ÉCOLE NORMALE SUPÉRIEURE

CONCOURS D'ADMISSION 2018 **FILIÈRE MPI**

COMPOSITION DE MATHÉMATIQUES - C - (ULCR)

Corrigé par Erwan Biland et Denis Choimet

Partie I

Ce corrigé s'écarte un peu du programme officiel en ce qui concerne les familles sommables : toute famille à termes positifs possède une somme dans $\overline{\mathbb{R}}_+ = \mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\}$, et le théorème de Fubini de permutation des sommes s'applique automatiquement dans ce cadre. Ce point de vue – approuvé, n'en doutons pas, par tous les correcteurs de bon sens – fluidifie sensiblement la rédaction. Par ailleurs, on écrira systématiquement $\sum_x$ pour signifier $\sum_{x\in E}$.

1.1.a) Vérifier que, si P et Q sont des matrices de transition, PQ en est aussi une.

Il est tout d'abord clair que la fonction PQ est à valeurs dans $\overline{\mathbb{R}}_+$. Pour $x \in E$, on a (a priori dans $\overline{\mathbb{R}}_+$) :

$$\sum_z (PQ)(x,z) = \sum_z \sum_y P(x,y)Q(y,z) = \sum_y P(x,y) \sum_z Q(y,z) = \sum_y P(x,y) = 1,$$

la permutation des deux sommes étant légitime par le théorème de Fubini pour les familles positives. En particulier, PQ est à valeurs dans $[0,1]$, ce qui permet de conclure que

$$\boxed{PQ \text{ est une matrice de transition.}}$$

1.1.b) Vérifier que, si P, Q, R sont des matrices de transition, on a $(PQ)R = P(QR)$.

Soit $x, t \in E$. À nouveau grâce au théorème de Fubini pour les familles positives et par linéarité de la somme, on a :

$$\begin{aligned}
((PQ)R)(x,t) &= \sum_z (PQ)(x,z)R(z,t) = \sum_z \sum_y P(x,y)Q(y,z)R(z,t) \\
&= \sum_y P(x,y) \sum_z Q(y,z)R(z,t) \\
&= \sum_y P(x,y)(QR)(y,t) \\
&= (P(QR))(x,t),
\end{aligned}$$

donc

$$\boxed{(PQ)R = P(QR).}$$

1.1.c) Vérifier que, si P est une matrice de transition, P^n l'est aussi pour tout $n \geqslant 0$.

Tout d'abord, $P^0 = I$ est bien une matrice de transition. Ensuite, si, pour $n \in \mathbb{N}$ fixé, P^n est une matrice de transition, alors $P^{n+1} = P^n P$ également d'après la question **1.1.a)**. Ainsi,

$$\boxed{P^n \text{ est une matrice de transition pour tout } n \geq 0.}$$

1.2.a) Montrer que $\mu P \in \mathcal{P}(E)$ et que $(\mu P)Q = \mu(PQ)$.

La somme qui définit μP est une somme de réels positifs ; elle est donc bien définie, a priori dans $\overline{\mathbb{R}}_+$. Plus précisément, pour $y \in E$, on a, grâce au théorème de Fubini pour les familles positives :

$$\sum_y \mu P(y) = \sum_y \sum_x \mu(x)P(x,y) = \sum_x \mu(x) \sum_y P(x,y) = \sum_x \mu(x) = 1.$$

En particulier, μP est à valeurs dans $[0,1]$, ce qui permet de conclure que

$$\boxed{\mu P \in \mathcal{P}(E).}$$

Par ailleurs, pour $z \in E$, on a, à nouveau par le théorème de Fubini pour les familles positives :

$$\begin{aligned}
((\mu P)Q)(z) &= \sum_y (\mu P)(y) Q(y,z) = \sum_y \sum_x \mu(x)P(x,y)Q(y,z) \\
&= \sum_x \mu(x) \sum_y P(x,y)Q(y,z) = \sum_x \mu(x)(PQ)(x,z) \\
&= (\mu(PQ))(z),
\end{aligned}$$

donc

$$\boxed{(\mu P)Q = \mu(PQ).}$$

1.2.b) Montrer que $Pf : E \to \mathbb{R}$ est une fonction bornée et que $\mu P[f] = \mu[Pf]$.

Justifions d'abord l'existence de Pf. Pour cela, on écrit, pour $x \in E$ et a priori dans $\overline{\mathbb{R}}_+$:

$$\sum_y |P(x,y)f(y)| \leq \|f\|_\infty \sum_y P(x,y) = \|f\|_\infty < +\infty,$$

de sorte que la famille $(P(x,y)f(y))_{y \in E}$ est sommable. Ensuite, pour $x \in E$, on a

$$|Pf(x)| = \left| \sum_y P(x,y)f(y) \right| \leq \sum_y P(x,y)|f(y)| \leq \|f\|_\infty,$$

ce qui prouve que

$$\boxed{\text{la fonction } Pf \text{ est bornée.}}$$

Enfin, on a

$$\begin{aligned}
\mu P[f] &= \sum_y (\mu P)(y) f(y) = \sum_y \sum_x \mu(x)P(x,y)f(y) \\
&= \sum_x \mu(x) \sum_y P(x,y)f(y) = \sum_x \mu(x)(Pf)(x) = \mu[Pf],
\end{aligned}$$

la permutation des deux sommes étant légitime par le théorème de Fubini, puisque

$$\sum_x \sum_y |\mu(x)P(x,y)f(y)| \leq \|f\|_\infty \sum_x \sum_y \mu(x)P(x,y) = \|f\|_\infty \sum_x \mu(x) = \|f\|_\infty < +\infty.$$

En définitive,

$$\boxed{\mu P[f] = \mu[Pf].}$$

1.2.c) Montrer que $(PQ)f = P(Qf)$.

Pour $x \in E$, on a

$$\begin{aligned}
((PQ)f)(x) &= \sum_z (PQ)(x,z)f(z) = \sum_z \sum_y P(x,y)Q(y,z)f(z) \\
&= \sum_y P(x,y) \sum_z Q(y,z)f(z) = \sum_y P(x,y)(Qf)(z) \\
&= (P(Qf))(x),
\end{aligned}$$

la permutation des deux sommes étant légitime par le théorème de Fubini, puisque

$$\sum_y \sum_z |P(x,y)Q(y,z)f(z)| \leq \|f\|_\infty \sum_y P(x,y) \sum_z Q(y,z) = \|f\|_\infty \sum_y P(x,y) = \|f\|_\infty < +\infty.$$

Ainsi,

$$\boxed{(PQ)f = P(Qf).}$$

1.3.a) Vérifier que P est une matrice de transition et que $\mathbb{P}[X = x_0, ..., X_n = x_n] = ...$

On a bien sûr $P(x,y) \in [0,1]$ pour tous $x, y \in E$. De plus, pour $x \in E$, on a, par σ-additivité de $\mathbb{P}$:

$$\sum_y P(x,y) = \sum_y \mathbb{P}(F(x,U_1) = y) = \mathbb{P}(F(x,U_1) \in E) = 1$$

puisque $F(x,U_1)$ est une variable aléatoire à valeurs dans E.

Montrons le second point par récurrence sur $n \geq 0$.

- Le résultat est vrai pour $n = 0$ car μ_0 est la loi de X_0.
- Soit $n \geq 0$. Supposons le résultat vrai au rang n, et soit $x_0, \ldots, x_{n+1} \in E$. On a

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(X_0 = x_0, \ldots, X_{n+1} = x_{n+1}) &= \mathbb{P}(X_0 = x_0, \ldots, X_n = x_n, F(X_n, U_{n+1}) = x_{n+1}) \\
&= \mathbb{P}(X_0 = x_0, \ldots, X_n = x_n, F(x_n, U_{n+1}) = x_{n+1}) \\
&= \mathbb{P}\big((X_0, \ldots, X_n) = (x_0, \ldots, x_n), F(x_n, U_{n+1}) = x_{n+1}\big) \\
&= \mathbb{P}(X_0 = x_0, \ldots, X_n = x_n)\mathbb{P}(F(x_n, U_{n+1}) = x_{n+1})
\end{aligned}$$

  car le vecteur aléatoire $(X_0, \ldots, X_n)$ est une fonction de $(X_0, U_1, \ldots, U_n)$, donc est indépendant de $F(x_n, U_{n+1})$ par indépendance mutuelle de X_0 et des U_k. Comme de plus U_{n+1} et U_1 sont identiquement distribuées, on en déduit que

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(X_0 = x_0, \ldots, X_{n+1} = x_{n+1}) &= \mathbb{P}(X_0 = x_0, \ldots, X_n = x_n)\mathbb{P}(F(x_n, U_1) = x_{n+1}) \\
&= \mathbb{P}(X_0 = x_0, \ldots, X_n = x_n)P(x_n, x_{n+1}) \\
&= \mu_0(x_0)P(x_n, x_{n+1}) \prod_{i=1}^{n} P(x_{i-1}, x_i) \text{ par hypothèse de récurrence} \\
&= \mu_0(x_0) \prod_{i=1}^{n+1} P(x_{i-1}, x_i).
\end{aligned}$$

On a donc montré que

$$\boxed{\mathbb{P}(X_0 = x_0, \ldots, X_n = x_n) = \mu_0(x_0) \prod_{i=1}^{n} P(x_{i-1}, x_i) \text{ pour tous } n \geq 0 \text{ et } x_0, \ldots, x_n \in E.}$$

1.3.b) Montrer que, pour tout ..., on a $\mathbb{P}[X_{n+1} = x \mid X_0 = x_0, ..., X_n = x_n] = P(x_n, x)$.

Par définition de la probabilité conditionnelle, on a

$$\mathbb{P}(X_{n+1} = x | X_0 = x_0, \ldots, X_n = x_n) = \frac{\mathbb{P}(X_0 = x_0, \ldots, X_n = x_n, X_{n+1} = x)}{\mathbb{P}(X_0 = x_0, \ldots, X_n = x_n)}.$$

Grâce à la question précédente, on en déduit immédiatement que

$$\boxed{\mathbb{P}(X_{n+1} = x | X_0 = x_0, \ldots, X_n = x_n) = P(x_n, x).}$$

1.3.c) Montrer que $\mu_n = \mu_0 P^n$ pour tout $n \geqslant 0$, et que $\mu_0 P = \mu_0 \;\Rightarrow\; (\forall\, n \geqslant 0,\; \mu_n = \mu_0\,)$.

Fixons $n \geq 0$, et cherchons une relation entre la loi de X_n et celle de X_{n+1}. D'après la formule des probabilités totales, on a, pour $x \in E$:

$$\mu_{n+1}(x) = \mathbb{P}(X_{n+1} = x) = \sum_{x_0, \ldots, x_n} \mathbb{P}(X_{n+1} = x | X_0 = x_0, \ldots, X_n = x_n) \mathbb{P}(X_0 = x_0, \ldots, X_n = x_n),$$

la somme étant étendue aux $(n+1)$-uplets $(x_0, \ldots, x_n) \in E^{n+1}$ tels que $\mathbb{P}(X_0 = x_0, \ldots, X_n = x_n) > 0$. Grâce à la question précédente et au théorème de Fubini pour les familles positives, on en déduit que

$$\begin{aligned}
\mu_{n+1}(x) &= \sum_{x_0, \ldots, x_n} P(x_n, x) \mathbb{P}(X_0 = x_0, \ldots, X_n = x_n) \\
&= \sum_{x_n} P(x_n, x) \sum_{x_0, \ldots, x_{n-1}} \mathbb{P}(X_0 = x_0, \ldots, X_n = x_n) \\
&= \sum_{x_n} P(x_n, x) \mathbb{P}(X_n = x_n) = \sum_{x_n} P(x_n, x) \mu_n(x_n) \\
&= (\mu_n P)(x).
\end{aligned}$$

Ainsi, $\mu_{n+1} = \mu_n P$ pour tout $n \geq 0$. De là, par récurrence,

$$\boxed{\mu_n = \mu_0 P^n \text{ pour tout } n \geq 0.}$$

Par conséquent,

$$\boxed{\text{si } \mu_0 P = \mu_0, \text{ alors } \mu_n = \mu_0 \text{ pour tout } n \geq 0.}$$

1.3.d) Montrer que, pour tous ... tels que $\mu_0(x) > 0$, on a $\mathbb{P}[X_n = y \mid X_0 = x] = P^n(x, y)$.

Considérons la probabilité $\mathbb{P}_x$ sur $(\Omega, \mathcal{A})$ définie par $\mathbb{P}_x(A) = \mathbb{P}(A | X_0 = x)$ pour $A \in \mathcal{A}$. Vérifions que les U_n sont indépendantes et identiquement distribuées relativement à $\mathbb{P}_x$.

- D'une part, pour tout $n \geq 1$ et $A_1, \ldots, A_n \in \mathcal{A}$, on a

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}_x(U_1 \in A_1, \ldots, U_n \in A_n) &= \frac{\mathbb{P}(U_1 \in A_1, \ldots, U_n \in A_n, X_0 = x)}{\mathbb{P}(X_0 = x)} \\
&= \frac{\mathbb{P}(U_1 \in A_1) \cdots \mathbb{P}(U_n \in A_n) \mathbb{P}(X_0 = x)}{\mathbb{P}(X_0 = x)} \\
&\qquad \text{(par indépendance mutuelle de } X_0 \text{ et des } U_k) \\
&= \mathbb{P}(U_1 \in A_1) \cdots \mathbb{P}(U_n \in A_n) \\
&= \mathbb{P}(U_1 \in A_1 | X_0 = x) \cdots \mathbb{P}(U_n \in A_n | X_0 = x) \qquad \text{(idem)} \\
&= \mathbb{P}_x(U_1 \in A_1) \cdots \mathbb{P}_x(U_n \in A_n).
\end{aligned}$$

Cela prouve à la fois l'indépendance des U_n relativement à $\mathbb{P}_x$, et leur équidistribution.

- Pour $y, z \in E$, on a, puisque U_1 et X_0 sont indépendantes :

$$\mathbb{P}_x(F(y,U_1) = z) = \mathbb{P}(F(y,U_1) = z | X_0 = x) = \mathbb{P}(F(y,U_1) = z) = P(y,z).$$

On peut donc appliquer le résultat de la question **1.3.(c)** à $\mathbb{P}_x$: pour $n \geq 0$, la loi de X_n relativement à $\mathbb{P}_x$ est donnée par :

$$\mathbb{P}_x(X_n = y) = \mu_0^x P^n(y) \text{ pour } y \in E,$$

μ_0^x désignant la loi de X_0 relativement à $\mathbb{P}_x$. Or, pour $z \in E$,

$$\mu_0^x(z) = \mathbb{P}(X_0 = z | X_0 = x) = \delta_{x,z} \text{ (symbole de Kronecker).}$$

Par conséquent,

$$\mathbb{P}_x(X_n = y) = \sum_z \delta_{x,z} P^n(z,y) = P^n(x,y),$$

soit

$$\boxed{\mathbb{P}(X_n = y | X_0 = x) = P^n(x,y) \text{ pour } y \in E.}$$

Remarque. Voici une variante, peut-être plus directe :

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(X_n = y | X_0 = x) &= \frac{\mathbb{P}(X_n = y, X_0 = x)}{\mathbb{P}(X_0 = x)} \\
&= \sum_{x_1,\ldots,x_{n-1} \in E} \frac{\mathbb{P}(X_n = y, X_{n-1} = x_{n-1}, \ldots, X_1 = x_1, X_0 = x)}{\mathbb{P}(X_0 = x)} \\
&= \sum_{x_1,\ldots,x_{n-1} \in E} P(x,x_1)P(x_1,x_2)\cdots P(x_{n-2},x_{n-1})P(x_{n-1},x_n) \text{ grâce à } \mathbf{1.3.(a)} \\
&= P^n(x,y).
\end{aligned}$$

1.3.e) Montrer que, pour toute fonction $f : E \to \mathbb{R}$ bornée, on a $\mathbb{E}[f(X_n)] = \mu_0[P^n f]$.

Notons d'abord que l'existence de $\mathbb{E}(f(X_n))$ provient du fait que f est bornée. Ensuite, la formule de transfert donne

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(f(X_n)) &= \sum_x f(x)\mathbb{P}(X_n = x) \\
&= \sum_x f(x)(\mu_0 P^n)(x) \text{ d'après la question } \mathbf{1.3.(c)} \\
&= (\mu_0 P^n)[f] = \mu_0[P^n f] \text{ d'après la question } \mathbf{1.2.(b)}.
\end{aligned}$$

Ainsi,

$$\boxed{\mathbb{E}(f(X_n)) = \mu_0[P^n f].}$$

1.4. Montrer que $\pi P = \pi$.

On calcule : pour $y \in E$,

$$(\pi P)(y) = \sum_x \pi(x)P(x,y) = \sum_x \pi(y)P(y,x) = \pi(y)\sum_x P(y,x) = \pi(y),$$

donc

$$\boxed{\pi P = \pi.}$$

1.5.a) Montrer que, pour tout $n \geqslant 1$, P^n est réversible par rapport à π.

Modulo une récurrence immédiate, il suffit de montrer que le produit de deux matrices de transition P et Q réversibles par rapport à π *et qui commutent* l'est encore. Or, pour $x, y \in E$, on a

$$\begin{aligned}\pi(x)(PQ)(x,y) &= \sum_z \pi(x)P(x,z)Q(z,y) = \sum_z P(z,x)\pi(z)Q(z,y) \text{ car } P \text{ est réversible}\\ &= \sum_z P(z,x)\pi(y)Q(y,z) \text{ car } Q \text{ est réversible}\\ &= \pi(y)(QP)(y,x) = \pi(y)(PQ)(y,x) \text{ puisque } P \text{ et } Q \text{ commutent.}\end{aligned}$$

Cela permet de conclure que

$$\boxed{P^n \text{ est réversible par rapport à } \pi \text{ pour tout } n \geq 1.}$$

1.5.(b) Montrer que, si $P^n(a,x) > 0$, on a $P^n(x,a) > 0$ et $\pi(x) > 0$.

Grâce à la question précédente, on a

$$\pi(x)P^n(x,a) = \pi(a)P^n(a,x) > 0,$$

donc (sachant que $\pi(x)$ et $P^n(x,a)$ sont positifs)

$$\boxed{P^n(x,a) > 0 \text{ et } \pi(x) > 0.}$$

1.5.c) Montrer que $\pi(x) > 0$ pour tout $x \in E$.

Soit $x \in E$. Par hypothèse, il existe $n \geq 1$ tel que $P^n(a,x) > 0$. Par conséquent, $\pi(x) > 0$ d'après la question précédente. Ainsi,

$$\boxed{\pi(x) > 0 \text{ pour tout } x \in E.}$$

1.5.d) Montrer que P est irréductible.

Soit $x, y \in E$. Par hypothèse, et grâce à la question **1.5.b)**, il existe des entiers $m, n \geq 1$ tel que $P^m(x,a) > 0$ et $P^n(a,y) > 0$. Dès lors,

$$P^{m+n}(x,y) = (P^mP^n)(x,y) = \sum_z \underbrace{P^m(x,z)P^n(z,y)}_{\geq 0} \geq P^m(x,a)P^n(a,y) > 0,$$

ce qui prouve que

$$\boxed{P \text{ est irréductible.}}$$

1.6.a) Montrer que $\mathcal{E}_n(f) = \langle f - P^n f, f\rangle_\pi$.

On calcule[1] :

$$\begin{aligned}\mathcal{E}_n(f) &= \frac{1}{2}\sum_{x,y} f(x)^2\pi(x)P^n(x,y) - \sum_{x,y} f(x)f(y)\pi(x)P^n(x,y) + \frac{1}{2}\sum_{x,y} f(y)^2\pi(x)P^n(x,y)\\ &= \frac{1}{2}\sum_x \pi(x)f(x)^2\sum_y P^n(x,y) - \sum_x \pi(x)f(x)\sum_y P^n(x,y)f(y) + \frac{1}{2}\sum_y \pi(y)f(y)^2\sum_x P^n(y,x)\\ &\qquad \text{car } P^n \text{ est réversible par rapport à } \pi\end{aligned}$$

1. en notant que toutes les sommes écrites ont un sens. Par exemple,

$$\sum_{x,y} \left|f(x)f(y)\pi(x)P^n(x,y)\right| \leq \|f\|_\infty^2 \sum_x \pi(x)\sum_y P^n(x,y) = \|f\|_\infty^2 \sum_x \pi(x) = \|f\|_\infty^2 < +\infty.$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{1}{2}\sum_x \pi(x) f(x)^2 - \sum_x \pi(x) f(x) \sum_y P^n(x,y) f(y) + \frac{1}{2}\sum_y f(y)^2 \pi(y) \\
&= \sum_x \pi(x) f(x)^2 - \sum_x \pi(x) f(x) (P^n f)(x) \\
&= \langle f, f\rangle_\pi - \langle f, P^n f\rangle_\pi,
\end{aligned}
$$

d'où finalement

$$\boxed{\mathcal{E}_n(f) = \langle f - P^n f, f\rangle_\pi.}$$

1.6.b) Montrer que, si $Pf = f$, alors la fonction f est constante.

Si $Pf = f$, alors $\mathcal{E}_n(f) = 0$ pour tout $n \geq 1$ d'après la question précédente, d'où

$$(f(x) - f(y))^2 \pi(x) P^n(x,y) = 0 \text{ pour } x, y \in E \text{ et } n \geq 1.$$

Fixons $x, y \in E$. Comme P est irréductible (question **1.5.(d)**), on peut fixer un entier $n \geq 1$ tel que $P^n(x,y) > 0$. Comme par ailleurs $\pi(x) > 0$ (question **1.5.(c)**), on en déduit que $f(x) = f(y)$, ce qui prouve que

$$\boxed{\text{si } Pf = f, \text{ alors } f \text{ est constante.}}$$

1.6.c) Soit $\mu \in \mathcal{P}(E)$. En posant $f(x) = \frac{\mu(x)}{\pi(x)}$, montrer que $Pf = f$, puis que $\mu = \pi$.

Posons $f(x) = \frac{\mu(x)}{\pi(x)}$ pour $x \in E$. Grâce à la réversibilité de P par rapport à π, *et en supposant la fonction f bornée*, on peut écrire, pour $x \in E$:

$$Pf(x) = \sum_y P(x,y)\frac{\mu(y)}{\pi(y)} = \sum_y P(y,x)\frac{\mu(y)}{\pi(x)} = \frac{\mu P(x)}{\pi(x)} = \frac{\mu(x)}{\pi(x)} = f(x),$$

donc

$$\boxed{\textit{si } f \textit{ est bornée,} \text{ alors } Pf = f.}$$

D'après la question précédente, la fonction f est constante, de valeur C. On a donc $\mu(x) = C\pi(x)$ pour tout $x \in E$ d'où, en sommant sur x et en tenant compte du fait que μ et π sont des probabilités, $C = 1$, d'où finalement

$$\boxed{\textit{si } f \textit{ est bornée,} \text{ alors } \mu = \pi.}$$

Remarque. L'argument de l'énoncé fonctionne si E est fini. Dans le cas où E est dénombrable, il semble difficile d'établir directement que f est bornée. Toutefois, le résultat est vrai, et π est effectivement *l'unique* probabilité sur E telle que $\pi P = \pi$. Voir par exemple G. Grimmett & D. Stirzaker, Probability and Random Processes, théorème (3) p. 227.

1.7.a) Montrer que, pour tous ..., on a $P^n(b,b) > 0$ et $P^{k+n+\ell}(x,y) \geqslant P^k(x,b)P^n(b,b)P^\ell(b,y)$.

Pour le premier point, raisonnons par récurrence sur n.

- On a $P^0(b,b) = 1 > 0$.
- Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons que $P^n(b,b) > 0$. Alors

$$P^{n+1}(b,b) = \sum_x \underbrace{P^n(b,x)P(x,b)}_{\geq 0} \geq P^n(b,b)P(b,b) > 0.$$

Ainsi,

$$\boxed{P^n(b,b) > 0 \text{ pour tout } n \geq 0.}$$

Pour le second point, on écrit

$$P^{k+n+\ell}(x,y) = (P^k P^n P^\ell)(x,y) = \sum_{z,t} P^k(x,z)P^n(z,t)P^\ell(t,y).$$

Comme la dernière somme écrite est à termes positifs, on peut conclure :

$$\boxed{P^{k+n+\ell}(x,y) \geq P^k(x,b)P^n(b,b)P^\ell(b,y).}$$

1.7.b) Montrer que P^2 est irréductible. *On rappelle que P^2 est réversible par rapport à π.*

Soit $x, y \in E$. Comme P est irréductible (question **1.5.(d)**), il existe des entiers $k, \ell \geq 1$ tels que $P^k(x,b) > 0$ et $P^\ell(b,y) > 0$. D'après le résultat de la question précédente, appliqué à $n = k+\ell$, on a

$$(P^2)^n(x,y) = P^{2n}(x,y) = P^{k+n+\ell}(x,y) \geq P^k(x,b)P^n(b,b)P^\ell(b,y) > 0,$$

ce qui prouve que

$$\boxed{P^2 \text{ est irréductible.}}$$

Remarque. L'indication donnée par le texte est étrange.

1.7.c) Montrer que si $f : E \to \mathbb{R}$ est bornée et vérifie $Pf = -f$, alors $f = \tilde{0}$.

On a immédiatement $P^2 f = P(Pf) = P(-f) = -Pf = f$. La question **1.6.(b)**, appliquée à la matrice de transition P^2 (qui est à la fois réversible par rapport à π et irréductible d'après les questions **1.5.(a)** et **1.7.(b)**), permet de conclure que la fonction f est constante. Notons C sa valeur. On a alors

$$Pf(x) = \sum_y P(x,y)f(y) = C\sum_y P(x,y) = C \text{ pour } x \in E,$$

soit $Pf = C$, d'où $C = -C$, donc $C = 0$. Ainsi,

$$\boxed{\text{la fonction } f \text{ est nulle.}}$$

1.8.a) Montrer que $\langle \cdot, \cdot \rangle_\pi$ définit un produit scalaire sur $\mathbb{R}^d$.

Conformément à l'énoncé, si f est une fonction de E vers $\mathbb{R}$, on écrit f_i pour $f(i)$, ce qui permet de considérer f comme un élément de $\mathbb{R}^d$. On a ainsi, par définition,

$$\langle f, g \rangle_\pi = \sum_{i=1}^{d} \pi_i f_i g_i \text{ pour } f, g \in \mathbb{R}^d.$$

Il est clair que l'on définit ainsi une forme bilinéaire symétrique positive sur $\mathbb{R}^d$, qui est de plus définie car $\pi_i > 0$ pour $1 \leq i \leq d$ d'après la question **1.5.(c)**. Par conséquent,

$$\boxed{\langle \cdot, \cdot \rangle_\pi \text{ est un produit scalaire sur } \mathbb{R}^d.}$$

1.8.b) Montrer que l'application $f \mapsto Pf$ est un endomorphisme symétrique de $\mathbb{R}^d$.

Il est clair que l'application $f \mapsto Pf$ est linéaire. Par ailleurs, pour $f, g \in \mathbb{R}^d$, on a

$$\begin{aligned}
\langle Pf, g\rangle_\pi &= \sum_{i=1}^{d} \pi_i (Pf)_i g_i = \sum_{i=1}^{d}\sum_{j=1}^{d} \pi_i P(i,j) f_j g_i \\
&= \sum_{i=1}^{d}\sum_{j=1}^{d} \pi_j P(j,i) f_j g_i \text{ car } P \text{ est réversible par rapport à } \pi \\
&= \sum_{j=1}^{d} \pi_j f_j \sum_{i=1}^{d} P(j,i) g_i = \sum_{j=1}^{d} \pi_j f_j (Pg)_j \\
&= \langle f, Pg\rangle_\pi,
\end{aligned}$$

ce qui prouve que

$$\boxed{\text{l'endomorphisme } f \mapsto Pf \text{ de } \mathbb{R}^d \text{ est symétrique pour le produit scalaire } \langle \cdot, \cdot \rangle_\pi.}$$

1.8.c) Montrer que, si $\lambda \in \mathbb{C}$ est une valeur propre de P, alors $\lambda \in \mathbb{R}$ et $-1 \leqslant \lambda \leqslant 1$.

D'après le théorème spectral, l'endomorphisme $f \mapsto Pf$ est diagonalisable dans une base $\langle \cdot, \cdot \rangle_\pi$-orthonormale de $\mathbb{R}^d$, ce qui l'énoncé exprime maladroitement en disant que « les valeurs propres de $f \mapsto Pf$ sont toutes réelles ».

Soit ensuite λ une telle valeur propre, et f un vecteur propre associé. Pour $1 \le i \le d$, on a, en posant $\|f\|_\infty = \max_{1\le j\le d} |f_j|$:

$$|\lambda f_i| = \left| \sum_{j=1}^{d} P(i,j) f_j \right| \le \sum_{j=1}^{d} P(i,j)|f_j| \le \|f\|_\infty \sum_{j=1}^{d} P(i,j) = \|f\|_\infty.$$

En choisissant i tel que $|f_i| = \|f\|_\infty$, on en déduit que $|\lambda| \le 1$, soit $\lambda \in [-1, 1]$.

Enfin, si jamais $\lambda = -1$, alors $f = 0$ d'après la question **1.7.(c)**, ce qui est absurde. Ainsi,

$$\boxed{\text{toute valeur propre } \lambda \text{ de } f \mapsto Pf \text{ vérifie } -1 < \lambda \le 1.}$$

1.8.d) Montrer que b_1 est un vecteur propre de P associé à la valeur propre 1, qui est de multiplicité 1.

Pour $1 \le i \le d$, on a

$$(Pb_1)_i = \sum_{j=1}^{d} P(i,j)(b_1)_j = \sum_{j=1}^{d} P(i,j) = 1,$$

donc $Pb_1 = b_1$, ce qui prouve que[2]

$$\boxed{b_1 \text{ est vecteur propre de } P \text{ associé à la valeur propre } 1.}$$

Montrons ensuite que 1 est valeur propre simple de P. Comme P est diagonalisable, il suffit de montrer que le sous-espace propre de P associé à la valeur propre 1 est une droite. Soit donc $f \in \mathbb{R}^d$ non nul tel que $Pf = f$. D'après la question **1.6.(b)**, f est constante, autrement dit $f \in \operatorname{Vect} b_1$, ce qu'il fallait montrer. En définitive,

$$\boxed{1 \text{ est une valeur propre simple de } P.}$$

2. l'énoncé identifie ici P et $f \mapsto Pf$.

1.8.e) Montrer que $\exists\, \lambda \in [0,1[,\ \forall\, n \geqslant 1,\ \forall\, f : E \to \mathbb{R},\ \|P^n f - \pi[f]b_1\|_\pi \leqslant \lambda^n \|f - \pi[f]b_1\|_\pi$.

Fixons $(e_1, \dots, e_d)$ une base $\langle\cdot,\cdot\rangle_\pi$-orthonormale de vecteurs propre de P, choisie telle que $e_1 = b_1$. Pour $2 \le i \le d$, on peut écrire $Pe_i = \lambda_i e_i$, avec $|\lambda_i| < 1$. Soit par ailleurs $f \in \mathbb{R}^d$. Écrivons

$$f = f_1 e_1 + \cdots + f_d e_d.$$

On a en particulier

$$f_1 = \langle f, e_1\rangle_\pi = \langle f, b_1\rangle_\pi = \sum_{i=1}^{d} \pi_i f_i = \pi[f].$$

De là, pour $n \ge 1$,

$$P^n f = f_1 e_1 + f_2 P^n e_2 + \cdots + f_d P^d e_d = \pi[f] e_1 + \lambda_2^n f_2 e_2 + \cdots + \lambda_d^n f_d e_d,$$

d'où

$$\begin{aligned}
\|P^n f - \pi[f]b_1\|_\pi &= \|\lambda_2^n f_2 e_2 + \cdots + \lambda_d^n f_d e_d\|_\pi \\
&= \left(\sum_{i=2}^{d} \lambda_i^{2n} f_i^2\right)^{1/2} \quad \text{puisque la base } (e_1, \dots, e_d) \text{ est } \langle\cdot,\cdot\rangle_\pi\text{-orthonormale} \\
&\le \lambda^n \left(\sum_{i=2}^{d} f_i^2\right)^{1/2} \quad \text{en posant } \lambda = \max_{2 \le i \le d} |\lambda_i| \in [0,1[\\
&= \lambda^n \big\|f - \pi[f]b_1\big\|_\pi.
\end{aligned}$$

Finalement,

$$\boxed{\big\|P^n f - \pi[f]b_1\big\|_\pi \le \lambda^n \big\|f - \pi[f]b_1\big\|_\pi \text{ pour tout } n \ge 1.}$$

1.8.f) En déduire qu'il existe $C > 0$ tel que $\forall\, n \geqslant 1$, $\sup\limits_{x \in E} |\mu_n(x) - \pi(x)| \leqslant C\lambda^n$.

Soit $n \ge 1$. On a vu à la question **1.3.(c)** que $\mu_n = \mu_0 P^n$. Par conséquent, pour toute fonction $f : E \to \mathbb{R}$, on a

$$\mu_n[f] = \mu_0 P^n[f] = \mu_0[P^n f]$$

grâce à la question **1.2.(b)**. Par ailleurs,

$$\mu_0\big[\pi[f]b_1\big] = \pi[f]\mu_0[b_1] = \pi[f] \sum_{x \in E} \mu_0(x) = \pi[f].$$

On en déduit que

$$\big|\mu_n[f] - \pi[f]\big| = \big|\mu_0\big[P^n f - \pi[f]b_1\big]\big|.$$

On peut interpréter cette quantité comme un produit scalaire : en définissant $\varphi : E \to \mathbb{R}, x \mapsto \frac{\mu_0(x)}{\pi(x)}$, on a, par Cauchy-Schwarz :

$$\big|\mu_n[f] - \pi[f]\big| = \big|\langle \varphi, P^n f - \pi[f]b_1\rangle_\pi\big| \le \|\varphi\|_w \big\|P^n f - \pi[f]b_1\big\|_w.$$

La question précédente donne alors

$$\big|\mu_n[f] - \pi[f]\big| \le \|\varphi\|_w \lambda^n \big\|f - \pi[f]b_1\big\|_\pi \text{ pour } f \in E \text{ et } n \ge 1,$$

Fixons à présent $x \in E$, et notons f_x la fonction de E vers $\mathbb{R}$ qui envoie x sur 1 et les autres élements de E sur 0. La majoration que l'on vient d'obtenir, appliquée à $f = f_x$, donne alors

$$\big|\mu_n(x) - \pi(x)\big| \le \|\varphi\|_w \lambda^n \big\|f_x - \pi[f_x]b_1\big\|_\pi.$$

Il reste à poser

$$C = \|\varphi\|_w \max_{x\in E} \left\| f_x - \pi[f_x] b_1 \right\|_\pi$$

pour conclure que

$$\boxed{\max_{x\in E} \left|\mu_n(x) - \pi(x)\right| \leq C\lambda^n \text{ pour } n \geq 1.}$$

Remarque. La suite $(\mu_n)_{n\geqslant 0}$, interprétée comme une suite de fonctions de E vers $\mathbb{R}$, converge donc simplement vers la «fonction» π, ce qui s'interprète comme une convergence en loi de la suite de variables aléatoires $(X_n)_{n\geqslant 0}$ vers la loi π. Aurait-il été si difficile de montrer ce point dans le cas où E est dénombrable, en supposant l'existence de π ?

Partie II

2.1. Si $\|f\|_1 < +\infty$ ou $\|g\|_1 < +\infty$, vérifier que $f * g$ est bien définie et que $f * g = g * f$.

Soit $x \in \mathbb{R}$ fixé. Par le changement de variable affine bijectif $z = x - y$, après renversement des bornes d'intégration, les intégrales $\int_{\mathbb{R}} f(x-y)g(y)\,\mathrm{d}y$ et $\int_{\mathbb{R}} f(z)g(x-z)\,\mathrm{d}z$ sont de même nature, et égales si elles convergent. Ainsi la fonction $f * g$ existe si et seulement si $g * f$ existe, auquel cas $f * g = g * f$.

Si par exemple $\|g\|_1 < +\infty$, alors la fonction $|g|$ est intégrable sur $\mathbb{R}$, donc la fonction $\|f\|_\infty |g|$ aussi par linéarité. Or, pour $x \in \mathbb{R}$ fixé, la fonction $y \mapsto f(x-y)g(y)$ est continue donc continue par morceaux sur $\mathbb{R}$ et, pour tout $y \in \mathbb{R}$, $|f(x-y)g(y)| \leqslant \|f\|_\infty |g(y)|$. Donc, par comparaison, l'intégrale $\int_{\mathbb{R}} f(x-y)g(y)\,\mathrm{d}y$ est absolument convergente, et $(f*g)(x)$ est bien défini pour tout $x \in \mathbb{R}$.

D'après le premier paragraphe, les rôles de f et g sont symétriques, donc on a encore l'existence de $f * g$ si $\|f\|_1 < +\infty$.

2.2. Montrer que pour tout $s > 0$ et tout $t > 0$, on a $\gamma_s * \gamma_t = \gamma_{s+t}$.

Soit s, t dans $\mathbb{R}_+^*$. Les fonctions γ_s et γ_t sont positives, continues, bornées et intégrables (admis dans l'énoncé), donc $\gamma_s * \gamma_t$ existe. Pour $x > 0$ fixé,

$$\begin{aligned}
(\gamma_s * \gamma_t)(x) &= \frac{1}{2\pi\sqrt{st}} \int_{\mathbb{R}} \exp\Big[-\frac{(x-y)^2}{2s} - \frac{y^2}{2t}\Big]\,\mathrm{d}y \\
&= \frac{1}{2\pi\sqrt{st}} \int_{\mathbb{R}} \exp\Big[-\frac{x^2}{2s} + \frac{x}{s}y - \frac{s+t}{2st}y^2\Big]\,\mathrm{d}y \\
&= \frac{1}{2\pi\sqrt{st}} \int_{\mathbb{R}} \exp\Big[-\frac{s+t}{2st}\big(y - \frac{xt}{s+t}\big)^2 + \frac{x^2 t}{2s(s+t)} - \frac{x^2}{2s}\Big]\,\mathrm{d}y \\
&\qquad\qquad \text{(mise sous forme canonique)} \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi(s+t)}} \exp\big(-\frac{x^2}{2(s+t)}\big) \int_{\mathbb{R}} \sqrt{\frac{s+t}{2\pi st}} \exp\Big[-\frac{s+t}{2st}z^2\Big]\,\mathrm{d}y \\
&\qquad\qquad \text{(changement de variable affine } z = y - \frac{xt}{s+t}\text{)} \\
&= \gamma_{s+t}(x) \qquad\qquad \text{(car } \textstyle\int_{\mathbb{R}} \gamma_{\frac{st}{s+t}}(z)\,\mathrm{d}z = 1\text{).}
\end{aligned}$$

2.3. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$ et tout $t > 0$, on a $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\gamma_t(x) = \frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}\gamma_t(x)$.

On calcule $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\gamma_t(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\Big(-\dfrac{1}{2t^{3/2}} + \dfrac{1}{\sqrt{t}} \cdot \dfrac{x^2}{2t^2}\Big)e^{-\frac{x^2}{2t}}$,

puis $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\gamma_t(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi t}}\Big(-\dfrac{x}{t}\Big)e^{-\frac{x^2}{2t}}$ et $\dfrac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}\gamma_t(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi t}}\Big(-\dfrac{1}{t}+\dfrac{x^2}{t^2}\Big)e^{-\frac{x^2}{2t}}$,
d'où l'égalité demandée.

2.4.a) Montrer que $P_tf \in C_b(\mathbb{R})$ et que $(t,x) \mapsto P_tf(x)$ est continue sur $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}$.

Par le changement de variable affine bijectif $z = y/\sqrt{t}$, on a pour $(t,x) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$

$$P_tf(x) = \int_{\mathbb{R}} \gamma_t(y)f(x-y)\,\mathrm{d}y = \int \gamma_1(z)\,f(x-z\sqrt{t})\,\mathrm{d}z,$$

Cette dernière expression reste valable pour $t=0$, car $\int_{\mathbb{R}} \gamma_1(z)\,\mathrm{d}z = 1$.

- Pour tout $(t,x) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}$, la fonction $z \mapsto \gamma_1(z)f(x-z\sqrt{t})$ est continue donc continue par morceaux sur $\mathbb{R}$.
- Pour tout $z \in \mathbb{R}$, l'application $(t,x) \mapsto \gamma_1(z)f(x-z\sqrt{t})$ est continue sur $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}$
- Pour tout $(t,z) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$, on a $\big|\gamma_1(z)f(x-z\sqrt{t})\big| \leqslant \|f\|_\infty\gamma_1(z)$, la fonction $\|f\|_\infty\gamma_1$ étant continue par morceaux et intégrable sur $\mathbb{R}$.

Donc, par le théorème de continuité des intégrales à paramètres, la fonction $(t,x) \mapsto P_tf(x)$ est continue sur $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}$.

2.4.b) Montrer que si $f \in C_0(\mathbb{R})$, alors $P_tf \in C_0(\mathbb{R})$ et, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $P_tf(x) \xrightarrow[t\to+\infty]{} 0$.

On utilise encore l'expression $P_tf(x) = \displaystyle\int_{\mathbb{R}} \gamma_1(z)f(x-z\sqrt{t})\,\mathrm{d}z$, pour $(t,x) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}$.

- Pour tout $t \in \mathbb{R}_+^*$, la fonction $z \mapsto \gamma_1(z)f(x-z\sqrt{t})$ est continue par morceaux sur $\mathbb{R}$.
- Pour tout $z \in \mathbb{R}$, on a $\gamma_1(z)f(x-z\sqrt{t}) \xrightarrow[t\to+\infty]{} g(z) := \gamma_1(z)f(x)\delta_{0,z}$ (symbole de Kronecker).
- Pour tout $(t,z) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$, on a $\big|\gamma_1(z)f(x-z\sqrt{t})\big| \leqslant \|f\|_\infty\gamma_1(z)$, la fonction $\|f\|_\infty\gamma_1$ étant continue par morceaux et intégrable sur $\mathbb{R}$.

Donc, par le théorème de convergence dominée, $P_tf(x) \xrightarrow[t\to+\infty]{} \displaystyle\int_{\mathbb{R}} g(z)\,\mathrm{d}z = 0$.

2.5. Montrer que $\forall\, n \in \mathbb{N}^*,\ \exists\, c_n \in \mathbb{R},\ \forall\,(t,x) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R},\ \Big|\gamma_t^{(n)}(x)\Big| \leqslant \dfrac{c_n}{t^{n/2}}\Big(1+\dfrac{|x|}{\sqrt{t}}\Big)^n\gamma_t(x)$.

On travaille d'abord pour $t=1$. On montre par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe un polynôme $P_n \in \mathbb{R}_n[X]$ tel que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\gamma_1^{(n)}(x) = P_n(x)\gamma_1(x)$.

Or, pour $t>0$ et $x \in \mathbb{R}$, on a $\gamma_t(x) = t^{-1/2}\gamma_1(x/\sqrt{t})$. Donc, par récurrence, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\gamma_t^{(n)}(x) = t^{-(n+1)/2}\gamma_1^{(n)}(x/\sqrt{t}) = t^{-n/2}P_n(x/\sqrt{t})\gamma_t(x).$$

La fonction $x \mapsto P_n(x)/(1+|x|)^n$ est continue sur $\mathbb{R}$ et admet des limites finies en $+\infty$ et $-\infty$, donc elle est bornée sur $\mathbb{R}$: il existe $c_n \in \mathbb{R}$ tel que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\big|P_n(x)\big| \leqslant c_n(1+|x|)^n$.
On en déduit le résultat demandé.

2.6.a) Vérifier que, pour tout $t>0$, l'application P_tf est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ et que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, l'application $t \mapsto P_tf(x)$ est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$.

Pour $t>0$ fixé, notons $u : \mathbb{R}\times\mathbb{R} \to \mathbb{R},\ (x,y) \mapsto \gamma_t(x-y)f(y)$. Fixons $p \in \mathbb{N}^*$.

- Pour tout $y \in \mathbb{R}$, l'application $x \mapsto u(x,y)$ est de classe $\mathcal{C}^p$ sur $\mathbb{R}$ et, pour tout $k \in [\![0,p]\!]$ et tout $x \in \mathbb{R}$, $\frac{\partial^k u}{\partial x^k}(x,y) = \gamma_t^{(k)}(x-y)f(y)$.
- Pour tout $x \in \mathbb{R}$, pour tout $k \in [\![0,p]\!]$, l'application $y \mapsto \frac{\partial^k u}{\partial x^k}(x,y)$ est continue donc continue par morceaux sur $\mathbb{R}$. Elle est intégrable par comparaison, car, pour tout $y \in \mathbb{R}$,
$$\Big|\frac{\partial^k u}{\partial x^k}(x,y)\Big| \leqslant \frac{c_k\|f\|_\infty}{t^{k/2}}\Big(1+\frac{|x-y|}{\sqrt{t}}\Big)^k\gamma_t(x-y) = \underset{y\to\pm\infty}{\mathrm{O}}\Big(\frac{1}{y^2}\Big).$$
- Fixons $a>0$. Pour tout $x \in [-a,a]$, pour tout $y \in \mathbb{R}$, on a :

$$\left|\frac{\partial^p u}{\partial x^p}(x,y)\right| \leqslant \varphi(y) := \left| \begin{array}{ll} \dfrac{c_k\|f\|_\infty}{\sqrt{2\pi}t^{(p+1)/2}}\left(1+\dfrac{a+|y|}{\sqrt{t}}\right)^p \exp\left(-\dfrac{(|y|-a)^2}{2t}\right) & \text{si } |y| \geqslant a \\ \dfrac{c_k\|f\|_\infty}{\sqrt{2\pi}t^{(p+1)/2}}\left(1+\dfrac{a+|y|}{\sqrt{t}}\right)^p \exp(0) & \text{si } |y| < a \end{array}\right.$$

La fonction $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est continue par morceaux, et intégrable par comparaison. Par théorème sur les intégrales à paramètres, on obtient que la fonction $P_t f$ est de classe $\mathcal{C}^p$ sur $[-a,a]$ pour tout $p \in \mathbb{N}^*$ et tout $a \in \mathbb{R}_+^*$, donc de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.

Grâce à l'identité de la question 2.3, on obtient le même type de majoration pour la dérivée par rapport à t, et on montre que l'application $t \mapsto P_t f$ est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$.

2.6.b) Soit $t > 0$. Montrer que $\|P_t f\|_\infty \leqslant \|f\|_\infty$ et que, pour tout entier $n \geqslant 1$, il existe une constante $C_n \in \mathbb{R}$ indépendante de t et de f telle que $\|(P_t f)^{(n)}\|_\infty \leqslant C_n \|f\|_\infty t^{-n/2}$.

Par définition de $P_t f$, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\left|(P_t f)(x)\right| = \left|\int_{\mathbb{R}} \gamma_t(y) f(x-y)\,\mathrm{d}y\right| \leqslant \int_{\mathbb{R}} \gamma_t(y)\|f\|_\infty\,\mathrm{d}y = \|f\|_\infty,$$

donc $\|P_t f\|_\infty \leqslant \|f\|_\infty$.

D'après la question précédente, pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in \mathbb{R}$, par changement de variable $z = x - y$,

$$\begin{aligned}\left|(P_t f)^{(n)}(x)\right| &= \left|\int_{\mathbb{R}} \gamma_t^{(n)}(x-y) f(y)\,\mathrm{d}y\right| = \left|\int_{\mathbb{R}} \gamma_t^{(n)}(z) f(x-z)\,\mathrm{d}z\right| \\ &\leqslant \int_{\mathbb{R}} \left|\gamma_t^{(n)}(z)\right| \|f\|_\infty\,\mathrm{d}z \\ &\leqslant \frac{c_n}{t^{n/2}}\|f\|_\infty \int_{\mathbb{R}} \left(1+\frac{|z|}{\sqrt{t}}\right)^n \gamma_t(z)\,\mathrm{d}z \\ &\leqslant \frac{c_n}{t^{n/2}}\|f\|_\infty \int_{\mathbb{R}} \left(1+|u|\right)^n \gamma_1(u)\,\mathrm{d}u \\ &\qquad \text{(par le changement de variable affine } u = z/\sqrt{t}\text{).}\end{aligned}$$

En notant $C_n = c_n \int_{\mathbb{R}}(1+|u|)^n \gamma_1(u)\,\mathrm{d}u$, cette intégrale étant convergente par comparaison comme à la question précédente, on obtient la majoration attendue.

2.6.c) Montrer que, pour tout $t > 0$ et tout $x \in \mathbb{R}$, on a $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(P_t f)(x) = \frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}(P_t f)(x)$.

C'est une conséquence immédiate des questions 2.6.a) et 2.3.

3.1. Soit $f \in C_b(\mathbb{R})$. Montrer que $\forall\, t \geqslant 0,\ \forall\, x \in \mathbb{R},\ Q_t f(x) = \int_{\mathbb{R}} f(e^{-t}x - \sqrt{1-e^{-2t}}y)\,\gamma_1(y)\,\mathrm{d}y$.

Par définition, pour $t > 0$, $Q_t f(x) = \int_{\mathbb{R}} f(e^{-t}x - z)\,\gamma_{1-e^{-2t}}(z)\,\mathrm{d}z$.
Par le changement de variable affine $y = z/\sqrt{1-e^{-2t}}$, on obtient l'expression demandée.
Pour $t = 0$, $Q_0 f(x) = P_0 f(x) = f(x) = \int_{\mathbb{R}} f(x)\,\gamma_1(y)\,\mathrm{d}y$, d'où le résultat.

3.2.a) Vérifier que, pour tout $t > 0$, l'application $Q_t f$ est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$ et que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, l'application $t \mapsto Q_t f(x)$ est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$.

Le premier point est immédiat à partir de la question 2.6.a), par composition d'applications de classe C^∞. Pour le deuxième point, on peut remarquer que l'application $(t,x) \mapsto P_t f(x)$ est de classe C^1 comme fonction de deux variables, car ses dérivées partielles sont continues sur $\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$ (ce qui se démontrerait comme en 2.4). Par composition, l'application $t \mapsto Q_t f(x)$ est donc de classe C^1 sur $\mathbb{R}$. On peut aussi procéder directement par dérivation d'une intégrale à paramètre, puisque $Q_t f(x) = \int_{\mathbb{R}} f(y)\,\gamma_{1-e^{-2t}}(e^t x - y)\,\mathrm{d}y$.

3.2.b) Soit $t > 0$. Montrer que $\|Q_t f\|_\infty \leqslant \|f\|_\infty$ et que, pour tout entier $n \geqslant 1$, il existe une constante $C_n \in \mathbb{R}$ indépendante de t et de f telle que $\|(Q_t f)^{(n)}\|_\infty \leqslant C_n \|f\|_\infty t^{-n/2}$.

Le premier point découle immédiatement de 2.6.b). Pour le deuxième point, on remarque que $(Q_t f)^{(n)}(x) = (e^{-t})^n (P_{1-e^{-2t}} f)^{(n)}(e^{-t}x)$, avec $0 \leqslant e^{-t} \leqslant 1$. Le résultat est donc encore immédiat à partir de 2.6.b), avec la même constante C_n.

3.2.c) Montrer que, pour tout $t > 0$ et tout $x \in \mathbb{R}$, $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(Q_t f)(x) = \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}(Q_t f)(x) - x\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(Q_t f)(x)$.

Notons $u(t,x) = (P_t f)(x)$ et $v(t,x) = (Q_t f)(x) = u(1-e^{-2t}, e^{-t}x)$. D'après 3.2.a), on a :

$$\begin{aligned}
\frac{\partial v}{\partial t}(t,x) &= 2e^{-2t}\frac{\partial u}{\partial t}(1-e^{-2t}, e^{-t}x) - e^{-t}x\frac{\partial u}{\partial x}(1-e^{-2t}, e^{-t}x) \\
\frac{\partial v}{\partial x}(t,x) &= e^{-t}\frac{\partial u}{\partial x}(1-e^{-2t}, e^{-t}x) \\
\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}(t,x) &= e^{-2t}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(1-e^{-2t}, e^{-t}x)
\end{aligned}$$

Or, d'après 2.6.c), on a $\dfrac{\partial u}{\partial t} = \dfrac{1}{2}\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}$, donc $\dfrac{\partial v}{\partial t} = \dfrac{\partial^2 v}{\partial x^2} - x\dfrac{\partial v}{\partial x}$, ce qu'il fallait démontrer.

3.3. Montrer que $-\int_{\mathbb{R}} Lf\, g\,\gamma_1 = \int_{\mathbb{R}} f'\, g'\,\gamma_1$.

La fonctions $f'\,g'$ est bornée et la fonction γ_1 est intégrable sur $\mathbb{R}$; le produit $f'\,g'\,\gamma_1$ est de plus continu donc continu par morceaux sur $\mathbb{R}$; donc, par comparaison, l'intégrale $\int_{\mathbb{R}} f'\,g'\,\gamma_1$ converge absolument.

On a $Lf\,g\,\gamma_1 = f''\,g\,\gamma_1 + f'\,g\,\gamma_1'$; les fonctions $f''\,g$ et $f'g$ sont bornées et les fonctions γ_1 et γ_1' sont intégrables ; toutes ces fonctions sont continues par morceaux ; donc, par comparaison et linéarité, l'intégrale $\int_{\mathbb{R}} Lf\,g\,\gamma_1$ converge absolument.

Par ailleurs, les fonctions g et $f'\,\gamma_1$ sont de classe C^1 sur $\mathbb{R}$. Comme $\gamma_1'(x) = -x\gamma_1(x)$, on a $(f'\,\gamma_1)' = Lf\,\gamma_1$. Par intégration par parties, l'existence des deux intégrales entraînant celle du troisième terme, on obtient l'égalité :

$$\int_{\mathbb{R}} f'(x)g'(x)\gamma_1(x)\,\mathrm{d}x = \Big[f'(x)g(x)\gamma_1(x)\Big]_{-\infty}^{+\infty} - \int_{\mathbb{R}} Lf(x)g(x)\gamma_1(x)\,\mathrm{d}x,$$

d'où l'égalité demandée, puisque f' et g sont bornées et γ_1 est de limite nulle en $\pm\infty$.

3.4. Soit $f \in C_b(\mathbb{R})$. Montrer $\forall\, t > 0$, $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_{\mathbb{R}} Q_t f(x)\,\gamma_1(x)\,\mathrm{d}x = 0$, puis $\forall\, t \geqslant 0$, $\langle Q_t f\rangle = \langle f\rangle$.

À l'aide des majorations de la question 3.2.b), on obtient par dérivation d'une intégrale à paramètre :

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_{\mathbb{R}} Q_t f(x)\,\gamma_1(x)\,\mathrm{d}x &= \int_{\mathbb{R}}\Big[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}Q_t f\Big](x)\,\gamma_1(x)\,\mathrm{d}x \\
&= \int_{\mathbb{R}}\Big[LQ_t f\Big](x)\,\gamma_1(x)\,\mathrm{d}x \qquad \text{(d'après 3.2.c))} \\
&= \int_{\mathbb{R}}\Big[Q_t f\Big]'(x)\,0\,\gamma_1(x)\,\mathrm{d}x = 0
\end{aligned}$$

(d'après 3.3 avec $g = \tilde{1}$ et $Q_t f$, $[Q_t f]'$ et $[Q_t f]''$ continues et bornées par 3.2.a) et b))

Pour $x \in \mathbb{R}$ fixé, d'après la question 2.4.a) et par composition, l'application $t \mapsto Q_t f(x)$ est continue sur $\mathbb{R}^+$. Par continuité des intégrales à paramètre (la domination venant encore de 3.2.b)), on en déduit que l'application $t \mapsto \langle Q_t f\rangle = \int_{\mathbb{R}} Q_t f(x)\,\gamma_1(x)\,\mathrm{d}x$ est continue sur $\mathbb{R}^+$.

Or on a prouvé que sa dérivée est nulle sur $\mathbb{R}_+^*$, donc cette fonction est constante sur $\mathbb{R}^+$:

$$\forall t \in \mathbb{R}^+, \quad \langle Q_t f\rangle = \langle Q_0 f\rangle = \langle f\rangle\,.$$

3.5.a) Vérifier que $I(f) = \int_{\mathbb{R}}(\int_{\mathbb{R}}[f(x)-f(y)]^2\gamma_1(x)\,\mathrm{d}x)\gamma_1(y)\,\mathrm{d}y$ est bien définie.

Pour y fixé et tout $x \in \mathbb{R}$, on a $\left|[f(x)-f(y)]^2\gamma_1(x)\right| \leqslant 4\|f\|_\infty^2\gamma_1(x)$. Ceci donne la domination ; on vérifie immédiatement les autres hypothèse du théorème de continuité des intégrales à paramètre, la fonction $J : y \mapsto \int_{\mathbb{R}}[f(x)-f(y)]^2\gamma_1(x)\,\mathrm{d}x$ est bien définie et continue sur $\mathbb{R}$.

De plus, pour tout $y \in \mathbb{R}$, $\left|J(y)\gamma_1(y)\right| \leqslant 4\|f\|_\infty^2\gamma_1(y)$, donc par comparaison l'intégrale $I(f)$ est bien définie.

3.5.b) Montrer que $\frac{1}{2}I(f) = \mathrm{Var}(f)$.

Par linéarité de l'intégrale, la convergence des différents termes se prouvant commme en a),

$$\begin{aligned} I(f) &= \int_{\mathbb{R}}\left(\int_{\mathbb{R}}\big[f(x)-f(y)\big]^2\gamma_1(x)\,\mathrm{d}x\right)\gamma_1(y)\,\mathrm{d}y \\ &= \int_{\mathbb{R}}\left(\int_{\mathbb{R}} f(x)^2\gamma_1(x)\,\mathrm{d}x\right)\gamma_1(y)\,\mathrm{d}y + \int_{\mathbb{R}}\left(\int_{\mathbb{R}} f(y)^2\gamma_1(x)\,\mathrm{d}x\right)\gamma_1(y)\,\mathrm{d}y \\ &\qquad\qquad - 2\int_{\mathbb{R}}\left(\int_{\mathbb{R}} f(x)f(y)\gamma_1(x)\,\mathrm{d}x\right)\gamma_1(y)\,\mathrm{d}y \\ &= 2\Big(\langle f^2\rangle - \langle f\rangle^2\Big) \end{aligned}$$

De même, $\mathrm{Var}(f) = \langle f^2\rangle - \langle f\rangle^2$, d'où le résultat.

3.6. Pour f de classe C^1 avec f, f' bornées, montrer $\int_{\mathbb{R}} xf(x)\gamma_1(x)\,\mathrm{d}x = \int_{\mathbb{R}} f'(x)\gamma_1(x)\,\mathrm{d}x$.

Par intégration par parties, comme en 3.3 (tous les termes convergent sans difficulté).

3.7.a) Pour $f \in C_b(\mathbb{R})$, vérifier que les intégrales $I_1(f) = \int_{\mathbb{R}}(\int_{\mathbb{R}} x[\int_y^x f(u)\,\mathrm{d}u]\gamma_1(x)\,\mathrm{d}x)\gamma_1(y)\,\mathrm{d}y$ et $I_2(f) = \int_{\mathbb{R}}(\int_{\mathbb{R}} y[\int_x^y f(u)\,\mathrm{d}u]\gamma_1(x)\,\mathrm{d}x)\gamma_1(y)\,\mathrm{d}y$ sont bien définies.

Comme à la question 3.5.a), sans oublier la continuité des différentes fonctions intégrées (la domination peut se faire sur tout segment).

3.7.b) Montrer que $I_1(f) = I_2(f) = \langle f\rangle$.

On remarque que la preuve de la question 3.6. fonctionne à l'identique si f n'est pas supposée bornée, car le caractère borné de f' implique que $f(x) = O_{x\to\pm\infty}\big(|x|\big)$.

On considère une primitive F de la fonction f, à laquelle on peut appliquer le résultat de 3.6. Alors, par linéarité de l'intégrale :

$$\begin{aligned} I_1(f) &= \int_{\mathbb{R}}\left(\int_{\mathbb{R}} x\Big[F(x)-F(y)\Big]\gamma_1(x)\,\mathrm{d}x\right)\gamma_1(y)\,\mathrm{d}y \\ &= \int_{\mathbb{R}}\left(\int_{\mathbb{R}} xF(x)\gamma_1(x)\,\mathrm{d}x\right)\gamma_1(y)\,\mathrm{d}y - \int_{\mathbb{R}}\left(\int_{\mathbb{R}} xF(y)\gamma_1(x)\,\mathrm{d}x\right)\gamma_1(y)\,\mathrm{d}y \\ &= \int_{\mathbb{R}}\left(\int_{\mathbb{R}} f(x)\gamma_1(x)\,\mathrm{d}x\right)\gamma_1(y)\,\mathrm{d}y - \int_{\mathbb{R}}\left(\int_{\mathbb{R}} x\gamma_1(x)\,\mathrm{d}x\right)F(y)\gamma_1(y)\,\mathrm{d}y \\ &= \langle f\rangle - 0 \qquad\qquad \left(\text{car } \int_{\mathbb{R}}\gamma_1(x)\,\mathrm{d}x = 1 \text{ et } \int_{\mathbb{R}} x\gamma_1(x)\,\mathrm{d}x = -\int_{\mathbb{R}}\gamma_1'(x)\,\mathrm{d}x = 0\right) \end{aligned}$$

Et de même, $I_2(f) = \langle f\rangle$.

3.8.a) Montrer que, pour tout $x, y \in \mathbb{R}^2$, on a $[f(x)-f(y)]^2 \leqslant (x-y)\int_y^x f'(u)^2\,\mathrm{d}u$.

Si $x = y$, le résultat est immédiat. Sinon, notons $K = [(x,y)]$ le segment d'extrémités x et y. Pour des fonctions a, b continues sur K, notons $\langle a,b\rangle = \int_K a(u)b(u)\,\mathrm{d}u$; on définit ainsi un produit scalaire. Par l'inégalité de Cauchy-Schwarz, on obtient $\langle a,b\rangle^2 \leqslant \langle a,a\rangle\,\langle b,b\rangle$.

Prenons alors $a = \tilde{1}$ et $b = f'$: on obtient exactement l'inégalité demandée (en distinguant les cas $x < y$ et $x > y$).

3.8.b) Montrer l'inégalité $\mathrm{Var}(f) \leqslant \int_{\mathbb{R}} f'(x)^2 \gamma_1(x)\,\mathrm{d}x$**.**

$$\begin{aligned}
\mathrm{Var}(f) = \frac{1}{2} I(f) &= \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} \big[f(x) - f(y) \big]^2 \gamma_1(x)\,\mathrm{d}x \right) \gamma_1(y)\,\mathrm{d}y \\
&\leqslant \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} (x-y) \left[\int_y^x f'(u)^2\,\mathrm{d}u \right] \gamma_1(x)\,\mathrm{d}x \right) \gamma_1(y)\,\mathrm{d}y \\
&\leqslant \frac{1}{2} \Big[I_1(f'^2) + I_2(f'^2) \Big] = \big\langle f'^2 \big\rangle
\end{aligned}$$

3.9.a) Montrer que si $\langle f \rangle = 0$**, on a** $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \int_{\mathbb{R}} Q_t f(x)^2 \gamma_1(x)\,\mathrm{d}x \leqslant -2 \int_{\mathbb{R}} Q_t f(x)^2 \gamma_1(x)\,\mathrm{d}x$**.**

Par dérivation d'une intégrale à paramètre (qui marche bien comme d'habitude...), pour $t > 0$,

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \int_{\mathbb{R}} Q_t f(x)^2 \gamma_1(x)\,\mathrm{d}x &= 2 \int_{\mathbb{R}} \left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} Q_t f(x) \right] Q_t f(x)\, \gamma_1(x)\,\mathrm{d}x \\
&= 2 \int_{\mathbb{R}} \big[L Q_t f \big](x)\, Q_t f(x)\, \gamma_1(x)\,\mathrm{d}x && \text{(d'après 3.2.c))} \\
&= -2 \int_{\mathbb{R}} \Big[\big[Q_t f \big]'(x) \Big]^2 \gamma_1(x)\,\mathrm{d}x && \text{(d'après 3.3)} \\
&\leqslant -2\, \mathrm{Var}(Q_t f) && \text{(d'après 3.8.b))}
\end{aligned}$$

et $\mathrm{Var}(Q_t f) = \big(\langle (Q_t f)^2 \rangle - \langle Q_t f \rangle^2 \big) = \big(\langle (Q_t f)^2 \rangle - \underbrace{\langle f \rangle^2}_{=0} \big) = \langle (Q_t f)^2 \rangle$, d'où le résultat.

3.8.b) Montrer que pour tout $t > 0$ **on a** $\mathrm{Var}(Q_t f) \leqslant e^{-2t} \mathrm{Var}(\mathrm{f})$

Considérons la fonction $\varphi : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R},\ t \mapsto e^{2t} \mathrm{Var}(Q_t f)$.

D'après ce qui précède (et par un petit coup de continuité des intégrales à paramètres), la fonction φ est continue sur $\mathbb{R}^+$ et dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$. Pour tout $t > 0$,

$$\varphi'(t) = e^{2t} \left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \mathrm{Var}(Q_t f) + 2 \mathrm{Var}(Q_t f) \right] \leqslant 0.$$

Donc φ est décroissante sur $\mathbb{R}^+$ et, pour tout $t > 0$, $\varphi(t) \leqslant \varphi(0) = \mathrm{Var}(Q_0 f) = \mathrm{Var}(f)$. Ceci prouve le résultat attendu.