ÉCOLE POLYTECHNIQUE **FILIÈRE MP**

CONCOURS D'ADMISSION 2000

DEUXIÈME COMPOSITION DE MATHÉMATIQUES

(Durée : 4 heures)

L'utilisation des calculatrices n'est pas autorisée pour cette épreuve.

⋆⋆⋆

On attachera la plus grande importance à la clarté, à la précision et à la concision de la rédaction.

⋆⋆⋆

Ce problème a pour objet l'étude de certains cônes dans des espaces euclidiens.

On désigne par E l'espace euclidien $\mathbf{R}^n (n \geq 1)$, par $(.|.)$ son produit scalaire usuel, et par $\|.\|$ la norme associée. Pour toute partie X de E, on note $X^\perp$ (resp. X^+) l'ensemble des éléments x de E satisfaisant $(x|y) = 0$ (resp. $(x|y) \geq 0$) pour tout y de X.

Une partie C de E sera appelée *cône à faces* s'il existe une famille finie d'éléments $c_1, \ldots, c_r \, (r > 0)$ de E telle que C soit l'ensemble des combinaisons linéaires $\sum_{i=1}^{r} \lambda_i c_i$ avec $\lambda_1, \ldots, \lambda_r \geq 0$. On supposera toujours les c_i non nuls, et on dira qu'ils *engendrent* C. Enfin on appelle *face* de C toute partie de C de la forme $C \cap \{w\}^\perp$ avec $w \in C^+$.

La première partie est indépendante des suivantes.

Première partie

1. Vérifier que tout sous-espace vectoriel non nul de E est un cône à faces.

2. Supposant $n = r = 2$, décrire (sans démonstration mais avec des figures) les ensembles C, C^+ et donner sous chaque figure la liste des faces de C suivant les diverses positions relatives de c_1 et c_2.

3. Supposant que $n = r = 3$ et que (c_1, c_2, c_3) est une base orthogonale de E, décrire sans démonstration C, C^+ et les faces de C.

Deuxième partie

On se propose, dans cette partie, de démontrer que tout cône à faces est fermé dans E.

4.a) Soit K une partie compacte de E ne contenant pas 0. Montrer que l'ensemble des éléments de la forme λx, où $\lambda \in \mathbf{R}_+$ et $x \in K$, est fermé dans E.

b) Ce résultat subsiste-t-il si l'on suppose K seulement fermé, ou si K, compact, contient 0 ?

5. On considère maintenant un cône à faces C engendré par des éléments $c_1, \ldots, c_r$.

a) Montrer que C est fermé lorsqu'il ne contient aucune droite vectorielle. [On pourra introduire l'ensemble K des éléments $\sum_{i=1}^{r} \lambda_i c_i$ avec $\lambda_i \in \mathbf{R}_+$ et $\sum_{i=1}^{r} \lambda_i = 1$.]

b) Soit V un sous-espace vectoriel de E (éventuellement réduit à 0) contenu dans C et distinct de C. On note P le projecteur orthogonal de E sur $V^\perp$. Vérifier que $P(C)$ est un cône à faces contenu dans C.

c) Supposant que $P(C)$ contient une droite vectorielle, construire un sous-espace vectoriel de E contenu dans C et contenant strictement V.

d) Montrer que C est fermé dans E.

Troisième partie

6. On se propose ici de démontrer que tout cône à faces C vérifie $(C^+)^+ = C$.

a) Soit a un élément de E. Montrer que la fonction réelle définie sur C par $c \mapsto \|c - a\|$ atteint sa borne inférieure en un point unique de C. On le notera $p(a)$.

b) Déterminer le signe de $(p(a) - a | c)$ lorsque $c \in C$, ainsi que la valeur de $(p(a) - a | p(a))$.

c) Conclure.

Quatrième partie

On souhaite maintenant démontrer que tout cône à faces est l'intersection d'une famille finie de demi-espaces fermés (on appelle *demi-espace fermé* tout sous-ensemble de E de la forme $\{a\}^+$ avec $a \in E$, $a \neq 0$).

7. Démontrer l'équivalence des conditions suivantes relatives à un cône à faces C :

(α) le sous-espace vectoriel de E engendré par C est égal à E ;

(β) l'intérieur de C est non vide.

8. On suppose dans cette question les conditions de la question **7.** satisfaites pour un cône à faces C.

a) Démontrer l'équivalence des conditions suivantes relatives à un élément x de C :

(α') x est un point frontière de C ;

(β') x appartient à une face de C distincte de C.

b) Que subsisterait-il de ce résultat si l'on ne supposait pas satisfaites les conditions de la question **7.** ?

c) Soit x un point de E n'appartenant pas à C. Construire une face F de C, distincte de C et ayant la propriété suivante : pour tout $w \in C^+$ tel que $F = C \cap \{w\}^\perp$, on a $(x|w) < 0$.

[On pourra considérer le segment de droite joignant x à un point x_0 de l'intérieur de C].

9.a) Montrer que l'ensemble des faces d'un cône à faces est fini.

b) Montrer que tout cône à faces est l'intersection d'une famille finie de demi-espaces fermés.

10. Déduire de ce qui précède que, si C est un cône à faces, il en est de même de C^+.

* *
*