Exercices d'application :

1. (a) Soit $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f_n(x) = nx^2 e^{-nx^2}$ où $n \in \mathbb{N}$. Montrer que la suite (f_n) converge simplement vers une fonction à déterminer. Montrer que la convergence n'est pas uniforme sur $\mathbb{R}$. Montrer que la convergence est uniforme sur $[a, +\infty[$ pour tout $a > 0$.

   (b) Soit $f_n :]0, +\infty[\to \mathbb{R}$ définie par $f_n(x) = \sin \dfrac{n\pi}{2x} \ln(1+x/n)$. Montrer que la suite (f_n) converge simplement, que la convergence est uniforme sur tout intervalle $]0, a]$ où $a > 0$ mais que la convergence n'est pas uniforme sur $]0, +\infty[$.
2. Soit $(u_n) \in (\mathbb{R}^{[0,1]})^{\mathbb{N}}$ qui converge simplement. On suppose que (u_n) converge uniformément sur $[0, 1[$. A-t-on convergence uniforme sur $[0, 1]$?
3. Soit I un intervalle et $(u_n) \in (\mathbb{R}^I)^{\mathbb{N}}$ qui converge simplement vers f. Montrer que (u_n) ne converge pas uniformément si et seulement s'il existe une suite (x_n) dans I telle que $(u_n(x_n) - f(x_n))$ diverge.
4. Pour les séries suivantes, déterminer s'il y a convergence simple, absolue, normale et uniforme ainsi que les limites aux bornes :

   (a) $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{nx + n^2}$ sur $[0, +\infty[$;

   (b) $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n + n^2 x}$ sur $]0, +\infty[$;

   (c) $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n} + nx}$ sur $[0, +\infty[$;

   (d) $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} \frac{x^n}{n!} e^{-x}$ sur $[0, +\infty[$.
5. Déterminer un équivalent en $+\infty$ de $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{x + n^2}$.
6. Montrer que $x \mapsto S(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^3 + n^2 x}$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $[0, +\infty[$.
7. Montrer que $f : x \mapsto \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin(2^n x)}{2^n}$ est bien définie et continue sur $\mathbb{R}$, mais n'est pas dérivable en 0.
8. Soit $S(x) = \displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{\arctan nx}{n^2}$. Montrer que S est continue sur $[0, +\infty[$, de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0, +\infty[$ mais n'est pas dérivable en 0.

Exercice 1 : Soit $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ continue, nulle en 0 et de limite nulle en $+\infty$ et $a > 0$. Pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \geqslant 0$, on pose

$$f_n(x) = f(nx) \qquad \text{et} \qquad g_n(x) = f(x/n).$$

1. Étudier la convergence uniforme de (f_n) sur $[a, +\infty[$ et $[0, +\infty[$.
2. Étudier la convergence uniforme de (g_n) sur $[0, a]$ et $[0, +\infty[$.
3. Étudier la convergence uniforme de $(f_n g_n)$ sur $[0, +\infty[$.

Exercice 2 * : Soit P_n une suite de fonctions polynomiales qui converge uniformément sur $\mathbb{R}$ vers une fonction f. Montrer que f est une fonction polynomiale. (On pourra commencer par montrer que la suite des degrés des P_n est stationnaire.)

Exercice 3 * :

1. Soit $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ telle que $f(0) = 0$. Étudier la convergence simple et uniforme de $x \mapsto f(x/n)$. À quelle condition nécessaire et suffisante sur f a-t-on convergence uniforme ?
2. Soit (u_n) et (v_n) dans $\mathcal{C}(\mathbb{R}, \mathbb{R})^{\mathbb{N}}$ qui convergent uniformément.

   (a) A-t-on toujours convergence uniforme de $(u_n v_n)$?

   (b) On suppose que les u_n sont à valeurs dans un segment K, et que $f \in \mathcal{C}(K, \mathbb{R})$. A-t-on convergence uniforme de $(f \circ u_n)_n$?

Exercice 4 * : Démontrer que la transformation de Laplace est injective. Plus précisément, soit $a \in \mathbb{R}$ et $f \in \mathcal{C}(\mathbb{R}^+, \mathbb{R})$ tels que $t \mapsto f(t)e^{-at}$ est intégrable sur $\mathbb{R}^+$; on suppose que pour tout $x \geqslant a$, $Lf(x) := \displaystyle\int_0^{+\infty} f(t)e^{-xt} dt = 0$. Alors $f = 0$.

Exercice 5 * : Soit $f_n(x) = n\left(\arctan\left(x + \dfrac{1}{n}\right) - \arctan\left(x - \dfrac{1}{n}\right)\right)$. Étudier les convergences simples et uniformes de (f_n) sur $\mathbb{R}$.

Exercice 6 * : Soit $k \in \mathbb{R}^+$. Une limite uniforme de fonctions k-lipschitziennes est-elle k-lipschitzienne ? Et si on remplace k-lipschitzienne(s) par lipschitzienne(s) ? Par uniformément continue(s) ?

Exercice 7 ** : Soient $(f_n)_n \in \mathcal{F}([a, b], \mathbb{R})^{\mathbb{N}}$ une suite de fonctions convexes qui converge vers f. Montrer que la convergence est uniforme sur tout segment inclus dans $]a, b[$. Est-elle uniforme sur $[a, b]$?

Exercice 8 ** : Soit $f(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} x^n(1 - x)\ln x$ sur $[0, 1]$ en prolongeant par 0 en 0. Étudier les modes de convergence de cette série.

Exercice 9 * : On pose $f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n} \text{th}\left(\frac{x}{n}\right)$. Étudier la continuité, la dérivabilité et donner un équivalent de f aux bornes de son domaine de définition.

Exercice 10 : Soit $u_n(x) = e^{-x\sqrt{n}}$ où $x \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}^*$.

1. Étudier la convergence simple de $\sum u_n(x)$. On note S sa somme.
2. Montrer que S est continue et strictement décroissante sur $]0, +\infty[$.
3. Déterminer la limite puis un équivalent en $+\infty$ de S.
4. Déterminer un équivalent en 0 de S.

Exercice 11 : Pour $x \in \mathbb{R}^+$ et $n \in \mathbb{N}$, on pose $f_n(x) = \frac{x^n e^{-x}}{n!}$.

1. Étudier la convergence uniforme de $f_n(x)$.
2. Étudier la convergence de $\int_0^{+\infty} f_n(x)dx$. Qu'en déduire ?
3. Étudier la convergence uniforme de $\sum f_n(x)$.

Exercice 12 – Centrale 2015 :

1. Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $0 \leqslant \frac{1}{\lfloor n\pi \rfloor} - \frac{1}{n\pi} \leqslant \frac{1}{(n\pi - 1)^2}$.
2. On définit $f : s \mapsto \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{\lfloor n\pi \rfloor^s} - \frac{1}{(n\pi)^s}\right)$. Montrer que f est définie et continue sur $]0, +\infty[$.
3. Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^\infty$.

Exercice 13 * : Pour $x > 0$, on pose $S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n!(x+n)}$.

1. Démontrer que S est bien définie et de classe $\mathcal{C}^1$.
2. Donner une relation entre $S(x+1)$ et $S(x)$.
3. Équivalents de S en 0 et $+\infty$?

Exercice 14 : Pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $x \in \mathbb{R}$, on pose $f_n(x) = \arctan(n+x) - \arctan n$.

1. Étudier la convergence simple et uniforme de la série de fonctions $\sum f_n$ sur $\mathbb{R}$. On note f sa somme.
2. Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.
3. Déterminer une relation entre $f(x)$ et $f(x+1)$ et en déduire la limite en $+\infty$ de f.

Exercice 15 * : Soit $u_n(x) = \frac{\sqrt{x} \ln n}{1 + xn^2}$ pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in \mathbb{R}^+$.

1. Étudier la convergence simple de $\sum u_n$.
2. Sa somme f est-elle continue sur $\mathbb{R}^{*+}$? En considérant $f(1/n^2)$, montrer que f n'est pas continue sur $\mathbb{R}^+$.
3. Donner un équivalent de f en 0.

Exercice 16 * : Soit $f : x \mapsto \sum_{n=1}^{+\infty} \ln\left(1 + \frac{1}{n^2 x^2}\right)$.

1. Déterminer le domaine de définition de f.
2. La fonction f est-elle continue ?
3. Donner un équivalent simple en 0 et $+\infty$.

Exercice 17 :

1. Déterminer le domaine de définition I de $S(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \ln\left(1 + \frac{x}{n}\right)$.
2. Étudier la continuité et le caractère $\mathcal{C}^1$ de S.
3. Déterminer un équivalent en la borne inférieure du domaine.
4. (**) Déterminer un équivalent en $+\infty$. (Montrer d'abord que $S'(x) = -\int_0^1 \frac{t^x}{1+t} \mathrm{d}t$.)

Exercice 18 * : Soit $I = [a, b]$ un segment et $f_0 : I \to \mathbb{R}$ continue. On définit par récurrence $f_{n+1} : I \to E$ par $f_{n+1}(x) = \int_a^x f_n(t)\mathrm{d}t$. Montrer que $\sum f_n$ converge et déterminer sa somme.

Exercice 19 * : Soit (a_n) une suite de réels strictement positifs strictement croissante et de limite $+\infty$. Montrer que

$$\int_0^{+\infty} \left(\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n e^{-a_n t}\right) \mathrm{d}t = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{1}{a_n}.$$

Exercice 20 *– Mines 2017 :

1. Déterminer un équivalent de $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n^2 + k^2}$.

2. En déduire un équivalent de $I_n = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin(nt)}{e^t - 1} dt$.
3. Montrer que $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t} dt = \frac{\pi}{2}$.

Exercice 21 ** : Soit $u_n(x) = \dfrac{x^n}{1 + x + x^2 + \cdots + x^n}$.

1. Montrer que u_n converge uniformément sur $[0, 1]$.
2. Quelle est la nature de la série de terme général $\displaystyle\int_0^1 u_n(t)\mathrm{d}t$?

Exercice 22 * : Pour $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$, on pose $f(x) = \dfrac{1}{x} + \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2x}{x^2 - n^2}$.

1. Montrer que f est continue sur $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$ et 1-périodique.
2. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$, $f\left(\dfrac{x}{2}\right) + f\left(\dfrac{x+1}{2}\right) = 2f(x)$.
3. Montrer que $x \mapsto \pi\mathrm{cotan}(\pi x) - f(x)$ est prolongeable par continuité sur $\mathbb{R}$, puis que $\pi\mathrm{cotan}(\pi x) = f(x)$. (Indication : considérer le max sur $[0, 1]$ et utiliser la question précédente.)
4. Montrer que pour tout $x \in]-\pi, \pi[$,
$$x \operatorname{cotan} x = 1 - 2\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^2}{\pi^2 n^2 - x^2} = 1 - 2\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{\pi^{2k}} \zeta(2k) x^{2k}.$$

Exercice 23 * : Soit $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ nulle en dehors de $]0, 2/n[$, affine sur $[0, 1/n]$ et $[1/n, 2/n]$ telle que $f_n(1/n) = 1$. Soit $k \mapsto r_k$ une bijection de $\mathbb{N}^*$ sur $\mathbb{Q}$. On pose
$$g_n(t) = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{2^k} f_n(t - r_k).$$

1. Montrer que g_n est continue.
2. Montrer que g_n converge simplement vers 0, mais que la convergence n'est uniforme sur aucun segment $[a, b]$ où $a < b$.

Exercice 24 * – Le théorème d'Abel pour les séries de fonctions :
Soient (ε_n) et (a_n) des suites d'applications définies sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ et à valeurs réelles ou complexes. On pose $u_n = \varepsilon_n a_n$ et on considère la série de fonctions $\sum u_n$. On suppose que

— pour tout $x \in I$, $(\varepsilon_n(x))_n$ converge en décroissant vers 0 ;
— la suite (ε_n) converge uniformément vers 0 sur I ;
— les sommes partielles de la série $\sum a_n$ sont uniformément bornées.

Montrer que la série $\sum u_n$ converge uniformément sur I.
Application : étudier la continuité de $x \mapsto f(x) = \displaystyle\sum_{n \geqslant 1} \frac{\cos nx}{\sqrt{n + x}}$ sur $\mathbb{R}^+$.

Exercice 25 * : Soit $u_n(x) = \dfrac{x^n}{1 - x^n}$ et $d(n)$ le nombre de diviseurs positifs de n. On pose $f(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} u_n(x)$.

1. Étudier le domaine de définition, la continuité et la dérivabilité de f.
2. Donner un équivalent de f en 1^-.
3. Montrer que $f(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} d(n)x^n$ pour tout $|x| < 1$.

Exercice 26 ** - Une limite simple de fonction continues discontinue sur une partie dense :

1. On considère la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f(p/q) = 1/q$ si p/q est une fraction d'entiers irréductible et $f(x) = 0$ si x est irrationnel. Montrer que f est continue en tout x irrationnel et discontinue en tout x rationnel.
2. Construire une suite de fonctions continues qui converge simplement vers une fonction dont l'ensemble de discontinuité est dense dans $\mathbb{R}$.

Exercice 27 ** : Pour $x \in \mathbb{R}$, on pose $f(x) = \dfrac{1}{4}(1 + \sin(\pi(2x - 1/2)))$, puis pour $n \in \mathbb{N}$ $f_n(x) = \dfrac{1}{4^n} f(4^n x)$. Montrer que la série de fonctions dérivables $\sum f_n$ converge uniformément vers une fonction continue dérivable en aucun point.

Travaux dirigés 1 – La formule des compléments

1. En utilisant l'exercice 22, montrer la formule d'Euler
$$\sin x = x \lim_{N \to +\infty} \prod_{n=1}^{N} \left(1 - \frac{x^2}{n^2\pi^2}\right).$$
2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $x > 0$. On pose $f_n(x) = \dfrac{n^x n!}{\prod_{k=0}^{n}(x + k)}$. Montrer que $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} f_n(x) = \Gamma(x)$. (Indication : considérer $\displaystyle\int_0^n \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n t^{x-1}\mathrm{d}t$.)

3. Montrer que $\ln\Gamma(x) = -\ln x - \gamma x + \sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{x}{n} - \ln(1+\frac{x}{n})\right)$.
4. Déterminer un formule simple pour $\Gamma(x)\Gamma(1-x)$ lorsque $x \in]0,1[$. *(C'est la formule des compléments, qui permet de prolonger Γ sur $\mathbb{R}^-$ et même $\mathbb{C}$.)*

Travaux dirigés 2 – Le théorème de Dini

Soit $a < b$ dans $\mathbb{R}$ et $f_n : [a,b] \to \mathbb{R}$ continue telles que $(f_n)_n$ converge simplement vers une fonction continue f.

1. On suppose que la suite (f_n) est croissante, *i.e.* $f_n \leqslant f_{n+1}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Montrer que la convergence est uniforme. (C'est le théorème de Dini.)
2. On suppose que chaque fonction f_n est croissante. Montrer que la convergence est uniforme.

Travaux dirigés 3 – Un calcul de l'intégrale de Dirichlet

Soit $I = \int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\mathrm{d}t$.

1. Montrer que pour tout réel $x \in \mathbb{R}$ et tout entier $n \geqslant 1$, on a
$$\frac{x}{2} + \sum_{k=1}^{n} \frac{\sin kx}{k} = \int_0^x \frac{\sin(n+1/2)t}{2\sin(t/2)}\mathrm{d}t.$$
2. Soit $x \in]0,2\pi[$ et g la fonction définie sur $]-\pi,\pi[$ par $g(0) = 0$ et $g(t) = \frac{1}{\sin t} - \frac{1}{t}$ si $t \neq 0$. Montrer que $\int_0^{x/2} g(t)\sin\alpha t\ \mathrm{d}t$ tend vers 0 lorsque α tend vers $+\infty$.
3. En déduire que pour tout réel $x \in]0,2\pi[$, on a $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin nx}{n} = I - \frac{x}{2}$ puis la valeur de I.

Indications

Exercice 4. Se ramener à un segment et utiliser le théorème de Weierstrass.

Exercice 5. Utiliser l'inégalité de Taylor-Lagrange.

Exercice 14.

1. Pour la convergence uniforme, regarder l'image de f_n.
2.
3. Si $f(x) \to l$ en $+\infty$, on a un équivalent simple de la série de terme général $f(n+1) - f(n)$.

Exercice 17. 4. Commencer par une IPP.

Exercice 19. Un seul des trois théorèmes de permutations $\sum - \int$ s'applique. Trouver le bon.

Exercice 21. Pour la deuxème question, découper l'intégrale en deux, mais avec une borne variable qui dépend de n.

Exercice 22.

1. Décomposer $1/(x^2 - n^2)$ en éléments simples.
2. Calcul, à justifier.
3.
4. Utiliser la somme d'une série géométrique à l'envers, puis permuter les sommes.

Exercice 24. Il faut utiliser une transformation dont le nom m'échappe...

Exercice 25. Utiliser des familles sommables.

Solutions

Exercice 2. À partir d'un certain rang N, on a $\|P_n - P_N\|_\infty \leqslant 1$. Donc $x \mapsto P_n(x) - P_N(x)$ est un polynôme borné donc constant. Donc $P_n = P_N + \alpha_n$ pour $n \geqslant N$ avec (α_n) suite convergente vers l. Donc (P_n) converge uniformément vers $P_n + l$ fonction polynomiale.

Exercice 9. Par croissance de th, on a convergence normale de la série sur tout segment $[-A, A]$ car $\frac{1}{n}\text{th}\frac{A}{n} \sim \frac{A}{n^2}$ terme général positif d'une série convergente. Puisque $x \mapsto \text{th}(x/n)$ est continue, f est continue d'après le théorème de continuité sous $\sum$.

De même, puisque $\frac{1}{n^2}\left|1 - \text{th}^2(x/n)\right| \leqslant 2/n^2$, on a convergence normale sur $\mathbb{R}$ de la série des dérivées. Par le théorème de dérivation sous $\sum$, f est de classe $\mathcal{C}^1$.

Pour un équivalent en $+\infty$, on utilise un comparaison à une intégrale. Par décroissance sur $]0, +\infty[$ de $t \mapsto \frac{1}{t}\text{th}(x/t)$, on a

$$f(x) \geqslant \int_1^{+\infty} \frac{1}{t}\text{th}(\frac{x}{t})\text{d}t \geqslant f(x) - \text{th}(x).$$

En posant $u = x/t$ dans l'intégrale, on tombe sur

$$\int_0^x \frac{\text{th}(u)}{u}\text{d}u \sim \int_1^x \frac{\text{th}(u)}{u}\text{d}u \sim \int_1^x \frac{1}{u}\text{d}u = \ln x$$

par intégration des relations de comparaisons. Donc $f(x) \sim \ln x$ en $+\infty$.

Exercice 14.

1. La convergence simple vient du fait que pour x assez grand, $\arctan(n + x) - \arctan n \sim \frac{1}{n} - \frac{1}{n+x}$. Il n'y a pas convergence uniforme car f_n ne converge pas uniformément vers 0 : en effet, $f_n(\mathbb{R}) =]-\pi/2 - \arctan n, \pi/2 - \arctan n[$.
2. On a convergence normale de la série $\sum f_n'$ sur $[-A, A]$ pour tout $A > 0$ car $|f_n'(x)| = \frac{1}{1 + (n+x)^2} \leqslant \frac{1}{1 + (n-A)^2} \sim \frac{1}{n^2}$ pour $n > A$. D'après le théorème de dérivation sous le signe $\sum$, f est de classe $\mathcal{C}^1$.
3. On a

$$\begin{aligned}
&\sum_{n=0}^{N}(\arctan(n+x+1) - \arctan n) - \sum_{n=0}^{N}(\arctan(n+x) - \arctan n)\\
=\ & \sum_{n=0}^{N}(\arctan(n+x+1) - \arctan(n+x))\\
=\ & \arctan(N+x+1) - \arctan x.
\end{aligned}$$

En prenant la limite lorsque N tend vers $+\infty$, on obtient

$$f(x+1) - f(x) = \frac{\pi}{2} - \arctan x = \arctan\frac{1}{x}.$$

Montrons par l'absurde que f tend vers $+\infty$ en $+\infty$. Déjà, f est croissante comme somme de fonctions croissantes (ou parce que sa dérivée est positive). D'après le théorème de la limite monotone, f admet une limite l, que l'on suppose finie. On a donc pour $n \in \mathbb{N}^*$, $f(n+1) - f(n) \sim \frac{1}{n}$ car $\arctan u \sim u$ en 0. Par sommation des équivalents, $f(n) - f(1) \sim H_{n-1} \sim \ln n$. Mais alors, $\lim f(n) = +\infty$. Contradiction.

Exercice 17. 4. Une IPP donne $\int_0^1 \frac{t^x}{1+t}\text{d}t = \frac{1}{2x} + o\left(\frac{1}{x}\right)$. Par intégration, $S(x) \sim -\frac{1}{2}\ln x$.

Exercice 21.

1. La fonction u_n est positive croissante (calcul de dérivée, ou en divisant par x^n numérateur et dénominateur) et $u_n(1) = 1/(n+1)$. Donc $\|u_n\|_\infty = 1/(n+1) \to 0$. Ainsi, (u_n) converge uniformément vers 0 sur $[0, 1]$.
2. Soit $a \in]0, 1[$. Alors pour tout $x \in [a, 1]$,

$$\frac{1-a}{1-a^{n+1}} \geqslant \frac{1}{1 + x + \cdots x^n} = \frac{1-x}{1-x^{n+1}} \geqslant \frac{1}{n+1}$$

par croissance. Alors

$$\begin{aligned}
\int_0^1 u_n &= \int_0^a \frac{x^n\text{d}x}{1 + x + \cdots + x^n} + \int_a^1 \frac{x^n\text{d}x}{1 + x + \cdots + x^n}\\
&\leqslant \frac{1}{n+1}a^n + \frac{1-a}{1-a^{n+1}}\int_a^1 x^n\text{d}x\\
&\leqslant \frac{1}{n+1}a^n + \frac{1}{n+1}\frac{1-a}{1-a^{n+1}}[x^{n+1}]_a^1\\
&= \frac{1}{n+1}a^n + \frac{1-a}{n+1}.
\end{aligned}$$

On choisit $a = 1 - \dfrac{1}{\sqrt{n}}$. Alors

$$a^n = \left(1 - \frac{1}{\sqrt{n}}\right)^n = e^{n\ln(1-1/\sqrt{n})} = O(e^{-\sqrt{n}}),$$

terme général d'une série absolument convergente. D'autre part, $\dfrac{1-a}{n+1} \sim \dfrac{1}{n\sqrt{n}}$, terme général d'une série convergente. D'où $\displaystyle\sum_n \int_0^1 u_n$ converge.