

Le groupe $SL_n(\mathbb{Z})$

- $SL_n(\mathbb{Z}) \neq \emptyset$ car $I_n \in SL_n(\mathbb{Z})$ et bien évidemment, $SL_n(\mathbb{Z}) \subset SL_n(\mathbb{Q})$, $SL_n(\mathbb{Z})$ est stable par produit car le produit de deux matrices à coefficients dans \mathbb{Z} est une matrice à coefficients dans \mathbb{Z} et le déterminant du produit est égal au produit des déterminants.

Si $M \in SL_n(\mathbb{Z})$ alors M^T (transposée de la matrice des cofacteurs) est encore dans $SL_n(\mathbb{Z})$. Comme $MM^T = \det M \cdot I_n$ alors $M^T = M^{-1}$.

Conclusion : $SL_n(\mathbb{Z})$ est un sous-groupe de $SL_n(\mathbb{Q})$. 2

- $E_{ij}^2 = 0$ donc $M_{ij}^m = I_n + mE_{ij}$ d'après la formule du binôme quand $m \in \mathbb{N}$. Cette relation est encore valable si $m = -p \in \mathbb{Z}^-$ car $(I_n + mE_{ij})M_{ij}^p = (I_n + mE_{ij})(I_n + pE_{ij}) = I_n$, d'où $I_n + mE_{ij} = M_{ij}^{-p} = M_{ij}^m$. 1

- Si $M = (C_1 \ C_2 \ \dots \ C_n)$ est l'écriture de M sous forme de colonnes alors $MM_{ij}^m = (C_1 \ C_2 \ \dots \ C_j + mC_i \ \dots \ C_n)$ (la colonne C_j est remplacée par $C_j + mC_i$). 1

- Commençons par traiter le cas $n = 2$: on utilise l'algorithme d'Euclide.

(i) Si $a_1 \geq 0$ et $a_2 = 0$, c'est terminé.

(ii) Si $a_1 < 0$ et $a_2 = 0$ alors on effectue les opérations suivantes :

$$(a_1 \ 0) \xrightarrow{C_2 \leftarrow C_2 + C_1} (a_1 \ a_1) \xrightarrow{C_1 \leftarrow C_1 - 2C_2} (-a_1 \ a_1) \xrightarrow{C_2 \leftarrow C_2 + C_1} (-a_1 \ 0)$$

(iii) Si $a_2 \neq 0$ alors c'est là que commence l'algorithme d'Euclide : on écrit successivement

$$a_2 = q_1 a_1 + r_1, \quad a_1 = q_2 r_1 + r_2, \quad \dots, \quad r_l = q_{l+2} r_{l+1} + r_{l+2}, \quad \dots, \quad r_k = q_{k+2} r_{k+1}$$

où $r_l = q_{l+2} r_{l+1} + r_{l+2}$ est la division euclidienne de r_l par r_{l+1} et $r_{k+1} = d$, P.G.C.D. de a_2 et a_1 . On fait alors les opérations qui suivent :

$$(a_1 \ a_2) \xrightarrow{C_2 \leftarrow C_2 - q_1 C_1} (a_1 \ r_1) \xrightarrow{C_1 \leftarrow C_1 - q_2 C_2} (r_2 \ r_1) \dots (r_{2p} \ r_{2p+1}) \dots \begin{cases} (d \ 0) & 1 \\ (0 \ d) & 2 \end{cases}$$

Dans le premier cas, c'est fini, dans le deuxième, on fait

$$(0 \ d) \xrightarrow{C_1 \leftarrow C_1 + C_2} (d \ d) \xrightarrow{C_2 \leftarrow C_2 - C_1} (d \ 0).$$

Cas général : on utilise l'associativité du P.G.C.D., on obtiendra successivement $(d_1 \ 0 \ a_3 \ \dots \ a_n)$ où $d_1 = a_1 \wedge a_2$ puis $(d_2 \ 0 \ 0 \ a_4 \ \dots \ a_n)$ où $d_2 = d_1 \wedge a_3 = a_1 \wedge a_2 \wedge a_3$ en opérant sur les premières et troisième colonnes et par une récurrence finie sur les colonnes suivantes $(d \ 0 \ \dots \ 0)$. 15

- Soit $M \in SL_n(\mathbb{Z})$, comme $\det M = 1$ alors, en développant selon n'importe quelle ligne, on prouve que le P.G.C.D. des éléments d'une même ligne vaut 1. On note G_n le groupe engendré par les matrices $M_{i,j}$, on remarque que c'est un sous-groupe de $SL_n(\mathbb{Z})$. L'objectif ici est de prouver que $G_n = SL_n(\mathbb{Z})$.

En faisant les opérations de la question précédente sur la première ligne de M alors

on a $MC_1 = M_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ a'_{21} & a'_{22} & \dots & a'_{2n} \\ \vdots & & & \\ a'_{n1} & a'_{n2} & & a'_{nn} \end{pmatrix}$ où C_1 est un produit de matrices $M_{i,j}$ donc

appartient à G_n .

On peut ensuite opérer sur la deuxième ligne de M_1 à partir de la deuxième colonne pour obtenir la matrice $MC_1C_2 = M_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ a'_{21} & d_2 & \dots & 0 \\ \vdots & & M_2'' & \\ a'_{n1} & a''_{n2} & & \end{pmatrix}$ où d_2 est le P.G.C.D. des termes a'_{22}, \dots, a'_{2n} . En fait $d_2 = 1$ car $\det(MC_1C_2) = 1 = \underbrace{d_2}_{\in \mathbb{N}} \times \underbrace{\det M_2''}_{\in \mathbb{Z}}$. La première

colonne est inchangée car les opérations élémentaires que l'on a faites ont concerné les colonnes 2 à n .

En appliquant cet algorithme aux autres lignes, on trouve une matrice triangulaire inférieure $M_n = MC = \begin{pmatrix} 1 & & & 0 \\ & \ddots & & \\ & & m_{ij} & \\ & & & 1 \end{pmatrix}$ où $C \in G_n$. On retranche à la k -ième colonne,

la dernière multipliée par m_{nk} , pour $k \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket$, la dernière ligne ne comporte alors que des 0 sauf sur la diagonale. On reprend le même processus avec les autres lignes, finalement on obtient la matrice I_n .

On aura $C^T M^T = D$ où $D \in G_n$ soit $M = D^T C^{-1} \in G_n$ car G_n est stable par transposition et par inversion.

Conclusion : on avait $G_n \subset \text{SL}_n(\mathbb{Z})$ et on vient de prouver l'inclusion inverse donc $\text{SL}_n(\mathbb{Z})$ est engendré par les matrices $M_{i,j}$ **10**

6. a) $\text{SL}_n(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})$ est bien un groupe, on fait la même démonstration que pour la question 1 et on utilise l'expression du produit dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ pour n'importe quel corps \mathbb{K} . **0**

b) On veut prouver que si $\overline{M} \in \text{SL}_n(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})$ alors il existe une matrice $M \in \text{SL}_n(\mathbb{Z})$ telle que $\overline{M} = \varphi_{n,p}(M)$. En d'autres termes, si $N \in \mathcal{M}_n(\mathbb{Z})$ est telle que $\det N \equiv 1[p]$ alors il existe $M \in \text{SL}_n(\mathbb{Z})$ telle que $N \equiv M[p]$.

- Le cas $n = 1$ est immédiat.
- On suppose la propriété vraie à l'ordre n .

Soit $N \in \mathcal{M}_{n+1}(\mathbb{Z})$ telle que $\det N \equiv 1[p]$. D'après la question 4, on sait qu'il existe $C \in \text{SL}_{n+1}(\mathbb{Z})$ telle que $NC = \begin{pmatrix} d & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & N' & & \end{pmatrix}$ avec $d \underbrace{\det N'}_{\Delta'} = 1 + kp$.

En faisant la manipulation de la question 4 alors la première ligne de la matrice NC va se transformer de la manière suivante :

$$\begin{aligned} (d \ 0 \ \dots) &\xrightarrow{C_2 \leftarrow C_2 + \Delta' C_1} (d \ 1 + kp \ \dots) \\ &\xrightarrow{C_1 \leftarrow C_1 - d C_2} (-dkp \ 1 + kp \ \dots) \\ &\xrightarrow{C_1 \leftarrow C_1 + C_2} (1 + kp - dkp \ 1 + kp) \\ &\xrightarrow{C_2 \leftarrow C_2 - C_1} (1 + kp - dkp \ -dkp \ \dots) \end{aligned}$$

d'où, si $C' \in \text{SL}_n(\mathbb{Z})$ est la matrice qui correspond à toutes ces manipulations, on aura $NC' \equiv \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots \\ \vdots & N'' & \end{pmatrix}$ et $\det N'' \equiv 1[p]$, on applique alors la récurrence à N'' .

Finalement, on a $NC'' \equiv D[p]$ où $D \in \text{SL}_n(\mathbb{Z})$ (D est une matrice triangulaire inférieure et tous ses termes diagonaux sont égaux à 1).

On en déduit $N \equiv C''^{-1} D[p]$ car $\varphi_{n+1,p}$ est un morphisme de groupes... **15**

Sous-groupes finis de $SL_n(\mathbb{Z})$

7. a) • (M) , le sous-groupe de G engendré par M est fini donc il existe $k \in \mathbb{N}^*$ tel que $M^k = I_n$. $X^k - 1$ est un polynôme annulateur de M qui est scindé, à racines simples sur \mathbb{C} donc M est diagonalisable sur \mathbb{C} **1**
- Toutes les valeurs propres de M sont racines de $X^k - 1$ donc $\text{Tr}(M) = \sum_{j=1}^n \lambda_j$
 où les λ_j sont des complexes de module 1 donc $\overline{\lambda_j} = \frac{1}{\lambda_j}$ et $M = \overline{M}$ car M est à coefficients réels d'où

$$\text{Tr}(M) = \text{Tr}(\overline{M}) = \sum_{j=1}^n \overline{\lambda_j} = \sum_{j=1}^n \frac{1}{\lambda_j} = \text{Tr}(M^{-1}) \quad \mathbf{1}$$

- $|\text{Tr}(M)| \leq \sum_{j=1}^n |\lambda_j| = n$ **0**
- $\text{Tr}(M) = n \Leftrightarrow \sum_{j=1}^n \lambda_j = n$ et, en prenant les parties réelles, $\sum_{j=1}^n \text{Re}(\lambda_j) = n$.
 Comme $\lambda_j = x_j + iy_j$ avec $x_j^2 + y_j^2 = 1$ alors $x_j \leq 1$ donc $x_j = 1$ et $y_j = 0$. M est une matrice diagonalisable qui n'a que 1 comme valeur propre, c'est donc l'identité. De même pour $\text{Tr}(M) = -n$.
 Conclusion : $\text{Tr}(M) = n \Leftrightarrow M = I_n$ et $\text{Tr}(M) = -n \Leftrightarrow M = -I_n$ (à condition que $-I_n \in G$). **2**

- b) U est symétrique définie positive en tant que somme de matrices symétriques définies positives (en effet, $X^T M^T M X = \|MX\|^2 \geq 0$ et, comme M est inversible, si $X \neq 0$ alors $MX \neq 0$ donc $\|MX\|^2 > 0$). **1**
- c) Soit $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$, N sa matrice élément de G alors

$$N^T U N = \sum_{M \in G} (MN)^T M N = \sum_{M \in G} M^T M = U$$

car $M \mapsto MN$ est une bijection de G donc f est orthogonal pour ce produit scalaire. **2**

8. a) Les endomorphismes de \mathbb{R}^2 dont les matrices appartiennent au groupe G sont donc des rotations pour le produit scalaire défini par U (ce ne sont pas des symétries car leur déterminant vaut 1). Comme G est fini, on sait que $r^{\text{Card}G} = \text{Id}_{\mathbb{R}^2}$ donc G est isomorphe à un sous groupe de $\mathbb{U}_{\text{Card}G}$. Comme tout sous-groupe d'un groupe cyclique est cyclique alors G est cyclique. **4**
- b) Si λ_1 et λ_2 désignent les valeurs propres d'un élément M qui engendre G alors on sait que $|\lambda_1 + \lambda_2| = |2 \cos \theta| \leq 2$. On aura ainsi 5 possibilités correspondant à $\lambda_1 + \lambda_2 \in \{-2, -1, 0, 1, 2\}$ ($\lambda_1 + \lambda_2 = \text{Tr}(M) \in \mathbb{Z}$).
- $\lambda_1 + \lambda_2 = 2$ alors $M = I_2, G = \{I_2\}$
 - $\lambda_1 + \lambda_2 = -2$ alors $M = -I_2, G = \{\pm I_2\}$,
 - $\cos \theta = \frac{1}{2}$ alors $\theta = \pm \frac{\pi}{3}, G$ est d'ordre 6, **4**
 - $\cos \theta = -\frac{1}{2}$ alors $\theta = \pm \frac{2\pi}{3}, G$ est d'ordre 3,
 - $\cos \theta = 0$ alors $\theta = \pm \frac{\pi}{2}, G$ est d'ordre 4.

Il est à noter que l'on a étudié toutes les possibilités pour G .

- c) Si M est d'ordre 2 alors $G = \{I_1, M\}$ est un sous-groupe fini de $SL_2(\mathbb{Z})$ auquel on peut appliquer le résultat précédent donc $M = -I_2$. La réciproque est évidente. **2**

- d) Si l'ordre de G vaut 3 alors $\text{Tr}(M) = -1$ vu le \mathbf{b} , réciproquement, si $\text{Tr}(M) = -1$ alors $M^2 + M + I_2 = 0$ donc $M^3 = I_2$ et $M \neq I_2$ donc l'ordre de M vaut 3.
Si l'ordre de M vaut 4 alors $\text{Tr}(M) = 0$, réciproquement, si $\text{Tr}(M) = 0$ alors $M^2 + I_2 = 0$ donc $M^4 = I_2$, l'ordre de M vaut 4.
Card $G = 6 \Leftrightarrow \text{Tr}(M) = 1$ de même. **4**

- e) On note $J = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ et $K = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. Les groupes suivants conviennent :
 $G = (I_2) = \{I_2\}$, Card $G = 1$,
 $G = (-I_2) = \{\pm I_2\}$, Card $G = 2$,
 $G = (J) = \{I_2, J, J^2\}$, Card $G = 3$, **3**
 $G = (K) = \{\pm I_2, \pm K\}$, Card $G = 4$,
 $G = (-J) = \{\pm I_2, \pm J, \pm J^2\}$, Card $G = 6$.

- 9. A priori on a $\text{Tr}(M) \in \llbracket -3, 3 \rrbracket$ mais on sait que l'endomorphisme associé à M est une rotation pour le produit scalaire défini par U donc $\text{Tr}(M) = 1 + 2 \cos \theta \in \llbracket -1, 3 \rrbracket$. **1**
 Pour $\text{Tr}(M) = -1$ on a $\theta \equiv \pi \pmod{2\pi}$ et $\text{ord}(M) = 2$.
 Pour $\text{Tr}(M) = 0$ on a $\theta \equiv \pm \frac{2}{3}\pi \pmod{2\pi}$ et $\text{ord}(M) = 3$.
 Pour $\text{Tr}(M) = 1$ on a $\theta \equiv \pm \frac{1}{2}\pi \pmod{2\pi}$ et $\text{ord}(M) = 4$.
 Pour $\text{Tr}(M) = 2$ on a $\theta \equiv \pm \frac{1}{3}\pi \pmod{2\pi}$ et $\text{ord}(M) = 6$.
 Pour $\text{Tr}(M) = 3$ on a $\theta \equiv 0 \pmod{2\pi}$ et $\text{ord}(M) = 1$.
 Pour trouver des matrices qui conviennent dans chacun des cas ci-dessus, il suffit de prendre $M = \begin{pmatrix} N & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ où N est l'une des matrices de la question 8.e. **3**

- 10. a) On a immédiatement

$$\text{Tr}(M \star M') = \sum_{(i,i') \in I \times I'} a_{i,i} b_{i',i'} = \sum_{i \in I} a_{i,i} \sum_{i' \in I'} b_{i',i'} = \text{Tr}(M) \text{Tr}(M').$$
 1

- b) On pose $M = (a_{i,j})$, $N = (b_{i,j})$, $M' = (a'_{i',j'})$, $N' = (b'_{i',j'})$ et $(MN) \star (M'N') = (c_{(i,i'),(j,j')})$ alors

$$c_{(i,i'),(j,j')} = \sum_{k \in I} a_{i,k} b_{k,j} \times \sum_{k' \in I'} a'_{i',k'} b'_{k',j'} = \sum_{(k,k') \in I \times I'} (a_{i,k} a'_{i',k'}) \times (b_{k,j} b'_{k',j'})$$

donc $(MN) \star (M'N') = (M \star M')(N \star N')$ **1**

- c) Évident en utilisant les deux résultats précédents. **0**

- 11. a) Classique, on a $S^2 = \sum_{(M,N) \in G^2} MN = gS$ car $M \mapsto MN$ est une bijection de G .
 On remarque alors que $\frac{1}{g}S$ est un projecteur et comme la trace d'un projecteur est un entier (égal à son rang) alors $\text{Tr}(S) = g \text{Rg}(S)$ donc la trace de S est un entier divisible par g **2**

- b) $M \in \text{Ker } \psi_r \Leftrightarrow M^{*r} = I_{\llbracket 1, n \rrbracket^r}$ donc $\text{Tr}(M)^r = n^r$. On en déduit que $\text{Tr}(M) = \pm n$ donc $M = \pm I_n$ vu la question 7.a.
 Conclusion : $\text{Ker } \psi_r = \{I_n\}$ si r est impair ou si $-I_n \notin G$, $\text{Ker } \psi_r = \{\pm I_n\}$ si r est pair et si $-I_n \in G$ **2**

- c) Si $\text{Ker } \psi_r = \{I_n\}$ alors $G_r = \{M^{*r}, M \in G\}$ est un sous-groupe de $\text{GL}_{\llbracket 1, n \rrbracket^r}(\mathbb{R})$ de même cardinal que G donc, en appliquant le résultat du a à $S_r = \sum_{M \in G} M^{*r}$, on en déduit que g divise $\sum_{M \in G} \text{Tr}(M)^r$.
 Si $\text{Ker } \psi_r = \{-I_n, I_n\}$ alors si $M \in G$, $-M \in G$, $g = 2g'$ où $g' = \text{Card } G_r$. On pose

$S_r = \sum_{M_r \in G_r} M_r = \frac{1}{2} \sum_{M \in G} M^{*r}$, g' divise $\text{Tr}(S_r)$ donc on arrive à la même conclusion que ci-dessus. **4**

12. a) Comme G est un sous-groupe de $\text{SL}_n(\mathbb{R})$ alors les t_i sont des entiers donc le polynôme P est à coefficients entiers. On sait ensuite que I_n est le seul élément de G de trace égale à n donc $P(\text{Tr}(M)) = 0$ pour tous les autres éléments de G . Si on pose $P = \sum_{k=0}^s a_k X^k$ alors

$$\begin{aligned} \sum_{M \in G} P(\text{Tr}(M)) &= \sum_{k=0}^s a_k \left(\sum_{M \in G} \text{Tr}(M)^k \right) = mg, \quad m \in \mathbb{N}^* \\ &= P(\text{Tr}(I_n)) = P(n) \end{aligned}$$

donc $P(n)$ est un entier divisible par g **4**

b) Comme les $t_i \in \llbracket -n, n-1 \rrbracket$ alors $\prod_{k=1}^s (n - t_k)$ divise $\prod_{l=-n}^{n-1} (n - l) = (2n)!$ donc g divise $(2n)!$ **2**

Si n est impair alors $-I_n \notin G$ car $\det(-I_n) = -1$ donc on peut reprendre le produit ci-dessus à partir de $l = -n + 1$ et conclure g divise $(2n - 1)!$ **1**

c) Si $n = 3$ alors, vu la question **9**, -2 n'est pas une valeur possible pour la trace d'un élément de G donc g divise $(2n - 2)! = 24$ **3**

13. a) Soit $\sigma \in \mathfrak{S}_n$, on considère $\mathcal{M}_\sigma = \{M \in \text{GL}_n(\mathbb{Z}) \mid MT_i = \pm T_{\sigma_i}\}$. \mathcal{M}_σ est la réunion de deux ensembles de même cardinal, \mathcal{M}_σ^+ , ensemble des matrices de déterminant 1 et \mathcal{M}_σ^- , ensemble des matrices de déterminant -1 . Or $\text{Card } \mathcal{M}_\sigma = 2^n$ donc $\text{Card } \mathcal{M}_\sigma^+ = 2^{n-1}$.

Soit $G = \bigcup_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \mathcal{M}_\sigma^+$ alors $\text{Card } G = 2^{n-1}n!$ et G est l'ensemble des matrices de $\text{SL}_n(\mathbb{Z})$ qui conservent T qui est bien un sous-groupe de $\text{SL}_n(\mathbb{Z})$ **4**

b) Le cardinal maximal cherché est donc 24. **0**

14. a) On a $M^p = I_n$ donc

$$(I_n + mN)^p = I_n + pmN + m^2H = I_n$$

donc, en simplifiant par $m \neq 0$, $pN = -mH$ or les coefficients de la matrice N sont premiers dans leur ensemble donc il existe des $a_{ij} \in \mathbb{Z}$ tels que $\sum_{i,j} a_{ij}n_{ij} = 1$ (où

$N = (n_{ij})$. On a alors $-m \sum_{i,j} a_{ij}h_{ij} = p$ i.e. m divise p **4**

b) On a donc soit $m = 1$ soit $m = p$.

Si $p \geq 3$ et $m = p$ alors, en reprenant le calcul ci-dessus, on obtient $p^2N = -\sum_{k=2}^p p^k \binom{p}{k} N^k = p^3K$ car $p \mid \binom{p}{k}$ pour $k \in \llbracket 1, p-1 \rrbracket$ ce qui est impossible.

Conclusion : $m = 1$ ou $m = p = 2$ **3**

15. a) Si $g = 1$, c'est immédiat, supposons $g \geq 2$. On sait que, pour tout élément M de G , on a $M^g = I_n$ donc l'ordre q de M est un diviseur de g .

Supposons que $\varphi_{n,3}(M) \equiv I_n[3]$, $M \neq I_n$. Si p est un diviseur premier de q alors $M^{q/p}$ est d'ordre p . On a $\varphi_{n,3}(M^{q/p}) \equiv I_n[3]$ donc $M^{q/p} = I_n + 3N$, d'où, si $N \neq 0$, $3 \mid m$ (question **14.a**) ce qui est impossible (question **14.b**).

Conclusion : on a $M^{q/p} = I_n$ avec $q/p < q$ ce qui est impossible là encore car $\text{ord}(M) = q$ donc $M = I_n$ **5**

b) $\varphi_{n,3}(G)$ est un sous-groupe de $\text{SL}_n(\mathbb{Z}/3\mathbb{Z})$ de même cardinal que G .
 Or on sait que $\text{Card GL}_n(\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}) = (3^n - 1)(3^n - 3^2)(\dots)(3^n - 3^{n-1})$, en effet, il suffit de dénombrer les familles libres à n éléments dans $(\mathbb{Z}/3\mathbb{Z})^n$:
 pour le premier vecteur, on a $3^n - 1$ choix (on prend n'importe quel vecteur non nul),

pour le deuxième vecteur, on choisit un vecteur non proportionnel au premier, ce qui donne $3^n - 3$ choix (on a enlevé tous les vecteurs portés par la droite engendrée par le premier vecteur),

pour le k -ième vecteur, on a $3^n - 3^{k-1}$ choix (il faut enlever les vecteurs qui appartiennent à l'espace vectoriel engendré par les $k - 1$ premiers vecteurs).

On peut alors faire une partition de $\text{GL}_n(\mathbb{Z}/3\mathbb{Z})$ selon le déterminant : soit il vaut 1, soit il vaut $-1 = 2$. Par symétrie, chaque ensemble de la partition a le même nombre d'éléments donc

$$g \mid \text{Card SL}_n(\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}) = \frac{1}{2}(3^n - 1)(3^n - 3)(\dots)(3^n - 3^{n-1}). \quad \mathbf{5}$$

c) $5760 = 80 \times 72$, on sait que g divise $40 \times 78 \times 72 \times 54 = 80 \times 72 \times 2 \times 3^4 \times 13$ vu la question précédente et qu'il divise aussi $8! = 80 \times 72 \times 7$ donc il divise leur P.G.C.D. qui est 5760. **2**

16. Soit $G = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ si $a \in G$ alors $a * a_i = a_j$ et l'application $i \in \llbracket 1, g \rrbracket \mapsto j \in \llbracket 1, g \rrbracket$ est une bijection σ . Soit $\varphi : a \in G \mapsto \sigma \in \mathfrak{S}_g$, on vérifie que φ est bien un morphisme de groupes injectif.

Si maintenant on considère $\psi : \sigma \in \mathfrak{S}_g \mapsto P_\sigma \in \text{GL}_g(\mathbb{Z})$ où P_σ est la matrice de permutation associée à σ alors $\theta = \psi \circ \varphi$ est un morphisme de groupe injectif de G dans l'ensemble des matrices inversibles dans $\mathcal{M}_g(\mathbb{Z})$ (de déterminant ± 1).

- Si g est impair alors $\theta(a)^g = I_n$ donc $\det \theta(a)^g = 1$ soit $\theta(a) \in \text{SL}_n(\mathbb{Z})$ et par conséquent $\theta(G)$ est un sous-groupe de $\text{SL}_n(\mathbb{Z})$ isomorphe à G .
- Si g est pair, cela pose plus de problèmes...

On remarque que l'hyperplan $H = \{(x_1, \dots, x_g) \in \mathbb{Q}^g \text{ tq } x_1 + \dots + x_g = 0\}$ est stable par toutes les applications $\theta(a)$. Ceci permet de co-trigonaliser par blocs les matrices $\theta(a)$ à l'aide d'une base de \mathbb{Q}^g commençant par une base de H .

Plus précisément, soit $P = \begin{pmatrix} I_{n-1} & (0) \\ -1 \dots -1 & 1 \end{pmatrix}$: si $a \in G$ alors la matrice $P^{-1}\theta(a)P$

est de la forme $P^{-1}\theta(a)P = \begin{pmatrix} N(a) & X \\ 0 \dots 0 & y \end{pmatrix}$ avec $X \in \mathcal{M}_{g-1,1}(\mathbb{Z})$ et $y \in \mathbb{Z}$. Puisque $\theta(a) \in \text{GL}_g(\mathbb{Z})$, on a $N(a) \in \text{GL}_{g-1}(\mathbb{Z})$ et l'application $a \mapsto N(a)$ est un morphisme de groupes de G dans $\text{GL}_{g-1}(\mathbb{Z})$. Ce morphisme est injectif car si $N(a) = I_{g-1}$ alors $\theta(a)$ induit l'identité sur H , et aussi sur la droite vectorielle engendrée par le vecteur $(1, \dots, 1)$ qui est supplémentaire de H dans \mathbb{Q}^g , donc $\theta(a) = \text{Id}_{\mathbb{Q}^g}$ ce qui implique

$a = 1_G$. On note alors $Q(a) = \begin{pmatrix} N(a) & (0) \\ 0 \dots 0 & \det(N(a)) \end{pmatrix}$: l'application $a \mapsto Q(a)$ est un morphisme de groupes de G dans $\text{SL}_g(\mathbb{Z})$, injectif. **20**

Morphismes de groupes et $SL_n(\mathbb{Z})$

17. On sait déjà (question 6.b qu'il existe un morphisme surjectif de $SL_2(\mathbb{Z})$ sur $SL_2(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$. Or on peut décrire ce dernier ensemble :

$$SL_2(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) = \left\{ \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}_{=I_2}, \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}}_{=A_1}, \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}_{=A_2}, \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}}_{=A_3}, \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}}_{=A_4}, \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}}_{=A_5} \right\}$$

et on remarque que $A_1^2 = A_2^2 = A_3^2 = I_2$, $A_4^2 = A_5^2$ et $A_5 = A_4^2$, si on pose $\psi(A_1) = t_{1,2}$, $\psi(A_2) = t_{1,3}$, $\psi(A_3) = t_{2,3}$, $\psi(A_4) = (1, 3, 2)$ et $\psi(A_5) = (1, 2, 3)$ alors ψ est un morphisme surjectif de $SL_2(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$ sur \mathfrak{S}_3 .

Pour conclure, il suffit de prendre $\varepsilon : \sigma \in \mathfrak{S}_3 \mapsto \varepsilon(\sigma)$ signature de σ . $\varepsilon \circ \psi \circ \varphi$ est alors un morphisme surjectif de $SL_2(\mathbb{Z})$ sur $\{-1, 1\} \sim \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ **4**

18. a) Par un calcul simple, on trouve $M_{ij}M_{jk}M_{ij}^{-1}M_{jk}^{-1} = M_{ik}$ **1**

b) Si φ est un tel morphisme, alors $\varphi(M_{ik}) = \varphi(M_{ij})\varphi(M_{jk})\varphi(M_{ij})^{-1}\varphi(M_{jk})^{-1} = 1_G$. Les M_{ik} engendrant $SL_n(\mathbb{Z})$, on en déduit $\varphi(M) = 1_G$ pour toute matrice $M \in SL_n(\mathbb{Z})$.

Conclusion : tout morphisme de $SL_n(\mathbb{Z})$ sur G est constant. **1**

19. a) Soit $\{a_1, \dots, a_p\}$ la partie génératrice de G , on sait alors que tout morphisme φ de G dans H est déterminé de manière unique par $\varphi(a_i)$, $i \in \llbracket 1, p \rrbracket$. Comme H est fini, il n'y a qu'un choix fini pour chaque valeur de $\varphi(a_i)$ donc il n'y a qu'un nombre fini de morphismes de G dans H (nombre majoré par $\text{Card } H^p$). **1**

b) Soit E l'ensemble des morphismes de G dans H . L'application $\psi : f \mapsto f \circ u$ de E dans E est injective car u est surjectif, et donc bijective car E est fini. Ainsi tout élément v de E est de la forme $v = f \circ u$ avec $f \in E$, d'où $\text{Ker } u \subset \text{Ker } v$ **4**

20. On prend $H = \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$, $v = \varphi_{n,p}$ alors $\text{Ker } u \subset \text{Ker } \varphi_{n,p}$ soit $u(M) = I_n \Rightarrow M \equiv I_n[p]$ i.e. p divise tous les coefficients de la matrice $u(M) - I_n \in \mathcal{M}_n(\mathbb{Z})$ et ceci n'est possible que si $u(M) = I_n$.

Conclusion : u est injective donc bijective, i.e. tout morphisme de groupe surjectif de $SL_n(\mathbb{Z})$ sur $SL_n(\mathbb{Z})$ est bijectif. **7**