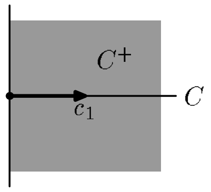
Ecole Polytechnique 2000 MP $2^{\text{ème}}$ épreuve

Partie I

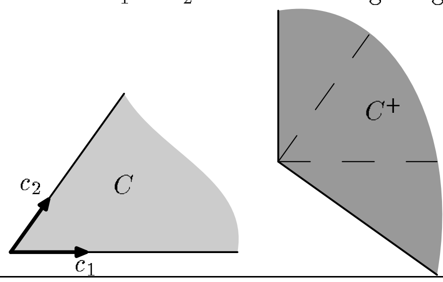
1. Soit F un sous-espace vectoriel non nul de E, et $(u_1, \dots, u_p)$ une base de F. F est l'ensemble des combinaisons linéaires à coefficients positifs ou nuls des vecteurs $(u_1, \dots, u_p - u_1, \dots, -u_p)$, donc F est un cône à faces.
2. Distinguons quatre cas, selon la position respective de c_1 et c_2 :

Cas 1 : $c_2 = \alpha c_1$, $\alpha > 0$.

C est la demi-droite $\mathbb{R}^+ c_1$.
C^+ est un demi-plan.

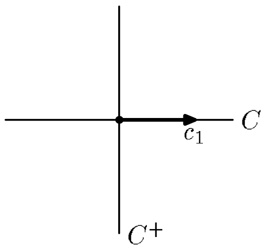


Cas 2 : c_1 et c_2 forment un angle aigu.

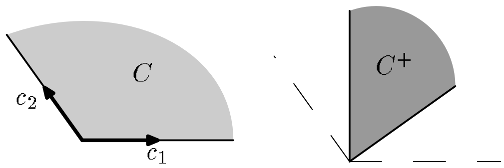


Cas 3 : $c_2 = \alpha c_1$, $\alpha < 0$.

C est la droite $\mathbb{R} c_1$.
C^+ est la droite orthogonale à C passant par O.



Cas 4 : c_1 et c_2 forment un angle obtu.



Dans les cas 2 et 4, les faces de C sont le vecteur nul et les deux demi-droites $\mathbb{R}^+ c_1$ et $\mathbb{R}^+ c_2$.
Dans les cas 1 et 3, les seules faces de C sont C lui-même, et bien sûr le vecteur nul.

3. $\left(\dfrac{c_1}{\|c_1\|}, \dfrac{c_2}{\|c_2\|}, \dfrac{c_3}{\|c_3\|}\right)$ est une base orthonormée de E.
C est alors le quadrant formé des vecteurs $xc_1 + yc_2 + zc_3$ avec $x \geq 0$, $y \geq 0$ et $z \geq 0$.
$C^+ = C$.
Les faces de C sont les quarts de plan $(x \geq 0, y \geq 0, z = 0)$, $(x \geq 0, y = 0, z \geq 0)$, $(x = 0, y \geq 0, z \geq 0)$, ainsi que les demi-droites $\mathbb{R}^+ c_1$, $\mathbb{R}^+ c_2$, $\mathbb{R}^+ c_3$ et le vecteur nul.

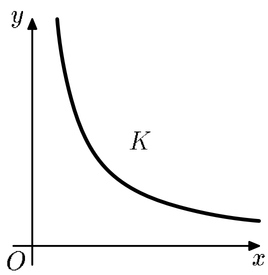
Partie II

4. (a) Soit $(\lambda_n x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite convergente vers y, $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ étant une suite dans K et $(\lambda_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite dans $\mathbb{R}^+$. On veut montrer que y appartient à $L = \{\lambda x \ / \ \lambda \in \mathbb{R}^+, \ x \in K\}$.
Par compacité de K, on peut extraire de $(x_n)_n$ une suite $\left(x_{\phi(n)}\right)_n$ qui converge vers $x \in K$. 0 n'appartenant pas à K, $x \neq 0$, donc il existe n_1 tel que $\forall n \geq n_1$, $\left\|x_{\phi(n)}\right\| \geq \dfrac{\|x\|}{2}$.
$\left(\lambda_{\phi(n)} x_{\phi(n)}\right)_n$ converge vers y, donc il existe n_2 tel que $\forall n \geq n_2$, $\left\|\lambda_{\phi(n)} x_{\phi(n)}\right\| \leq 1 + \|y\|$.
Ainsi, $\forall n \geq \max(n_1, n_2)$, $\left|\lambda_{\phi(n)}\right| \leq 2\dfrac{1 + \|y\|}{\|x\|}$. $\left(\lambda_{\phi(n)}\right)_n$ est donc une suite bornée, on peut donc en extraire une sous-suite convergente $\left(\lambda_{(\phi \circ \psi)(n)}\right)_n$ de limite λ.
Dés lors, $\left(x_{(\phi \circ \psi)(n)}\right)_n$ converge vers x par extraction, et $\left(\lambda_{(\phi \circ \psi)(n)} x_{(\phi \circ \psi)(n)}\right)_n$ converge vers λx. Par unicité de limite, il en résulte que $y = \lambda x$.

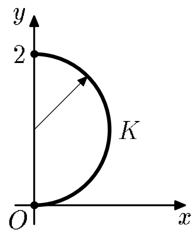
Toute suite convergente d'éléments de L a sa limite dans L, donc L est fermé.

(b) Deux contre-exemples :

- Soit $K = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ / \ x \geq 0 \text{ et } xy = 1\}$. K est fermé (comme graphe de la fonction $x \mapsto \dfrac{1}{x}$ sur $\mathbb{R}^{*+}$) non borné.
  On vérifie aisément que $L = \{0\} \cup \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ / \ x > 0 \text{ et } y > 0\}$.
  Donc $\bar{L} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ / \ x \geq 0 \text{ et } y \geq 0\}$ est distinct de L, donc L n'est pas fermé.



- Soit $K = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ / \ x \geq 0 \text{ et } x^2 + (y-1)^2 = 1\right\}$ le demi-cercle de centre $(0, 1)$ de rayon 1 du demi-plan $x \geq 0$. K est compact (intersection d'un cercle, compact, et d'un demi-plan fermé).
  On vérifie de même aisément que $L = \{0\} \cup \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ / \ x \geq 0 \text{ et } y > 0\}$.
  Donc $\bar{L} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ / \ x \geq 0 \text{ et } y \geq 0\}$ est distinct de L, donc L n'est pas fermé.



5. (a) – Soit donc $K = \left\{ \sum_{i=1}^{r} \lambda_i c_i \ / \ \forall i, \ \lambda_i \in \mathbb{R}^+ \text{ et } \sum_{i=1}^{r} \lambda_i = 1 \right\}$.
   Soit aussi $T = \left\{ (\lambda_1, \ldots, \lambda_r) \in \mathbb{R}^r \ / \ \forall i, \ \lambda_i \in \mathbb{R}^+ \text{ et } \sum_{i=1}^{r} \lambda_i = 1 \right\}$. T est fermé borné dans $\mathbb{R}^r$, donc est compact.
   Soit encore $\phi : \begin{array}{ccc} T & \longrightarrow & E \\ (\lambda_1, \ldots, \lambda_r) & \longmapsto & \sum_{i=1}^{r} \lambda_i c_i \end{array}$. ϕ est continue comme restriction à T d'une application linéaire. Ainsi $K = \phi(T)$ est compact dans E.
   – On suppose que C ne contient aucune droite vectorielle.
   Si 0 appartenait à K, on pourrait écrire $0 = \sum_{i=1}^{r} \lambda_i c_i$, avec les $\lambda_i \geq 0$ et $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 1$. Alors par exemple λ_1 serait non nul, ce qui permettrait d'écrire $-c_1 = \dfrac{\sum_{i=2}^{r} \lambda_i c_i}{\lambda_1}$, et C contiendrait la droite vectorielle $\mathbb{R}c_1$, ce qui est impossible.
   Finalement, K est un compact ne contenant pas 0, donc $\{\lambda x \ / \ \lambda \geq 0 \text{ et } x \in K\}$ est fermé d'après ??.
   Or tout élément de C s'écrit sous la forme $\sum_{i=1}^{r} \lambda_i c_i$, soit λx, avec $\lambda = \sum_{i=1}^{r} \lambda_i$ et $x = \sum_{i=1}^{r} \dfrac{\lambda_i}{\lambda} c_i$ (lorsque les λ_i sont non tous nuls, sinon on prend x quelconque dans C), de sorte que $\sum_{i=1}^{r} \dfrac{\lambda_i}{\lambda} = 1$, et donc $x \in K$.
   Ainsi $C = \{\lambda x \ / \ \lambda \geq 0 \text{ et } x \in K\}$, et C est donc fermé.

(b) On remarque qu'un cône à faces C vérifie clairement les deux propriétés suivantes : $C + C \subset C$, et $\forall \lambda \geq 0, \ \lambda C \subset C$.
   – On pose $c'_i = P(c_i)$ pour $1 \leq i \leq r$. On enlève les éléments c'_i qui sont nuls, et quitte à renuméroter, on peut supposer que $c'_i \neq 0$ pour $1 \leq i \leq q$, et $c'_i = 0$ pour $q + 1 \leq i \leq r$.
   On constate alors que $P(C) = \left\{ \sum_{i=1}^{r} \lambda_i c'_i \ / \ \forall i, \ \lambda_i \in \mathbb{R}^+ \right\}$ par double inclusion immédiate, ce qui prouve que $P(C)$ est le cône à faces engendré par $\left(c'_1, \ldots, c'_q\right)$.
   – Soit $x \in C$. On peut écrire $x = P(x) + y$ avec $y \in V$ (décomposition dans $V^{\perp} \oplus V$), d'où $P(x) = x + (-y)$.
   Or $-y \in V$ donc $-y \in C$, d'où $P(x) \in C + C$ d'où $P(x) \in C$. Ainsi $P(C) \subset C$.

(c) Soit $\mathbb{R}x$ une droite incluse dans $P(C)$. x est un vecteur non nul de $P(C)$, donc il existe $y \in C$ tel que $P(y) = x$. $y \notin V$ car $x \neq 0$. Posons alors $W = V + \mathbb{R}y$, W est un sous-espace vectoriel de E contenant strictement V (car $y \notin V$)
   $y \in C$ donc $\{\lambda y \ / \ \lambda \geq 0\} \subset C$. $-x \in P(C)$, donc il existe $y' \in C$ tel que $P(y') = -x$.
   On écrit $y = x + z$, $y' = -x + z'$ avec z et z' éléments de V.
   On en déduit $-y = y' - z' - z$. or $-z' - z \in V \subset C$, et $y' \in C$ donc $-y \in C$, d'où $\{\lambda y \ / \ \lambda \leq 0\} \subset C$.

Finalement $\mathbb{R}y \subset C$ et $W \subset C$.

(d) – Si C ne contient aucune droite vectorielle, C est fermé d'après ??.
- Dans le cas contraire, soit V un sous-espace vectoriel de E (non réduit à $\{0\}$), de dimension maximale parmi les sous-espaces inclus dans C. Soit p le projecteur orthogonal sur $V^\perp$. D'après ?? et la maximalité de V, $P(C)$ ne contient aucune droite vectorielle et, d'après ??, est un cône à faces ; en appliquant ??, on en déduit que $P(C)$ est fermé dans E.
  On montre à présent que $C = P^{-1}(P(C))$.
  - l'inclusion $C \subset P^{-1}(P(C))$ est évidente (elle est vraie pour tout ensemble et toute application) ;
  - soit $x \in P^{-1}(P(C))$: il existe $y \in C$ tel que $P(x) = P(y)$, donc $\exists\, y \in C, \exists\, z \in V,\ x = y + z$; or $V \subset C$, donc $z \in C$, d'où $x \in C$.

  Finalement, p est linéaire, donc continue, et $P(C)$ est fermé, donc $P^{-1}(P(C))$ est fermé, donc C est fermé dans E.

Partie III

6. (a) Soit $\phi : \begin{array}{ccc} C & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ c & \longmapsto & \|c-a\| \end{array}$; ϕ est continue (car 1-lipschitzienne), et à valeurs positives, donc elle admet une borne inférieure.
   - *existence du minimum*
     Choisissons $b \in C$. Si $c \notin \mathrm{B}'(a, \|b-a\|)$, alors $\phi(c) = \|c-a\| > \phi(b)$.
     Ainsi, $\inf\limits_C \phi = \inf\limits_{C\cap \mathrm{B}'(a,\|b-a\|)} \phi$. Or $C \cap \mathrm{B}'(a, \|b-a\|)$ est fermé borné donc compact, et ϕ est continue, sa borne inférieure sur cet ensemble est donc atteinte. Il existe finalement $x \in C$ tel que $\phi(x) = \inf\limits_C \phi$.
   - *unicité du minimum*
     Supposons que $\inf\limits_C \phi = \phi(c_1) = \phi(c_2)$.
     C étant convexe (c'est l'enveloppe convexe des demi-droites $\mathbb{R}^+ c_i$), $\dfrac{c_1+c_2}{2} \in C$.
     $2\|c_1-a\|^2 + 2\|c_2-a\|^2 = \|c_2-c_1\|^2 + 4\left\|\dfrac{c_1+c_2}{2} - a\right\|^2$.
     L'inégalité $\phi\left(\dfrac{c_1+c_2}{2}\right) \geq \phi(c_1)$ se traduit alors par $4\phi(c_1)^2 \geq \|c_2-c_1\|^2 + 4\phi(c_1)^2$, soit $\|c_2-c_1\|^2 \leq 0$, et finalement $c_1 = c_2$.

   (b) – Démontrons d'abord le résultat suivant : $\forall x \in C,\ (P(a) - a | x - P(a)) \geq 0 \quad (E)$.
   Soit $\lambda \in]0,1]$; $\lambda x + (1-\lambda)P(a) \in C$, donc $\|\lambda x + (1-\lambda)P(a) - a\| \geq \|P(a) - a\|$, d'où $\|\lambda(x - P(a)) + P(a) - a\|^2 \geq \|P(a)-a\|^2$.
   Développons : $\lambda^2\|x - P(a)\| + 2\lambda(x - P(a)|P(a) - a) \geq 0$. Simplifiant alors par λ, et faisant tendre λ vers 0^+, on obtient le résultat annoncé.
   - Soit $c \in C$, alors $c + P(a) \in C$, donc en reportant dans (E) : $(P(a) - a|c) \geq 0$; en particulier pour $c = P(a)$: $(P(a) - a|P(a)) \geq 0$.
     De même, $0 \in C$, donc en reportant dans (E) : $(P(a) - a| - P(a)) \geq 0$.
     Finalement, $(P(a) - a|P(a)) = 0$.

   (c) – Soit $x \in C$. Par définition de C^+, pour tout $y \in C^+$, $(x|y) \geq 0$, ce qui — par définition de $(C^+)^+$ — signifie précisément que $x \in (C^+)^+$. Ainsi $C \subset (C^+)^+$.
   - Soit $a \in (C^+)^+$: alors $\forall y \in C^+$, $(a|y) \geq 0$, or $P(a) \in C$, donc $\forall y \in C^+$, $(P(a)|y) \geq 0$.
     D'après ??, $\forall c \in C,\ (P(a) - a|c) \geq 0$, donc $P(a) - a \in C^+$, d'où $(P(a) - a|a) \geq 0$.
     Or $\|P(a) - a\|^2 = \underbrace{(P(a) - a|P(a))}_{=0} - (P(a) - a|a) = -(P(a) - a|a)$, d'où $(P(a) - a|a) \leq 0$.
     Finalement $(P(a) - a|a) = 0$, soit $\|P(a) - a\|^2 = 0$, i.e. $P(a) = a$, ce qui signifie que $a \in C$.
     Donc $(C^+)^+ \subset C$.

Partie IV

7. – $\alpha \Rightarrow \beta$

On suppose Vect$C = E$. Il existe une base $(v_1, \ldots, v_n)$ de E constituée d'éléments de C. Soit N la «norme sup» associée à cette base.

$v_1, \ldots, v_n$ appartenant à C, $\left\{ \sum_i \lambda_i v_i \ / \ \forall i,\ \lambda_i \geq 0 \right\} \subset C$.

Soit $v = \sum_{k=1}^{n} x_k v_k \in E$ tel que $N\left(v - \sum_i v_i\right) < 1$; alors $\forall k,\ |x_k - 1| < 1$, donc $\forall k,\ x_k \geq 0$, donc $v \in C$.

Finalement C contient la boule de centre $\sum_{i=1}^{n} v_i$ de rayon 1 pour la norme N. Les normes étant équivalentes dans $\mathbb{R}^n$, le vecteur $\sum_{i=1}^{n} v_i$ est intérieur à C.

– $\beta \Rightarrow \alpha$

Soit x intérieur à C. $\exists\, r > 0,\ \mathrm{B}(x, r) \subset C$. Soit $(e_1, \ldots, e_n)$ la base canonique de E.

$P(t) = \det(x + te_1, x + te_2, \ldots, x + te_n)$ est un polynôme en t, de terme de plus haut degré t^n. Il possède donc un nombre fini de racines, d'où l'existence de $t_0 \in]0, r[$ tel que $P(t_0) \neq 0$.

$(x + te_1, x + te_2, \ldots, x + te_n)$ est donc une base de E constituée d'éléments de C.

8. (a) – $\beta' \Rightarrow \alpha'$

x appartient à la face $C \cap \{w\}^{\perp}$, où $w \in C^+$. $w \neq 0$ car cette face est distincte de C.

$(x|w) = 0$, donc $\forall \lambda < 0,\ (x + \lambda w|w) = \lambda \|w\|^2 < 0$. Par conséquent, $x + \lambda w \notin C$ pour tout $\lambda < 0$, donc x n'appartient pas à l'intérieur de C.

x est donc un point frontière de C.

– $\alpha' \Rightarrow \beta'$

Soit $x \in$ FrC. Soit S la sphère unité de E. $S \cap C^+$ est fermé borné donc compact (en effet, $C^+ = \bigcap_{y \in C} \{x \in E \ / \ (x|y) \geq 0\}$ est une intersection de fermés, donc est fermé).

L'application continue $w \mapsto (x|w)$ atteint donc sa borne inférieure sur $S \cap C^+$ en un point w_0.

Soit $\alpha = (x|w_0)$. $\alpha \geq 0$ car $w_0 \in C^+$. Supposons $\alpha > 0$.

Soit y un élément quelconque de E tel que $\|y - x\| \leq \dfrac{\alpha}{2}$.

Alors $(x|w) - (y|w) \leq |(x - y|w)| \underset{\text{(Cauchy-Schwarz)}}{\leq} \|x - y\| . \|w\| \leq \dfrac{\alpha}{2} \|w\|$.

Donc $\forall w \in C^+ \cap S,\ (y|w) \geq (x|w) - \dfrac{\alpha}{2} \geq \dfrac{\alpha}{2}$. Par homogénéité, $\forall w \in C^+,\ (y|w) \geq \dfrac{\alpha}{2} \|w\| \geq 0$, ce qui prouve que $y \in \left(C^+\right)^+$.

D'après la ??, $y \in C$ donc C contient la boule de centre x de rayon $\dfrac{\alpha}{2}$, ce qui est absurde puisque x est un point frontière de C.

Finalement, $\alpha = 0$ d'où l'existence de $w_0 \in C$ non nul tel que $(x|w_0) = 0$. x appartient donc à la face $C \cap \{w_0\}^{\perp}$, qui est distincte de C car d'après les conditions de la question ??, C n'est pas inclus dans le sous-espace strict $\{w_0\}^{\perp}$.

(b) On suppose maintenant que $F =$ Vect$C$ est un sous-espace vectoriel strict de E. On note C_F le cône à faces C considéré comme une partie de F, de sorte que $C_F^+ = \{x \in F \ / \ \forall y \in C,\ (x|y) \geq 0\}$.

Si $w \in C^+$, on l'écrit $w = w_1 + w_2$ avec $w_1 \in F$ et $w_2 \in F^{\perp}$. $\forall x \in C,\ (x|w) = (x|w_1)$ d'où $w_1 \in C_F^+$, d'où $C^+ \subset C_F^+ + F^{\perp}$, et réciproquement, d'où $C^+ = C_F^+ + F^{\perp}$.

Une face de C s'écrit $C \cap \{w\}^{\perp} = C \cap \left(F \cap \{w\}^{\perp}\right) = C \cap \{w_1\}^{\perp}$. Par conséquent, les faces de C et de C_F sont les mêmes.

x est un point frontière de C_F si et seulement si x appartient à une face de C_F distincte de C_F, donc à une face de C distincte de C.

(c) – Supposons C d'intérieur non vide, soit x_0 un point intérieur à C.

Soit $A = \{\lambda \in [0, 1] \ / \ \lambda x + (1 - \lambda) x_0 \in C\}$. x_0 est intérieur à C, donc A contient un intervalle $[0, \lambda]$ avec $\lambda > 0$. $x \notin C$ donc $1 \notin A$. Enfin C est fermé convexe, donc A est un segment de la forme $[0, \alpha]$ avec $0 < \alpha < 1$.

Posons alors $x_1 = \alpha x + (1 - \alpha) x_0$. $x_1 \in C$, mais $x_1 \notin \overset{\circ}{C}$ par définition de la borne supérieure, donc $x_1 \in$ FrC.

D'après ??, x_1 appartient à une face F stricte de C donc il existe $w \in C^+$ tel que $F = C \cap \{w\}^{\perp}$.

$(x_1|w) = 0$ et $(x_0|w) > 0$ car $x_0 \in \overset{\circ}{C}$, donc $0 = (w|x_1) = \alpha\,(w|x) + (1-\alpha)\,(w|x_0)$. Ainsi $(w|x) < 0$.
– Si C est d'intérieur vide, on se ramène au cas précédent grâce à la question ??.

9. (a) Soit C le cône à faces engendré par $c_1, \dots, c_r$.
– Soit F une face de C. $\exists\, w \in C^+,\ F = C \cap \{w\}^\perp$. On pose $J = \{i \in [1,r] \ /\ (w|c_i) = 0\}$ et $C_J = \left\{\sum_{i \in J} \lambda_i c_i \ /\ \forall i \in J,\ \lambda_i \geq 0\right\}$. On constate que $C_J \subset F$.
Inversement, soit $x \in F$: $x = \sum_{i=1}^{r} \lambda_i c_i$ avec les $\lambda_i \geq 0$, d'où $0 = (w|x) = \sum_{i=1}^{r} \underbrace{\lambda_i\,(w|c_i)}_{\geq 0}$, donc $\forall i \in [1,r],\ \lambda_i\,(w|c_i) = 0$.
En particulier, $\forall i \notin J,\ \lambda_i = 0$, d'où $x \in C_J$.
Finalement, $F = C_J$.
– J étant une partie de l'ensemble fini $[1,r]$, le nombre de faces de C est au plus égal au nombre de parties J de $[1,r]$, soit 2^r.
C possède donc un nombre fini de faces.

(b) Soient $F_1, \dots, F_q$ les faces de C distinctes de C. On écrit $F_i = C \cap \{w_i\}^\perp$, avec w_i élément non nul de C^+. On pose alors $C' = \bigcap_{1 \leq i \leq q} \{w_i\}^+$.
– Soit $x \notin C$, alors d'après ??, il existe une face $F_i = C \cap \{w_i\}^\perp$ pour laquelle $(x|w_i) < 0$, donc $x \notin C'$.
– Soit $x \in C$; puisque $w_i \in C^+$, $(x|w_i) \geq 0$, et ceci étant vrai pour tout i, $x \in C'$.
Finalement, $C = C'$.

10. C étant un cône à faces, il s'écrit sous la forme précédente : $C = \bigcap_{1 \leq i \leq q} \{w_i\}^+$, les w_i étant des vecteurs non nuls.
– Démontrons le lemme suivant : $A_1, \dots, A_k$ étant des parties de E, $A_1 + \cdots + A_k$ étant l'ensemble $\{x_1 + \cdots + x_k \ /\ x_1 \in A$
alors $\left(\sum_{1 \leq i \leq k} A_i\right)^+ = \bigcap_{1 \leq i \leq k} A_i^+$.
En effet :
– si $A \subset B$, on a clairement $B^+ \subset A^+$, d'où $\left(\sum A_i\right)^+ \subset A_j^+$ pour tout j, donc $\left(\sum A_i\right)^+ \subset \bigcap A_j^+$;
– si $x \in \bigcap A_j^+$, soit $(x_1, \dots, x_k) \in A_1 \times \cdots \times A_k$, alors $\left(x|\sum_{i=1}^{k} x_i\right) = \sum_{i=1}^{k} \underbrace{(x|x_i)}_{\geq 0} \geq 0$, donc $x \in \left(\sum A_i\right)^+$.
– Appliquons alors le lemme à $A_i = \mathbb{R}^+ w_i$, la demi-droite dirigée par w_i.
$C = \bigcap_{1 \leq i \leq q} \{w_i\}^+ = \bigcap_{1 \leq i \leq q} A_i^+ = \left(\sum_{1 \leq i \leq q} A_i\right)^+$.
$\sum_{1 \leq i \leq q} A_i$ est par définition un cône à faces.
Par conséquent, d'après la troisième partie, $C^+ = \left(\sum_{1 \leq i \leq q} A_i\right)^{++} = \sum_{1 \leq i \leq q} A_i$, donc C^+ est effectivement un cône à faces.