.D car $t - |\delta| \geqslant 0$, on a

$$\mathbb{P}(|X+\delta| \geqslant t) \leqslant \mathbb{P}(|X| \geqslant t - |\delta|) \leqslant a\exp\left(-b(t-|\delta|)^2\right)$$

Puis en utilisant la croissance de l'exponentielle et Q11.,
on obtient : $\boxed{\mathbb{P}(|X+\delta| \geqslant t) \leqslant a\exp(a - bt^2/2) = a\exp(a)\exp(-\frac{1}{2}bt^2)}$

Q 13. Si $0 \leqslant t < |\delta|$, on a $t^2 \leqslant \delta^2 \leqslant \dfrac{a}{b}$
donc $-\dfrac{1}{2}bt^2 \geqslant -\dfrac{a}{2}$ et $a\exp(a)\exp(-\frac{1}{2}bt^2) \geqslant a\exp(a)\exp(-\frac{a}{2})a = a\exp(\frac{a}{2})$
D'après l'inégalité sous-gaussienne en $t=0$, on a $1 = \mathbb{P}(|X| \geqslant 0) \leqslant a\exp(0) = a$
d'où $a\exp(a)\exp(-\frac{1}{2}bt^2) \geqslant 1\exp(1/2) \geqslant 1 \geqslant \mathbb{P}(|X+\delta| \geqslant t)$
On a justifié que $\boxed{\text{l'inégalité de } \textbf{Q12} \text{ reste valable si } 0 \leqslant t < |\delta|}$

II. L'inégalité de concentration de Talagrand

II.A - Étude de deux cas particuliers

Q 14. On suppose que C est un convexe fermé ne rencontrant pas $X(\Omega)$ alors $(X \in C)$ est l'événement impossible

ainsi dans ce cas on a $\boxed{\mathbb{P}(X \in C) \cdot \mathbb{E}\left(\exp\left(\frac{1}{8}d(X,C)^2\right)\right) = 0 \leqslant 1}$

Q 15. Je note $u = \sum\limits_{i=1}^{n} u_i e_i$ où les u_i sont les coordonnées de u dans la base $(e_1, \ldots, e_n)$
Pour $\omega \in \Omega$, on a par calcul dans une base orthonormée :

$$\frac{1}{4}d(X(\omega), u)^2 = \frac{\|X(\omega) - u\|^2}{4} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\left(\varepsilon_i(\omega) - u_i\right)^2}{4}$$

Pour $i \in [\![1,n]\!]$, je note $Y_i = \dfrac{\left(\varepsilon_i - u_i\right)^2}{4}$

Comme $u_i \in \{-1,1\}$ et que ε_i est à valeurs dans $\{-1,1\}$, alors Y_i est à valeurs dans $\{0,1\}$
De plus $(Y_i = 0) = (\varepsilon_i = u_i)$ et donc $\mathbb{P}(Y_i = 0) = \dfrac{1}{2}$
Ainsi Y_i suit une loi de Bernoulli de paramètre 1/2.
De plus $\dfrac{1}{4}d(X(\omega),u)^2 = \sum\limits_{i=1}^{n} Y_i$ et les Y_i sont indépendants dans leur ensemble par lemmes des coalitions.
Ce qui permet de conclure que $\boxed{\dfrac{1}{4}d(X,u)^2 \text{ suit une loi binomiale de paramètres } n \text{ et } 1/2}$

Q 16. D'après ce qui précède $\dfrac{1}{4}d(X,u)^2$ est à valeurs dans $[\![0,n]\!]$
et $\forall k \in [\![0,n]\!],\ \mathbb{P}\left(\dfrac{1}{4}d(X,u)^2 = k\right) = \binom{n}{k}\left(\frac{1}{2}\right)^k\left(\frac{1}{2}\right)^{n-k} = \dfrac{\binom{n}{k}}{2^n}$
En utilisant la formule de transfert avec $\exp\left(\dfrac{1}{8}d(X,u)^2\right) = \exp\left(\dfrac{1}{2}\left(d(X,u)^2/4\right)\right)$:

$$\mathbb{E}\left(\exp\left(\frac{1}{8}d(X,u)^2\right)\right) = \sum_{k=0}^{n}\exp(k/2)\frac{\binom{n}{k}}{2^n} = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\left(\frac{\sqrt{e}}{2}\right)^k\left(\frac{1}{2}\right)^{n-k}$$

donc selon le binôme de Newton : $\boxed{\mathbb{E}\left(\exp\left(\dfrac{1}{8}d(X,u)^2\right)\right) = \left(\dfrac{\sqrt{e}+1}{2}\right)^n}$

Comme $2 \leqslant e \leqslant 3$, on a $0 \leqslant \dfrac{\sqrt{e}+1}{2} \leqslant 2$ et donc $\boxed{\mathbb{E}\left(\exp\left(\dfrac{1}{8}d(X,u)^2\right)\right) \leqslant 2^n}$

Q 17. On a $\boxed{d(X,C) = \inf\limits_{v\in C} d(X,v) \leqslant d(X,u)}$

De plus comme $X(\Omega)\bigcap C = \{u\}$, on a $(X \in C) = (X = u) = \bigcap\limits_{i=1}^{n}(\varepsilon_i = u_i)$ en reprenant les notations de Q14.

Donc par indépendance mutuelle des ε_i, on a

$$\mathbb{P}(X \in C) = \prod_{i=1}^{n}\mathbb{P}(\varepsilon_i = u_i) = \frac{1}{2^n}$$

Comme les facteurs sont positifs et à l'aide de la question Q 16, on a $\mathbb{P}(X \in C)\cdot\mathbb{E}\left(\exp\left(\frac{1}{8}d(X,C)^2\right)\right) \leqslant 1$
$\boxed{\text{On a bien l'inégalité (II.1) dans ce cas}}$

II.B - Initialisation

Q 18. Pour le cas $n = 1$, j'identifie E à $\mathbb{R}$ et X à ε_1 qui suit donc une loi de Rademacher
On a donc $X(\Omega) = \{-1,1\}$ et comme $C \cap X(\Omega)$ contient au moins deux éléments
alors $X(\Omega) = \{-1,1\} = C \cap X(\Omega) \subset C$ et donc $(X \in C) = \Omega$ est l'événement certain
d'où $d(X,C)$ vaut certainement 0 et donc $(\exp\left(\frac{1}{8}d(X,C)^2\right)$ est constante égale 1
d'où $\boxed{\text{pour } n = 1, \text{ on a } \mathbb{P}(X \in C)\cdot\mathbb{E}\left(\exp\left(\frac{1}{8}d(X,C)^2\right)\right) = 1\times 1 = 1 \leqslant 1 \text{ selon Attila}}$

II.C - Propriétés de C_{+1} *et* C_{-1}

Q 19. Soit $x' \in E'$ et $t \in \{1,-1\}$.

<u>$\Leftarrow$:</u> On suppose que : $x' + te_n \in \mathrm{C}$. On a donc $x' + te_n \in \mathrm{C} \cap \mathrm{H}_t$ car $x' \in \mathrm{E}'$.
Comme π est une projection et que $x' \in \mathrm{E}' = \operatorname{Im}\pi$, on a $\pi(x') = x'$
et que $\operatorname{Ker}(\pi) = \operatorname{Vect}(e_1, \ldots, e_{n-1})^{\perp} = \operatorname{Vect}(e_n)$, on a $\pi(e_n) = 0$
Par linéarité $\pi(x' + te_n) = x'$ d'où $x' \in \pi(\mathrm{C} \cap \mathrm{H}_t) = \mathrm{C}_t$

<u>$\Rightarrow$:</u> On suppose que : $x' \in \mathrm{C}_t = \pi(\mathrm{C} \cap \mathrm{H}_t)$. Ceci nous fournit $y \in \mathrm{C} \cap \mathrm{H}_t$ tel que $x' = \pi(y)$
On écrit $y = \sum_{i=1}^{n} y_i e_i$ où les $y_i \in \mathbb{R}$ On a donc $x' = \pi(y) = \sum_{i=1}^{n-1} y_i e_i$
et comme $y \in \mathrm{H}_t$, on a $y - te_n = \sum_{i=1}^{n-1} y_i e_i + (y_n - t)e_n \in \mathrm{E}'$
donc $(y_n - t)e_n \in \mathrm{E}'$ puis $y_n = t$
et ainsi $x' + te_n = y \in \mathrm{C}$

<u>**Conclusion :**</u> on a bien : $\boxed{x' \in \mathrm{C}_t \iff x' + te_n \in \mathrm{C}}$

Q 20. <u>$\mathrm{C}_t \subset \mathrm{E}'$:</u> Par définition, on a $\mathrm{C}_1 \subset \operatorname{Im}(\pi) = \mathrm{E}'$. De même pour C_{-1}

<u>$\mathrm{C}_t \neq \emptyset$:</u> Par hypothèse, $\mathrm{C} \cap \mathrm{X}(\Omega)$ contient au moins deux vecteurs qui diffèrent par leur dernière coordonnée.
Ceci nous fournit $y = \sum_{i=1}^{n-1} y_i e_i + e_n \in \mathrm{C} \cap \mathrm{X}(\Omega)$ et $z = \sum_{i=1}^{n-1} z_i e_i - e_n \in \mathrm{C} \cap \mathrm{X}(\Omega)$ où les y_i et les z_i sont réels.
On note $y' = \sum_{i=1}^{n-1} y_i e_i$ et $z' = \sum_{i=1}^{n-1} z_i e_i$ et on a y' et $z' \in \mathrm{E}'$
En utilisant la réciproque de la question précédente, on a $y' \in \mathrm{C}_{+1}$ et $z' \in \mathrm{C}_{-1}$
Donc $\mathrm{C}_{+1} \neq \emptyset$ et $\mathrm{C}_{-1} \neq \emptyset$

<u>C_t **convexe :**</u> Établissons que C_{+1} est convexe et ce sera analogue pour C_{-1}
Soit $x, y \in \mathrm{C}_{+1}$. Soit $\lambda \in [0,1]$. Montrons $\lambda x + (1-\lambda)y \in \mathrm{C}_{+1}$.
On a x et $y \in \mathrm{E}'$ donc $\lambda x + (1-\lambda)y \in \mathrm{E}'$ car E' est un sous-espace vectoriel
De plus $\lambda x + (1-\lambda)y + e_n = \lambda(x + e_n) + (1-\lambda)(y + e_n)$
Or en utilisant le sens direct de Q19., on a $x + e_n \in \mathrm{C}$ et $y + e_n \in \mathrm{C}$
Comme C est convexe, on a donc $\lambda x + (1-\lambda)y + e_n \in \mathrm{C}$
d'où $\lambda x + (1-\lambda)y \in \mathrm{C}_1$ par la réciproque de Q19.

<u>C_t **fermé :**</u> Établissons que C_{+1} est fermé de E' et ce sera analogue pour C_{-1}.
Soit $(u_k)_{k\in\mathbb{N}}$ une suite à valeurs dans C_{+1} qui converge vers $\ell \in \mathrm{E}'$. Montrons que $\ell \in \mathrm{C}_{+1}$
Pour $k \in \mathbb{N}$, on a comme ci-dessus $u_k + e_n \in \mathrm{C}$
or par somme $(x_k + e_n)_{k\in\mathbb{N}}$ converge vers $\ell + e_n$.
Comme C est fermé de E, on a $\ell + e_n \in \mathrm{C}$,
comme $\ell \in \mathrm{E}'$, on a bien $\ell \in \mathrm{C}_{+1}$ d'après Q19.

<u>**Conclusion :**</u> On a bien $\boxed{\mathrm{C}_{+1} \text{ et } \mathrm{C}_{-1} \text{ sont des convexes fermés non vides de } \mathrm{E}'}$

Q 21. $(\varepsilon_n = 1)$ et $(\varepsilon_n = -1)$ forment un système complet d'événements de probabilités 1/2 donc selon la formule des probabilités totales :

$$\mathbb{P}(\mathrm{X} \in \mathrm{C}) = \mathbb{P}\left(\mathrm{X} \in \mathrm{C}, \varepsilon_n = 1)\right) + \mathbb{P}\left(\mathrm{X} \in \mathrm{C}, \varepsilon_n = -1\right)$$

Soit $\omega \in \Omega$. Soit $t \in \{-1, 1\}$.
On a $\mathrm{X}(\omega) = \mathrm{X}'(\omega) + \varepsilon_n(\omega)e_n$ et $\mathrm{X}'(\omega) \in \mathrm{E}'$ et $\varepsilon_n(\omega) \in \{-1, 1\}$ donc d'après Q19 :

$$\begin{cases} \mathrm{X}(\omega) \in \mathrm{C} \\ \varepsilon_n(\omega) = t \end{cases} \iff \begin{cases} \mathrm{X}'(\omega) \in \mathrm{C}_t \\ \varepsilon_n(\omega) = t \end{cases}$$

Ainsi $\mathbb{P}(\mathrm{X} \in \mathrm{C}) = \mathbb{P}\left(\mathrm{X}' \in \mathrm{C}_{+1}, \varepsilon_n = 1)\right) + \mathbb{P}\left(\mathrm{X}' \in \mathrm{C}_{-1}, \varepsilon_n = -1\right)$

Or $\mathrm{X}' = \displaystyle\sum_{i=1}^{n-1} \varepsilon_i e_i$ et ε_n sont des variables aléatoires indépendantes par le lemme des coalitions. D'où

$$\mathbb{P}(\mathrm{X} \in \mathrm{C}) = \mathbb{P}\left(\mathrm{X}' \in \mathrm{C}_{+1}\right) \cdot \mathbb{P}\left(\varepsilon_n = 1\right) + \mathbb{P}\left(\mathrm{X}' \in \mathrm{C}_{-1}\right) \cdot \mathbb{P}\left(\varepsilon_n = -1\right)$$

On a donc bien $\boxed{\mathbb{P}(\mathrm{X} \in \mathrm{C}) = \frac{1}{2}\mathbb{P}(\mathrm{X}' \in \mathrm{C}_{+1}) + \frac{1}{2}\mathbb{P}(\mathrm{X}' \in \mathrm{C}_{-1})}$

II.D - Une inégalité cruciale

Q 22. Soit $\omega \in \Omega$. On a $\mathrm{Y}_{\varepsilon_n(\omega)}(\omega) \in \mathrm{C}_{\varepsilon_n(\omega)}$
donc $\mathrm{Y}_{\varepsilon_n(\omega)}(\omega) + \varepsilon_n e_n(\omega) \in \mathrm{C}$ d'après Q19. et de même $\mathrm{Y}_{-\varepsilon_n(\omega)}(\omega) - \varepsilon_n e_n(\omega) \in \mathrm{C}$ donc

$$(1-\lambda)\left(\mathrm{Y}_{\varepsilon_n(\omega)}(\omega) + \varepsilon_n e_n(\omega)\right) + \lambda\left(\mathrm{Y}_{-\varepsilon_n(\omega)}(\omega) - \varepsilon_n e_n(\omega)\right) \in \mathrm{C}$$

car C convexe et $\lambda \in [0,1]$ d'où

$$d(\mathrm{X}(\omega), \mathrm{C}) \leqslant \|(1-\lambda)\left(\mathrm{Y}_{\varepsilon_n(\omega)}(\omega) + \varepsilon_n e_n(\omega)\right) + \lambda\left(\mathrm{Y}_{-\varepsilon_n(\omega)}(\omega) - \varepsilon_n e_n(\omega)\right) - \mathrm{X}(\omega)\|$$

On a bien montré $\boxed{d(\mathrm{X}, \mathrm{C}) \leqslant \|(1-\lambda)(\mathrm{Y}_{\varepsilon_n} + \varepsilon_n e_n) + \lambda(\mathrm{Y}_{-\varepsilon_n} - \varepsilon_n e_n) - \mathrm{X}\|}$

Q 23. On a $\mathrm{X} = \mathrm{X}' + \varepsilon_n e_n$ donc $(1-\lambda)(\mathrm{Y}_{\varepsilon_n} + \varepsilon_n e_n) + \lambda(\mathrm{Y}_{-\varepsilon_n} - \varepsilon_n e_n) - \mathrm{X} = (1-\lambda)(\mathrm{Y}_{\varepsilon_n} - \mathrm{X}') + \lambda(\mathrm{Y}_{-\varepsilon_n} - \mathrm{X}' - 2\varepsilon_n e_n)$
ainsi $(1-\lambda)(\mathrm{Y}_{\varepsilon_n} + \varepsilon_n e_n) + \lambda(\mathrm{Y}_{-\varepsilon_n} - \varepsilon_n e_n) - \mathrm{X} = (1-\lambda)(\mathrm{Y}_{\varepsilon_n} - \mathrm{X}') + \lambda(\mathrm{Y}_{-\varepsilon_n} - \mathrm{X}') - 2\lambda\varepsilon_n e_n$
La variable aléatoire $2\lambda\varepsilon_n e_n$ est à valeurs dans $\mathrm{Vect}(e_n)$ et $(1-\lambda)(\mathrm{Y}_{\varepsilon_n} - \mathrm{X}') + \lambda(\mathrm{Y}_{-\varepsilon_n} - \mathrm{X}')$ à valeurs dans E'
or $\mathrm{E}' \perp \mathrm{Vect}(e_n)$ et $\|e_n\| = 1$ donc selon le théorème de Pythagore

$$\|(1-\lambda)(\mathrm{Y}_{\varepsilon_n} + \varepsilon_n e_n) + \lambda(\mathrm{Y}_{-\varepsilon_n} - \varepsilon_n e_n) - \mathrm{X}\|^2 = 4\lambda^2 + \|(1-\lambda)(\mathrm{Y}_{\varepsilon_n} - \mathrm{X}') + \lambda(\mathrm{Y}_{-\varepsilon_n} - \mathrm{X}')\|^2$$

on en déduit avec la question précédente que

$$d(\mathrm{X}, \mathrm{C})^2 \leqslant 4\lambda^2 + \|(1-\lambda)(\mathrm{Y}_{\varepsilon_n} - \mathrm{X}') + \lambda(\mathrm{Y}_{-\varepsilon_n} - \mathrm{X}')\|^2$$

Soit u et $v \in \mathrm{E}$. Montrons $\forall t \in [0,1],\ (1-t)\|u\|^2 + t\|v\|^2 \geqslant \|(1-t)u + tv\|^2$
Je pose $\mathrm{P} : t \mapsto (1-t)\|u\|^2 + t\|v\|^2 - \|(1-t)u + tv\|^2$
Soit $t \in \mathbb{R}$. On a $\mathrm{P}(t) = \left((1-t) - (1-t)^2\right)\|u\|^2 + \left(t - t^2\right)\|v\|^2 - 2t(1-t)\langle u, v\rangle$
donc $\mathrm{P}(t) = t(1-t)\left[\|u\|^2 + \|v\|^2 - 2\langle u, v\rangle\right] = t(1-t)\|u-v\|^2$
d'où $\forall t \in [0,1],\ \mathrm{P}(t) \geqslant 0$ d'où le résultat.
En appliquant ceci à $t = \lambda$, $u = \mathrm{Y}_{\varepsilon_n(\omega)}(\omega) - \mathrm{X}'(\omega)$ et $v = \mathrm{Y}_{-\varepsilon_n(\omega)}(\omega) - \mathrm{X}'(\omega)$ pour $\omega \in \Omega$ on obtient :

$$d(\mathrm{X}, \mathrm{C})^2 \leqslant 4\lambda^2 + \|(1-\lambda)(\mathrm{Y}_{\varepsilon_n} - \mathrm{X}') + \lambda(\mathrm{Y}_{-\varepsilon_n} - \mathrm{X}')\|^2 \leqslant 4\lambda^2 + (1-\lambda)\|\mathrm{Y}_{\varepsilon_n} - \mathrm{X}'\|^2 + \lambda\|\mathrm{Y}_{-\varepsilon_n} - \mathrm{X}'\|^2$$

Ainsi, on a montré l'inégalité $\boxed{d(\mathrm{X}, \mathrm{C})^2 \leqslant 4\lambda^2 + (1-\lambda)d(\mathrm{X}', \mathrm{C}_{\varepsilon_n})^2 + \lambda d(\mathrm{X}', \mathrm{C}_{-\varepsilon_n})^2}$

II.E - Espérances conditionnelles

Q 24. Comme $\mathrm{C} \cap \mathrm{X}(\Omega)$ contient au moins deux vecteurs qui diffèrent par leur dernière coordonnée,

ceci nous fournit $x' = \displaystyle\sum_{i=1}^{n-1} x_i e_i \in \mathrm{E}'$ tel que $\{x' + e_n, x' - e_n\} \subset \mathrm{C} \cap \mathrm{X}(\Omega)$

Ainsi d'après Q19., $x' \in \mathrm{C}_{-1}$ et donc $(\mathrm{X}' = x') \subset (\mathrm{X}' \in \mathrm{C}_{-1})$

or $(\mathrm{X}' = x') = \displaystyle\bigcap_{i=1}^{n-1} (\varepsilon_i = x_i)$ donc par indépendance des ε_i on a

$$\mathbb{P}(\mathrm{X}' = x') = \prod_{i=1}^{n-1} \mathbb{P}(\varepsilon_i = x_i) = \frac{1}{2^{n-1}}$$

et donc $\mathbb{P}(\mathrm{X}' \in \mathrm{C}_{-1}) \geqslant \mathbb{P}(\mathrm{X}' = x') > 0$ d'où $\boxed{p_- > 0}$

Q 25. **Lemme 1 :** *Soit* X *et* Y *deux variables aléatoires réelles,* $f : \mathbb{R} \times \mathrm{Y}(\Omega) \longrightarrow \mathbb{R}$ *et* $k \in \mathbb{R}$ *tels que* $\mathbb{P}(\mathrm{Y} = k) > 0$. *On a :*

$$\mathbb{E}(f(\mathrm{X}, \mathrm{Y}) | \mathrm{Y} = k) = \mathbb{E}(f(\mathrm{X}, k) | \mathrm{Y} = k)$$

Soit $z \in f(\mathrm{X}, \mathrm{Y})(\Omega)$.

<u>Premier cas :</u> On suppose $\forall x \in \mathrm{X}(\omega),\ \ z \neq f(x, k)$ donc $g_z = \{x \in \mathrm{X}(\omega) \mid z = f(x, k)\} = \emptyset$
alors $\mathbb{P}_{(\mathrm{Y}=k)}\left(f(\mathrm{X}, \mathrm{Y}) = z\right) = \dfrac{\mathbb{P}\left(f(\mathrm{X}, \mathrm{Y}) = z, \mathrm{Y} = k\right)}{\mathbb{P}(\mathrm{Y} = k)} = 0 =$

<u>Deuxième cas :</u> On suppose $g_z = \{x \in \mathrm{X}(\omega) \mid z = f(x, k)\}$ non vide ce qui équivaut à $z \in f(\mathrm{X}, k)$
alors $(f(\mathrm{X}, \mathrm{Y}) = z, \mathrm{Y} = k) = \bigcup_{x \in g_z} (\mathrm{X} = x, \mathrm{Y} = k)$
donc $\mathbb{P}_{(\mathrm{Y}=k)}\left(f(\mathrm{X}, \mathrm{Y}) = z\right) = \displaystyle\sum_{x \in g_z} \frac{\mathbb{P}\left(\mathrm{X} = x, \mathrm{Y} = k\right)}{\mathbb{P}(\mathrm{Y} = k)} = \frac{\mathbb{P}\left(f(\mathrm{X}, \mathrm{Y}) = z, \mathrm{Y} = k\right)}{\mathbb{P}(\mathrm{Y} = k)} = \mathbb{P}_{(\mathrm{Y}=k)}\left(f(\mathrm{X}, k) = z\right)$

On conclut avec la définition :

$$\mathbb{E}(f(\mathrm{X}, \mathrm{Y}) | \mathrm{Y} = k) = \sum_{z \in f(\mathrm{X}, \mathrm{Y})(\Omega)} z \mathbb{P}_{(\mathrm{Y}=k)}\left(f(\mathrm{X}, \mathrm{Y}) = z\right) = \sum_{z \in f(\mathrm{X}, k)(\Omega)} z \mathbb{P}_{(\mathrm{Y}=k)}\left(f(\mathrm{X}, k) = z\right) = \mathbb{E}(f(\mathrm{X}, k) | \mathrm{Y} = k)$$

Lemme 2 : *Soit* X *et* Y *deux variables aléatoires réelles indépendantes et* $k \in \mathbb{R}$ *tels que* $\mathbb{P}(\mathrm{Y} = k) > 0$. *On a :*

$$\mathbb{E}(\mathrm{X} | \mathrm{Y} = k) = \mathbb{E}(\mathrm{X})$$

Il suffit d'utiliser la définition de l'espérance conditionnelle et de remarquer que $\mathbb{P}_{(\mathrm{Y}=k)}(\mathrm{X} = x) = \mathbb{P}(\mathrm{X} = x)$
Soit λ dans $[0, 1]$. On a d'après Q23. :

$$\exp\left(\frac{d(\mathrm{X}, \mathrm{C})^2}{8}\right) \leqslant \exp\left(\frac{\lambda^2}{2}\right) \left(\exp\left(\frac{d(\mathrm{X}', \mathrm{C}_{\varepsilon_n})^2}{8}\right)\right)^{1-\lambda} \cdot \left(\exp\left(\frac{d(\mathrm{X}', \mathrm{C}_{-\varepsilon_n})^2}{8}\right)\right)^{\lambda} \quad (\star)$$

D'après le lemme 1 : $\mathbb{E}\left(\left(\exp\left(\dfrac{d(\mathrm{X}', \mathrm{C}_{\varepsilon_n})^2}{8}\right)\right)^{1-\lambda} \cdot \left(\exp\left(\dfrac{d(\mathrm{X}', \mathrm{C}_{-\varepsilon_n})^2}{8}\right)\right)^{\lambda} \middle| \varepsilon_n = -1\right) = \cdots$

$$\cdots \mathbb{E}\left(\left(\exp\left(\frac{d(\mathrm{X}', \mathrm{C}_{-1})^2}{8}\right)\right)^{1-\lambda} \cdot \left(\exp\left(\frac{d(\mathrm{X}', \mathrm{C}_{1})^2}{8}\right)\right)^{\lambda} \middle| \varepsilon_n = -1\right)$$

Avec le lemme des coalitions, les variables aléatoires ε_n et $\left(\exp\left(\frac{d(\mathrm{X}',\mathrm{C}_{-1})^2}{8}\right)\right)^{1-\lambda}\cdot\left(\exp\left(\frac{d(\mathrm{X}',\mathrm{C}_1)^2}{8}\right)\right)^{\lambda}$ sont indépendantes car ε_n et de X' le sont ; puis le lemme 2 donne :

$$\mathbb{E}\left(\exp\left(\frac{d(\mathrm{X}',\mathrm{C}_{-1})^2}{8}\right)^{1-\lambda}\exp\left(\frac{d(\mathrm{X}',\mathrm{C}_1)^2}{8}\right)^{\lambda}|\varepsilon_n=-1\right)=\mathbb{E}\left(\exp\left(\frac{d(\mathrm{X}',\mathrm{C}_{-1})^2}{8}\right)^{1-\lambda}\exp\left(\frac{d(\mathrm{X}',\mathrm{C}_1)^2}{8}\right)^{\lambda}\right)$$

À l'aide de $(\star)$, de la croissance et la linéarité de l'espérance conditionnelle, on obtient :

$$\boxed{\mathbb{E}\left(\exp\left(\frac{d(\mathrm{X},\mathrm{C})^2}{8}\right)|\varepsilon_n=-1\right)\leqslant\exp\left(\frac{\lambda^2}{2}\right)\mathbb{E}\left(\left(\exp\left(\frac{d(\mathrm{X}',\mathrm{C}_{-1})^2}{8}\right)\right)^{1-\lambda}\cdot\left(\exp\left(\frac{d(\mathrm{X}',\mathrm{C}_1)^2}{8}\right)\right)^{\lambda}\right)}$$

Q 26. On suppose $\lambda\in]0,1[$. On pose $p=\dfrac{1}{1-\lambda}$ et $q=\dfrac{1}{\lambda}$ de sorte que $p>0,q>0$ et $\dfrac{1}{p}+\dfrac{1}{q}=1$

D'après Q6, pour Y et Z variables positives, on a $\mathrm{Y}^{1/p}=\left|\mathrm{Y}^{1/p}\right|$ et $\mathrm{Z}^{1/q}=\left|\mathrm{Z}^{1/q}\right|$:

$$\mathbb{E}\left(\mathrm{Y}^{1/p}\mathrm{Z}^{1/q}\right)\leqslant\mathbb{E}\left(\left(\mathrm{Y}^{1/p}\right)^p\right)^{1/p}\mathbb{E}\left(\left(\mathrm{Z}^{1/q}\right)^q\right)^{1/q}=\mathbb{E}\left(\mathrm{Y}\right)^{1/p}\mathbb{E}\left(\mathrm{Z}\right)^{1/q}$$

donc

$$\mathbb{E}\left(\mathrm{Y}^{1-\lambda}\mathrm{Z}^{\lambda}\right)\leqslant\mathbb{E}\left(\mathrm{Y}\right)^{1-\lambda}\mathbb{E}\left(\mathrm{Z}\right)^{\lambda}$$

En appliquant ceci au résultat de Q25., on obtient pour tout $\lambda\in]0,1[$:

$$\mathbb{E}\left(\exp\left(\frac{d(\mathrm{X},\mathrm{C})^2}{8}\right)|\varepsilon_n=-1\right)\leqslant\exp\left(\frac{\lambda^2}{2}\right)\left(\mathbb{E}\left(\exp\left(\frac{d(\mathrm{X}',\mathrm{C}_{-1})^2}{8}\right)\right)\right)^{1-\lambda}\cdot\left(\mathbb{E}\left(\exp\left(\frac{d(\mathrm{X}',\mathrm{C}_1)^2}{8}\right)\right)\right)^{\lambda}$$

or $\lambda\longmapsto\exp\left(\dfrac{\lambda^2}{2}\right)\left(\mathbb{E}\left(\exp\left(\dfrac{d(\mathrm{X}',\mathrm{C}_{-1})^2}{8}\right)\right)\right)^{1-\lambda}\cdot\left(\mathbb{E}\left(\exp\left(\dfrac{d(\mathrm{X}',\mathrm{C}_1)^2}{8}\right)\right)\right)^{\lambda}$ est continue sur $[0,1]$

On déduit en passant à la limite en 0 et 1 que pour tout $\lambda\in[0,1]$, on a :

$$\boxed{\mathbb{E}\left(\exp\left(\frac{d(\mathrm{X},\mathrm{C})^2}{8}\right)|\varepsilon_n=-1\right)\leqslant\exp\left(\frac{\lambda^2}{2}\right)\left(\mathbb{E}\left(\exp\left(\frac{d(\mathrm{X}',\mathrm{C}_{-1})^2}{8}\right)\right)\right)^{1-\lambda}\cdot\left(\mathbb{E}\left(\exp\left(\frac{d(\mathrm{X}',\mathrm{C}_1)^2}{8}\right)\right)\right)^{\lambda}}$$

Q 27. On utilise la question précédente en $\lambda=0$, on échange $+1$ et -1 qui jouent des rôles symétriques car on ne s'est pas servi de $p_-\leqslant p_+$ puis on multiplie par $p_+\geqslant 0$ pour obtenir :

$$p_+\cdot\mathbb{E}\left(\exp\left(\frac{d(\mathrm{X},\mathrm{C})^2}{8}\right)|\varepsilon_n=1\right)\leqslant p_+\cdot\mathbb{E}\left(\exp\left(\frac{d(\mathrm{X}',\mathrm{C}_1)^2}{8}\right)\right)$$

On a donc $p_+\cdot\mathbb{E}\left(\exp\left(\dfrac{d(\mathrm{X}',\mathrm{C}_1)^2}{8}\right)\right)=\mathbb{P}\left(\mathrm{X}'\in\mathrm{C}_1\right)\cdot\mathbb{E}\left(\exp\left(\dfrac{d(\mathrm{X}',\mathrm{C}_1)^2}{8}\right)\right)$

or $\mathrm{X}'=\displaystyle\sum_{i=1}^{n-1}\varepsilon_ie_i$ est à valeurs dans l'espace euclidien E' de dimension $n-1$ de base orthonormée $(e_1,\ldots,e_{n-1})$, C_1 est un convexe fermé non vide de E' et les ε_i sont indépendantes et suivent la loi de Rademacher d'où par hypothèse de récurrence, on peut appliquer (II.1) :

$$p_+\cdot\left(\mathbb{E}\left(\exp\left(\frac{d(\mathrm{X}',\mathrm{C}_1)^2}{8}\right)\right)\right)\leqslant 1$$

Enfin comme $p_+>0$ selon Q24. (p_+ et p_- jouant des rôles symétriques), on a alors

$$\boxed{\mathbb{E}\left(\exp\left(\frac{1}{8}d(\mathrm{X},\mathrm{C})^2\right)|\varepsilon_n=1\right)\leqslant\frac{1}{p_+}}$$

Q 28. On utilise la formule des probabilités totales sur les espérances conditionnelles de Q7. avec le système complet d'événements : $(\varepsilon_n = t)_{t\in\{-1,1\}}$ de probabilités $1/2$ qui est non nulle : donc

$$\mathbb{E}\left(\exp\left(\frac{1}{8}d(\mathrm{X},\mathrm{C})^2\right)\right) = \frac{1}{2}\mathbb{E}\left(\exp\left(\frac{1}{8}d(\mathrm{X},\mathrm{C})^2\right)\middle|\varepsilon_n = 1\right) + \frac{1}{2}\mathbb{E}\left(\exp\left(\frac{1}{8}d(\mathrm{X},\mathrm{C})^2\right)\middle|\varepsilon_n = -1\right)$$

Soit λ dans $[0,1]$. On applique les deux questions précédentes :

$$\mathbb{E}\left(\exp\left(\frac{1}{8}d(\mathrm{X},\mathrm{C})^2\right)\right) \leqslant \frac{1}{2}\left(\frac{1}{p_+} + \exp\left(\frac{\lambda^2}{2}\right)\left(\mathbb{E}\left(\exp\left(\frac{d(\mathrm{X}',\mathrm{C}_{-1})^2}{8}\right)\right)\right)^{1-\lambda}\cdot\left(\mathbb{E}\left(\exp\left(\frac{d(\mathrm{X}',\mathrm{C}_1)^2}{8}\right)\right)\right)^{\lambda}\right)$$

En utilisant l'hypothèse de récurrence comme à la question précédente on a :

$$\mathbb{E}\left(\exp\left(\frac{d(\mathrm{X}',\mathrm{C}_{-1})^2}{8}\right)\right) \leqslant \frac{1}{p_-} \quad \text{et} \quad \mathbb{E}\left(\exp\left(\frac{d(\mathrm{X}',\mathrm{C}_1)^2}{8}\right)\right) \leqslant \frac{1}{p_+}$$

On en déduit que $\boxed{\text{pour tout } \lambda \text{ dans } [0,1] : \mathbb{E}\left(\exp\left(\frac{1}{8}d(\mathrm{X},\mathrm{C})^2\right)\right) \leqslant \frac{1}{2}\left(\frac{1}{p_+} + \exp\left(\frac{\lambda^2}{2}\right)\frac{1}{(p_-)^{1-\lambda}}\cdot\frac{1}{(p_+)^{\lambda}}\right)}$

II.F - Optimisation

Q 29. On a $\lambda = 1 - \frac{p_-}{p_+} \in [0,1]$ car $0 < p_- \leqslant p_+$ donc d'après Q28 :

$$\mathbb{E}\left(\exp\left(\frac{1}{8}d(\mathrm{X},\mathrm{C})^2\right)\right) \leqslant \frac{1}{2p_+}\left(1 + \exp\left(\frac{\lambda^2}{2}\right)\left(\frac{p_+}{p_-}\right)^{1-\lambda}\right)$$

or $(1-\lambda)^{\lambda-1} = \left(\frac{p_-}{p_+}\right)^{\lambda-1} = \left(\frac{p_+}{p_-}\right)^{1-\lambda}$

Ainsi on a bien $\boxed{\mathbb{E}\left(\exp\left(\frac{1}{8}d(\mathrm{X},\mathrm{C})^2\right)\right) \leqslant \frac{1}{2p_+}\left(1 + \exp\left(\frac{\lambda^2}{2}\right)(1-\lambda)^{\lambda-1}\right)}$

Q 30. Je pose $g : x \longmapsto \ln(2+x) - \ln(2-x) - \frac{x^2}{2} - (x-1)\ln(1-x)$ qui est $\mathcal{C}^\infty$ sur $[0,1[$ par théorèmes généraux.
Soit $x \in [0,1[$, on a $g'(x) = \dfrac{1}{2+x} + \dfrac{1}{2-x} - x - 1 - \ln(1-x)$
et $g''(x) = \dfrac{1}{(2-x)^2} - \dfrac{1}{(2+x)^2} - 1 + \dfrac{1}{1-x} = \dfrac{8x}{(2-x)^2(2+x)^2} + \dfrac{x}{1-x} \geqslant 0$
ainsi g' y est strictement croissante sur $[0,1[$
De plus $g'(0) = 0$ donc $\forall x \in [0,1[$, $g'(x) \geqslant 0$.
d'où g est croissante sur $[0,1[$ et comme $g(0) = 0$, on a $\forall x \in [0,1[$, $g(x) \geqslant 0$.

On a montré que $\boxed{\text{pour tout } x \in [0,1[, \quad \frac{x^2}{2} + (x-1)\ln(1-x) \leqslant \ln(2+x) - \ln(2-x)}$

Q 31. Soit $x \in [0,1[$. En appliquant l'exponentielle à l'inégalité précédente, on obtient :

$$\exp\left(\frac{x^2}{2}\right)(1-x)^{x-1} \leqslant \frac{2+x}{2-x}$$

d'où $\boxed{1 + \exp\left(\frac{x^2}{2}\right)(1-x)^{x-1} \leqslant \frac{4}{2-x}}$

Q 32. En utilisant la question précédente et Q29., et comme $\lambda \in [0,1[$ car $\lambda = 1 - \frac{p_-}{p_+}$ et $0 < p_- \leqslant p_+$, on a :

$$\mathbb{E}\left(\exp\left(\frac{1}{8}d(\mathrm{X},\mathrm{C})^2\right)\right) \leqslant \frac{1}{2p_+}\frac{4}{2-\lambda}$$

Or $p_+(2-\lambda) = p_+\left(1 + \dfrac{p_-}{p_+}\right) = p_+ + p_-$ d'où

$$\mathbb{E}\left(\exp\left(\frac{1}{8}d(\mathrm{X},\mathrm{C})^2\right)\right) \leqslant \frac{2}{p_+ + p_-}$$

donc comme $\frac{2}{p_+ + p_-} > 0$, on a $\dfrac{p_+ + p_-}{2}\mathbb{E}\left(\exp\left(\dfrac{1}{8}d(\mathrm{X},\mathrm{C})^2\right)\right) \leqslant 1$

À l'aide de la question 21, par définition de p_+ et p_-, on a :

$$\mathbb{P}(\mathrm{X} \in \mathrm{C}) \cdot \mathbb{E}\left(\exp\left(\frac{1}{8}d(\mathrm{X},\mathrm{C})^2\right)\right) \leqslant 1 \qquad \text{(II.1)}$$

on vient de terminer l'hérédité (commencée en IIC) de notre démonstration par récurrence dans le cas où $\mathrm{C} \cap \mathrm{X}(\omega)$ contient au moins deux éléments
mais la formule reste vraie si $\mathrm{C} \cap \mathrm{X}(\omega)$ a au plus un élément d'après IIA
De plus l'initialisation a été traitée en IIA ou IIB selon le cardinal de $\mathrm{C} \cap \mathrm{X}(\omega)$
Ainsi $\boxed{\text{l'inégalité (II.1) a été démontrée par récurrence}}$

II.G - Inégalité de Talagrand

Q 33. Soit C convexe fermé non vide de E et t réel strictement positif. D'après ce qui précède on a

$$\mathbb{P}(\mathrm{X} \in \mathrm{C}) \cdot \mathbb{E}\left(\exp\left(\frac{d(\mathrm{X},\mathrm{C})^2}{8}\right)\right) \leqslant 1 \qquad \text{(II.1)}$$

or par croissance sur $\mathbb{R}^+$ de $x \mapsto \exp\left(\frac{x^2}{8}\right)$, on a :

$$\mathbb{P}\left(d(\mathrm{X},\mathrm{C}) \geqslant t\right) = \mathbb{P}\left(\exp\left(\frac{d(\mathrm{X},\mathrm{C})^2}{8}\right) \geqslant \exp\left(\frac{t^2}{8}\right)\right)$$

En appliquant Markov avec la variable aléatoire positive $\exp\left(\frac{d(\mathrm{X},\mathrm{C})^2}{8}\right)$ et $\exp\left(\frac{t^2}{8}\right) > 0$ on a :

$$\exp\left(\frac{t^2}{8}\right) \cdot \mathbb{P}\left(d(\mathrm{X},\mathrm{C}) \geqslant t\right) \leqslant \mathbb{E}\left(\exp\left(\frac{d(\mathrm{X},\mathrm{C})^2}{8}\right)\right)$$

donc $\mathbb{P}(\mathrm{X} \in \mathrm{C}) \cdot \exp\left(\dfrac{t^2}{8}\right) \cdot \mathbb{P}\left(d(\mathrm{X},\mathrm{C}) \geqslant t\right) \leqslant \mathbb{P}(\mathrm{X} \in \mathrm{C}) \cdot \mathbb{E}\left(\exp\left(\dfrac{d(\mathrm{X},\mathrm{C})^2}{8}\right)\right) \leqslant 1$

On en déduit l'inégalité de Talagrand :

Pour tout C convexe fermé non vide de E et pour tout réel t strictement positif

$$\mathbb{P}(\mathrm{X} \in \mathrm{C}) \cdot \mathbb{P}(d(\mathrm{X},\mathrm{C}) \geqslant t) \leqslant \exp\left(-\frac{t^2}{8}\right)$$

III. Démonstration du théorème de Johnson-Lindenstrauss

III.A - Une inégalité de concentration

Q 34. **Fermée** L'application $\mathrm{M} \in \mathcal{M}_{k,d}(\mathbb{R}) \mapsto \mathrm{M} \cdot u$ est linéaire donc continue car $\dim\left(\mathcal{M}_{k,d}(\mathbb{R})\right) = kd < \infty$

Donc par composition g est continue sur $\mathcal{M}_{k,d}$ or $[0,r]$ est une partie fermée de $\mathbb{R}$

donc $\mathrm{C} = g^{-1}\left([0,r]\right)$ est une partie fermée de $\mathcal{M}_{k,d}(\mathbb{R})$

Convexe Soit M et N $\in$ C. Soit $\lambda \in [0,1]$.

À l'aide de l'inégalité triangulaire et l'homogénéité, on a

$$g(\lambda\mathrm{M} + (1-\lambda)\mathrm{N}) = \|\lambda\mathrm{M}\cdot u + (1-\lambda)\mathrm{N}\cdot u\| \leqslant \lambda\|\mathrm{M}\cdot u\| + (1-\lambda)\|\mathrm{N}\cdot u\| \leqslant (\lambda + 1 - \lambda)r = r$$

d'où $\lambda\mathrm{M} + (1-\lambda)\mathrm{N} \in \mathrm{C}$

On a bien montré que $\boxed{\mathrm{C} = \{\mathrm{M} \in \mathcal{M}_{k,d}(\mathbb{R}) \mid \ g(\mathrm{M}) \leqslant r\} \text{ est une partie convexe et fermée de } \mathcal{M}_{k,d}(\mathbb{R})}$

Q 35. Soit $\mathrm{M} = (m_{i,j})_{\substack{1\leqslant i\leqslant k\\ 1\leqslant j\leqslant d}}$ dans $\mathcal{M}_{k,d}(\mathbb{R})$.

On a $\|\mathrm{M}\cdot u\|^2 = \displaystyle\sum_{i=1}^{k}\left(\sum_{j=1}^{d} m_{i,j}u_j\right)^2 = \sum_{i=1}^{k}\left|\sum_{j=1}^{d} m_{i,j}u_j\right|^2$

On applique k fois Cauchy-Schwarz dans $\mathbb{R}^d$, ce qui donne :

$$\|\mathrm{M}\cdot u\|^2 \leqslant \sum_{i=1}^{k}\left(\left(\sum_{j=1}^{d} m_{i,j}^2\right) \times \left(\sum_{j=1}^{d} u_j^2\right)\right)$$

or $\displaystyle\sum_{j=1}^{d} u_j^2 = \|u\|^2 = 1$ ainsi

$$\|\mathrm{M}\cdot u\|^2 \leqslant \sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{d} m_{i,j}^2$$

ce qui permet de conclure que $\boxed{\|\mathrm{M}\cdot u\| \leqslant \|\mathrm{M}\|_{\mathrm{F}}}$

Q 36. Soit M dans $\mathcal{M}_{k,d}(\mathbb{R})$ telle que $d(\mathrm{M},\mathrm{C}) < t$

On a $0 \in \mathrm{C}$ donc selon Q34., C est une partie fermée convexe non vide de l'espace euclidien $\mathcal{M}_{k,d}(\mathbb{R})$

Ceci nous fournit donc $\mathrm{V} \in \mathrm{C}$ tel que $d(\mathrm{M},\mathrm{C}) = \|\mathrm{M}-\mathrm{V}\|_{\mathrm{F}}$ et donc $\|\mathrm{M}-\mathrm{V}\|_{\mathrm{F}} < t$

On a $g(\mathrm{M}) = \|\mathrm{M}\cdot u\| = \|(\mathrm{M}-\mathrm{V})\cdot u + \mathrm{V}\cdot u\| \leqslant \|(\mathrm{M}-\mathrm{V})\cdot u\| + \|\mathrm{V}\cdot u\|$

Ainsi selon l'inégalité triangulaire et la question précédente : $g(\mathrm{M}) \leqslant \|\mathrm{M}-\mathrm{V}\|_{\mathrm{F}} + r$ car $\mathrm{V} \in \mathrm{C}$

d'où $g(\mathrm{M}) < r + t$

Ainsi $\boxed{\text{pour toute matrice M dans } \mathcal{M}_{k,d}(\mathbb{R}),\ d(\mathrm{M},\mathrm{C}) < t \Rightarrow g(\mathrm{M}) < r + t}$

Q 37. On peut appliquer le théorème de Talagrand avec l'espace euclidien $\mathcal{M}_{k,d}(\mathbb{R})$ de dimension kd muni de la base canonique orthonormée $(\mathrm{E}_{i,j})_{\substack{1\leqslant i\leqslant k\\ 1\leqslant j\leqslant d}}$, la variable $\mathrm{X} = \displaystyle\sum_{\substack{1\leqslant i\leqslant k\\ 1\leqslant j\leqslant d}} \varepsilon_{i,j}\mathrm{E}_{i,j}$ où les $\varepsilon_{i,j}$ sont mutuellement indépendantes suivant une loi de Rademacher et C convexe fermé non vide de $\mathcal{M}_{k,d}(\mathbb{R})$:

$$\mathbb{P}(\mathrm{X} \in \mathrm{C}) \cdot \mathbb{P}(d(\mathrm{X},\mathrm{C}) \geqslant t) \leqslant \exp\left(-\frac{t^2}{8}\right)$$

Or $(\mathrm{X} \in \mathrm{C}) = (g(\mathrm{X}) \leqslant r)$ par définition de C et $(g(\mathrm{X}) \geqslant r + t) \subset (d(\mathrm{X},\mathrm{C}) \geqslant t)$ par contraposée de Q36.

On en déduit que $\boxed{\mathbb{P}(g(\mathrm{X}) \leqslant r) \cdot \mathbb{P}(g(\mathrm{X}) \geqslant r + t) \leqslant \exp\left(-\frac{t^2}{8}\right)}$

III.B - Médianes

Q 38. On considère la fonction G de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ telle que, pour tout réel t, $\mathrm{G}(t) = \mathbb{P}(g(\mathrm{X}) \leqslant t)$.
Comme Ω est fini, $g(\mathrm{X})$ prend un nombre fini de valeurs,
on peut alors noter $g(\mathrm{X}) = \{y_1, \dots y_n\}$ où $n \in \mathbb{N}^*$ et $y_1 < \cdots < y_n$.
Comme G est une fonction croissante sur $\mathbb{R}$ et de plus $\forall t < y_1,\ \mathrm{G}(t) = 0$ et $\forall t \geqslant y_n,\ \mathrm{G}(t) = 1$ et G est constante sur chaque $[y_i, y_{i+1}[$ pour $1 \leqslant i \leqslant n-1$,
Je note $y_0 = y_1 - 1$. La suite $(\mathrm{G}(y_i))_{0\leqslant i\leqslant n}$ est croissante et $\mathrm{G}(y_0) = 0$ et $\mathrm{G}(y_n) = 1$
Ceci nous fournit $j = \min\left\{ i \in [\![1, n]\!] \;\middle|\; \dfrac{1}{2} \leqslant \mathrm{G}(y_i) \right\}$ et on a $\mathrm{G}(y_{j-1}) < \dfrac{1}{2} \leqslant \mathrm{G}(y_j)$
Je pose $m = y_j$ et on a $\mathbb{P}(g(\mathrm{X}) \leqslant m) = \mathrm{G}(m) = \mathrm{G}(y_j) \geqslant \dfrac{1}{2}$
et on a $\mathrm{G}(y_{j-1}) < \dfrac{1}{2}$ donc $\mathbb{P}(g(\mathrm{X}) > y_{j-1}) = 1 - \mathrm{G}(y_{j-1}) > \dfrac{1}{2}$
or $m = y_j > y_{j-1}$, donc $(g(\mathrm{X}) > y_{j-1}) = (g(\mathrm{X}) \geqslant m)$ et $\mathbb{P}(g(\mathrm{X}) \geqslant m) \geqslant \dfrac{1}{2}$
donc $\boxed{g(\mathrm{X}) \text{ admet au moins une médiane}}$

Q 39. Soit $t > 0$. En appliquant Q37. à $r = m$ puis $r = m - t$, on a :

$$\mathbb{P}(g(\mathrm{X}) \leqslant m) \cdot \mathbb{P}(g(\mathrm{X}) \geqslant m + t) \leqslant \exp\left(-\frac{t^2}{8}\right) \text{ et } \mathbb{P}(g(\mathrm{X}) \leqslant m - t) \cdot \mathbb{P}(g(\mathrm{X}) \geqslant m) \leqslant \exp\left(-\frac{t^2}{8}\right)$$

Puis à l'aide de la question précédente et par somme

$$\mathbb{P}(g(\mathrm{X}) \geqslant m + t) + \mathbb{P}(g(\mathrm{X}) \leqslant m - t) \leqslant 4\exp\left(-\frac{t^2}{8}\right)$$

Comme $(|g(x) - m| \geqslant t) = (g(\mathrm{X}) \geqslant m + t) \cup (g(\mathrm{X}) \leqslant m - t)$ (union disjointe)
On a $\boxed{\mathbb{P}(|g(x) - m| \geqslant t) \leqslant 4\exp\left(-\dfrac{t^2}{8}\right) \text{ où } m \text{ est une médiane de } g(\mathrm{X})}$

Q 40. La variable aléatoire réelle $g(\mathrm{X}) - m$ vérifie les hypothèse du I.D, en prenant $a = 4$ et $b = 1/8$
À l'aide de Q9., on déduit que $\boxed{\mathbb{E}((g(\mathrm{X}) - m)^2) \leqslant 32}$

Q 41. On a $g(\mathrm{X})^2 = \|\mathrm{X}u\|^2 = \displaystyle\sum_{i=1}^{k}\left(\sum_{j=1}^{d}\varepsilon_{i,j}u_j\right)^2$
À $i \in [\![1, k]\!]$ fixé, on a

$$\left(\sum_{j=1}^{d}\varepsilon_{i,j}u_j\right)^2 = \sum_{j=1}^{d}\varepsilon_{i,j}^2u_j^2 + 2\sum_{1\leqslant j<\ell\leqslant d}\varepsilon_{i,j}u_j\varepsilon_{i,\ell}u_\ell$$

La variable $\varepsilon_{i,j}^2$ est constante égale à 1 pour tout j et pour $\ell \neq j$, on a par indépendance et linéarité :

$$\mathbb{E}\left(\varepsilon_{i,j}u_j\varepsilon_{i,\ell}u_\ell\right) = u_iu_\ell\mathbb{E}\left(\varepsilon_{i,j}\right)\mathbb{E}\left(\varepsilon_{i,\ell}\right) = 0$$

(loi de Rademacher)
Donc $\mathbb{E}\left(\displaystyle\sum_{j=1}^{d}\varepsilon_{i,j}u_j\right)^2 = \displaystyle\sum_{j=1}^{d}u_j^2 = \|u\|^2 = 1$ Par somme on peut conclure que $\boxed{\mathbb{E}(g(\mathrm{X})^2) = k}$
On applique Q6 à $g(\mathrm{X}) = |g(\mathrm{X})|$ et $\mathrm{Y} = 1$ et $p = q = 2$ pour obtenir $\boxed{\mathbb{E}(g(\mathrm{X})) \leqslant \sqrt{k}}$
On aurait pu faire appel à Cauchy-Schwarz.

Q 42. Par linéarité et espérance de constante puis en utilisant la question précédente car $m \geqslant 0$ car $\mathbb{P}\left(g(\mathrm{X}) \geqslant 0\right) = 1$

$$\mathbb{E}((g(\mathrm{X}) - m)^2) = \mathbb{E}((g(\mathrm{X})^2) - 2m\mathbb{E}(g(\mathrm{X})) + m^2 \geqslant \mathbb{E}((g(\mathrm{X})^2) - 2m\sqrt{k} + m^2$$

On en déduit que $\boxed{(\sqrt{k} - m)^2 \leqslant \mathbb{E}((g(\mathrm{X}) - m)^2)}$

III.C - Un lemme-clé

Q 43. On sait déjà que $g(\mathrm{X}) - m$ est à queue sous-gaussienne avec $a = 4$ et $b = 1/8$
On a $(g(\mathrm{X}) - \sqrt{k}) = \left(g(\mathrm{X}) - m + m - \sqrt{k}\right)$
Je pose alors $\delta = m - \sqrt{k}$ et ainsi $\delta^2 = (m - \sqrt{k})^2 \leqslant 32 = \frac{a}{b}$ d'après Q40. et Q42.
On a bien $0 \leqslant |\delta| \leqslant \sqrt{\frac{a}{b}}$. On peut donc utiliser Q12. et Q13.,
pour conclure que $\boxed{\text{pour tout réel strictement positif } t : \mathbb{P}(|g(\mathrm{X}) - \sqrt{k}| \geqslant t) \leqslant 4\exp(4)\exp\left(-\frac{1}{16}t^2\right)}$

Q 44. On a $(|\|\mathrm{A}_k u\| - 1| > \varepsilon) = (|\|\mathrm{X} \cdot u\| - \sqrt{k}| > \varepsilon\sqrt{k}) \subset (|g(\mathrm{X}) - \sqrt{k}| \geqslant \varepsilon\sqrt{k})$
ainsi en utilisant la question précédente avec $t = \varepsilon\sqrt{k} > 0$ on a

$$\mathbb{P}(|\|\mathrm{A}_k u\| - 1| > \varepsilon) \leqslant 4\exp(4)\exp\left(-\frac{1}{16}k\varepsilon^2\right)$$

Comme $k \geqslant 160\frac{\ln(1/\delta)}{\varepsilon^2} > 0$, on a :

$$\mathbb{P}(|\|\mathrm{A}_k u\| - 1| > \varepsilon) \leqslant 4\exp(4)\exp\left(10\ln(\delta)\right) = 4\exp(4)\delta^{10} \leqslant \frac{4\exp(4)}{2^9}\delta = \frac{\exp(4)}{2^7}\delta$$

À l'aide la calculatrice : $\dfrac{\exp(4)}{2^7} > 1$ donc pour tout vecteur unitaire u dans $\mathbb{R}^d$: $\boxed{\mathbb{P}(|\|\mathrm{A}_k u\| - 1| > \varepsilon) < \delta}$

III.D - Conclusion

Q 45. On applique Q45. avec $u = \frac{v_i - v_j}{\|v_i - v_j\|}$ pour obtenir $\boxed{\mathbb{P}(\overline{\mathrm{E}_{i,j}}) < \delta}$

Q 46. On a : $\mathbb{P}\left(\overline{\bigcap_{1 \leqslant i < j \leqslant \mathrm{N}} \mathrm{E}_{i,j}}\right) = \mathbb{P}\left(\bigcup_{1 \leqslant i < j \leqslant \mathrm{N}} \overline{\mathrm{E}_{i,j}}\right) \leqslant \sum_{1 \leqslant i < j \leqslant \mathrm{N}} \mathbb{P}\left(\overline{\mathrm{E}_{i,j}}\right) \leqslant \sum_{1 \leqslant i < j \leqslant \mathrm{N}} \delta = \frac{\mathrm{N}(\mathrm{N}-1)}{2}\delta$

En passant à l'événement contraire on obtient $\boxed{\mathbb{P}\left(\bigcap_{1 \leqslant i < j \leqslant \mathrm{N}} \mathrm{E}_{i,j}\right) \geqslant 1 - \frac{\mathrm{N}(\mathrm{N}-1)}{2}\delta}$

Q 47. Je pose alors $c = 320 > 0$. Soit $\varepsilon \in]0, 1[$. Soit N et d entiers $\geqslant 2$. Soit $v_1, \dots v_\mathrm{N}$ distincts dans $\mathbb{R}^d$.
Je prends $k \in \mathbb{N}$ tel que $k \geqslant c\dfrac{\ln(\mathrm{N})}{\varepsilon^2}$ Je choisis $\delta = \dfrac{1}{\mathrm{N}^2} \in]0, 1/2[$ de sorte que $k \geqslant 160\frac{\ln(1/\delta)}{\varepsilon^2}$
On a alors $\mathbb{P}\left(\bigcap_{1 \leqslant i < j \leqslant \mathrm{N}} \mathrm{E}_{i,j}\right) > 0$ donc $\bigcap_{1 \leqslant i < j \leqslant \mathrm{N}} \mathrm{E}_{i,j} \neq \emptyset$
Ce qui donne une matrice A_k qui donne f qui convient D'où le théorème de Johnson et Lindenstrauss.