ÉCOLES NORMALES SUPÉRIEURES

CONCOURS D'ADMISSION 2011 FILIÈRE **MP**

COMPOSITION DE MATHÉMATIQUES – C – (ULC)

(Durée : 4 heures)

L'utilisation des calculatrices n'est pas autorisée pour cette épreuve.

⋆⋆⋆

Diffusion sur des ensembles finis

Préambule

Ce problème est constitué de trois parties.

Le but du problème est d'étudier des processus similaires à la diffusion sur des ensembles finis. La vitesse de convergence vers la configuration uniforme est mesurée à l'aide de deux constantes : la constante de Poincaré permet de mesurer la vitesse de décroissance de l'énergie (partie 1), tandis que la constante de Sobolev permet de mesurer la vitesse de décroissance de l'entropie, qui est dans ce contexte l'opposée de l'entropie physique (partie 2). Un exemple est traité dans la partie 3 : la diffusion classique sur l'hypercube $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^d$ avec le calcul de la constante de Poincaré.

Définitions, notations et rappels

On note $\mathbb{R}$ le corps des nombres réels, $\mathbb{R}_+$ le sous-ensemble des nombres réels positifs, et $\mathbb{R}_+^*$ le sous-ensemble des nombres réels strictement positifs.

On introduit $\langle \cdot, \cdot \rangle$ le produit scalaire renormalisé sur $\mathbb{R}^N$:

$$\langle u, v \rangle = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} u_i v_i \, .$$

On note $\| \cdot \|_2$ la norme euclidienne associée :

$$\|u\|_2^2 = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} u_i^2 \, .$$

On introduit le vecteur constant $\pi = {}^t(1,\ldots,1)$.

Si E est un ensemble, l'espace vectoriel des fonctions de E dans $\mathbb{R}$ est noté $\mathbb{R}^E$.

Matrices stochastiques

Dans tout ce problème, $P \in \mathcal{M}_N(\mathbb{R})$ désigne une matrice qui vérifie les propriétés suivantes :

$$\begin{aligned}
&\forall (i,j) \in \{1,\ldots,N\}^2 \quad p_{i,j} = p_{j,i}\ ,\\
&\forall (i,j) \in \{1,\ldots,N\}^2 \quad p_{i,j} \geq 0\ ,\\
&\forall j \in \{1,\ldots,N\} \quad \sum_{i=1}^{N} p_{i,j} = 1\ ,\\
&\forall i \in \{1,\ldots,N\} \quad \sum_{j=1}^{N} p_{i,j} = 1\ .
\end{aligned}$$

On dira en raccourci que P est **symétrique** et **bistochastique**. On remarquera que la dernière propriété est une conséquence des précédentes.

Si $p_{i,j} > 0$ on dit que l'état j est connecté à l'état i.

On dit que la matrice P est **irréductible** si pour tout couple d'indices $(i,j) \in \{1,\ldots,N\}^2$ il existe des états intermédiaires $(j_1, j_2, \ldots, j_l)$ qui permettent de connecter les états j et i :

$$p_{j_1,j} > 0 \quad \text{et} \quad p_{j_2,j_1} > 0 \quad \ldots \quad p_{j_l,j_{l-1}} > 0 \quad \text{et} \quad p_{i,j_l} > 0\ .$$

Inégalités de convexité

Soit une fonction $\varphi : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$, continue et de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$. On rappelle que φ est strictement convexe si et seulement si φ' est strictement croissante.

Inégalité de Jensen, version discrète

Soit une fonction $\varphi : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ continue, de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$ et strictement convexe. Soit $\beta \in (\mathbb{R}_+)^N$ tel que $\sum_{i=1}^N \beta_i = 1$. Pour tout $f \in (\mathbb{R}_+)^N$ on a

$$\varphi\left(\sum_{i=1}^{N} \beta_i f_i\right) \leq \sum_{i=1}^{N} \beta_i\, \varphi(f_i)\ .$$

Dans le cas où $\forall i\ \beta_i > 0$, cette inégalité est une égalité si et seulement si f est colinéaire au vecteur constant π.

Inégalité de Jensen, version continue

Soit une fonction $\varphi : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ continue, de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$ et strictement convexe. Soit β une fonction continue de $[a,b] \to \mathbb{R}_+$ telle que $\int_a^b \beta(t)\, dt = 1$. Pour toute fonction continue $f(t)$ de $[a,b]$ dans $\mathbb{R}_+$ on a

$$\varphi\left(\int_a^b \beta(t) f(t)\, dt\right) \leq \int_a^b \beta(t)\, \varphi\left(f(t)\right)\, dt\,.$$

Dans le cas où $\forall t\ \beta(t) > 0$, cette inégalité est une égalité si et seulement si f est une fonction constante.

1 Energie et inégalité de trou spectral

Soit $P \in \mathcal{M}_N(\mathbb{R})$ une matrice symétrique, bistochastique et irréductible.

1. (a) Montrer que le vecteur $\pi = {}^t(1, \ldots, 1)$ est un vecteur propre de P.
   (b) On suppose de plus que $\forall (i,j) \in \{1, \ldots, N\}^2\ p_{i,j} > 0$. Montrer que $\lambda = 1$ est une valeur propre simple de P.
   Indication. Si $u = (u_i)$ est un vecteur propre on pourra s'intéresser à la valeur maximale $U = \max\{u_i\} = u_{i_0}$.
   (c) Montrer que l'on peut aboutir à la même conclusion sans l'hypothèse supplémentaire $\forall (i,j) \in \{1, \ldots, N\}^2\ p_{i,j} > 0$.
2. On définit la forme de Dirichlet associée à la matrice P

$$\forall u \in \mathbb{R}^N \quad \mathcal{E}(u,u) = \frac{1}{2N} \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N (u_i - u_j)^2 p_{ij}\,.$$

   (a) Montrer que $\mathcal{E}(u,u) = \langle u, (\mathrm{Id} - P)u \rangle = \langle (\mathrm{Id} - P)u, u \rangle$.
   (b) On définit la constante de Poincaré :

$$\mu = \inf \left\{ \frac{\mathcal{E}(v,v)}{\|v\|_2^2} \;\middle|\; v \in \mathbb{R}^N \setminus \{0\},\ \langle \pi, v \rangle = 0 \right\}\,.$$

   Montrer que l'infimum μ est atteint. En déduire que μ est strictement positif. Interpréter μ en fonction des valeurs propres de $\mathrm{Id} - P$.
   Indication : Comme en 1b, on pourra commencer par supposer : $\forall (i,j),\ p_{i,j} > 0$.
3. Soit $u^0 \in \mathbb{R}^N$ tel que $\langle \pi, u^0 \rangle = 1$. On définit le système différentiel linéaire de la façon suivante :

$$\begin{cases} u(0) = u^0 \\ u'(t) = (P - \mathrm{Id})u(t)\,. \end{cases} \tag{1}$$

   (a) Montrer qu'il existe une unique solution $u(t)$ définie sur l'intervalle maximal $\mathbb{R}$.
   (b) Montrer que :

$$\forall t \in \mathbb{R} \quad \langle \pi, u(t) \rangle = 1\,.$$

(c) Montrer que $u(t)$ converge vers π à vitesse exponentielle lorsque t tend vers $+\infty$:

$$\forall t \geq 0 \quad \|u(t) - \pi\|_2^2 \leq \|u^0 - \pi\|_2^2 \exp(-2\mu t) \; . \tag{2}$$

Indication. Si $e(t) = \|u(t) - \pi\|_2^2$, *chercher une inégalité qui relie* $e'(t)$ *et* $e(t)$ *puis multiplier par une fonction exponentielle bien choisie.*

2 Entropie et inégalité de Sobolev

Dans cette partie du problème, P désigne à nouveau une matrice symétrique, bistochastique et irréductible, et u désigne un vecteur de $\mathbb{R}^N$ qui vérifie les deux propriétés suivantes :

$$\forall i \in \{1, \ldots, N\} \quad u_i \geq 0 \; , \tag{3}$$

$$\langle \pi, u \rangle = 1 \; . \tag{4}$$

1. On définit l'entropie

$$\mathbf{H}(u) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} u_i \ln u_i \; ,$$

avec la convention $u_i \ln u_i = 0$ si $u_i = 0$.
Montrer, à l'aide de l'inégalité de Jensen, que l'entropie est une quantité positive. À quelle condition a-t-on $\mathbf{H}(u) = 0$?

2. Pour $f \in \mathbb{R}^N \setminus \{0\}$ on définit

$$\mathbf{L}(f) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} f_i^2 \ln \frac{f_i^2}{\|f\|_2^2} \; ,$$

ainsi que la constante de Sobolev :

$$\alpha = \inf \left\{ \frac{\mathcal{E}(f,f)}{\mathbf{L}(f)} \;\middle|\; f \in \mathbb{R}^N \setminus \{0\} \, , \; \mathbf{L}(f) \neq 0 \right\} .$$

(a) Soit $v \in \mathbb{R}^N \setminus \{0\}$ tel que $\langle \pi, v \rangle = 0$. On écrit $f = \pi + \varepsilon v$. Établir l'expression du développement limité :

$$\mathbf{L}(f) = 2\varepsilon^2 \|v\|_2^2 + O(\varepsilon^3) \; , \quad \text{lorsque } \varepsilon \to 0 \; . \tag{5}$$

(b) En faisant tendre ε vers 0 montrer que

$$\alpha \leq \frac{\mu}{2} \; .$$

On admettra que α est strictement positif.

3. On étend la définition de $\mathcal{E}$ à des couples de vecteurs $(u, v) \in \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N$:

$$\mathcal{E}(u, v) = \frac{1}{2N} \sum_{i=1}^{N} \sum_{j=1}^{N} (u_i - u_j)(v_i - v_j) \, p_{ij} \; .$$

(a) Montrer que $\mathcal{E}(u,v) = \langle u, (\mathrm{Id} - P)v\rangle = \langle (\mathrm{Id} - P)u, v\rangle$.

(b) Montrer que pour tout couple (a,b) de réels distincts strictement positifs,

$$\left(\frac{\sqrt{b}-\sqrt{a}}{b-a}\right)^2 \leq \frac{1}{4}\frac{\ln b - \ln a}{b-a} .$$

Indication. On pourra écrire la différence $\sqrt{b}-\sqrt{a}$ comme une intégrale bien choisie sur $[a,b]$.

(c) Si $u \in (\mathbb{R}_+^*)^N$ on définit les vecteurs auxiliaires $\ln u = (\ln u_i)$ et $\sqrt{u} = (\sqrt{u_i})$. Déduire de la question précédente que

$$\forall u \in (\mathbb{R}_+^*)^N \quad \mathcal{E}(u, \ln u) \geq 4\mathcal{E}(\sqrt{u}, \sqrt{u}) .$$

4. On considère à nouveau le système différentiel introduit en (1), où u^0 vérifie la propriété (4) et

$$\forall i \in \{1,\ldots,N\} \quad u_i^0 > 0 .$$

(a) Montrer que $\exp(t(P - \mathrm{Id}))$ est une matrice à termes positifs pour tout $t \geq 0$. En déduire :

$$\forall t \geq 0 \quad \forall i \in \{1,\ldots,N\} \quad u_i(t) > 0 .$$

(b) Montrer que

$$\frac{d\mathbf{H}(u(t))}{dt} = \langle u'(t), \ln u(t) + \pi\rangle .$$

(c) Montrer que l'entropie converge vers 0 à vitesse exponentielle lorsque $t \to +\infty$:

$$\forall t \geq 0 \quad \mathbf{H}(u(t)) \leq \mathbf{H}(u^0)\exp(-4\alpha t) . \tag{6}$$

(d) Montrer que l'on peut étendre l'inégalité (6) au cas où u^0 vérifie les propriétés (3) et (4).
Indication. On pourra considérer la condition initiale $u_\varepsilon^0 = (1-\varepsilon)u^0 + \varepsilon\pi$.

5. On définit la norme de la variation totale entre deux vecteurs $(u,v) \in \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N$:

$$\|u - v\|_{VT} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^N |u_i - v_i| .$$

(a) Donner une constante C_N telle que $\|u-v\|_{VT}^2 \leq C_N\|u-v\|_2^2$ pour tout couple $(u,v) \in \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N$.

(b) **On admettra** l'inégalité suivante, valable pour tout réel $a > 0$,

$$\frac{3(a-1)^2}{(4+2a)} \leq a\ln a - a + 1 .$$

En déduire l'estimation suivante à l'aide de l'inégalité de Cauchy-Schwarz :

$$(\forall u \in (\mathbb{R}_+)^N \text{ tel que } \langle \pi, u\rangle = 1) \quad \|u - \pi\|_{VT}^2 \leq 2\mathbf{H}(u). \tag{7}$$

3 Exemple de l'hypercube $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^d$

Soit $d \geq 2$. On considère $E = (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^d$ l'ensemble des $d-$uplets $(x_1, \dots, x_d)$ avec $\forall i,\ x_i \in \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$. On remarquera que $x = -x$ pour tout $x \in E$.

On note $N = |E| = 2^d$. On note $0 = (0, \dots, 0)$. On définit les éléments particuliers de E :

$$e_1 = (1, 0, \dots, 0)\ , \quad e_2 = (0, 1, \dots 0,)\ , \quad \dots \quad e_d = (0, \dots, 0, 1)\ .$$

On note $\cdot$ l'application de $E \times E \to \mathbb{R}$:

$$x \cdot y = \sum_{i=1}^{d} x_i y_i\ .$$

On identifie l'espace vectoriel $\mathbb{R}^E$ avec $\mathbb{R}^N$ muni du produit scalaire renormalisé $\langle \cdot, \cdot \rangle$:

$$\langle u, v \rangle = \frac{1}{N} \sum_{x \in E} u(x) v(x)\ .$$

Si $x \in E$ on note $\delta_x \in \mathbb{R}^E$ la fonction telle que $\delta_x(x) = 1$ et $\delta_x(y) = 0$ si $y \neq x$.

1. A toute fonction $u \in \mathbb{R}^E$ on associe la fonction transformée $\widehat{u} \in \mathbb{R}^E$:

$$\forall \xi \in E, \quad \widehat{u}(\xi) = \sum_{x \in E} (-1)^{-\xi \cdot x}\, u(x)\ .$$

   (a) Montrer que pour tout $z \in E$,

$$z \neq 0 \Longrightarrow \sum_{\xi \in E} (-1)^{\xi \cdot z} = 0\ .$$

   (b) Montrer la formule d'inversion

$$\forall y \in E, \quad u(y) = \frac{1}{N} \sum_{\xi \in E} (-1)^{\xi \cdot y}\, \widehat{u}(\xi)\ .$$

   Indication. On pourra chercher à démontrer cette identité sur des fonctions particulières.

   (c) En déduire l'identité suivante :

$$\langle u, v \rangle = \frac{1}{N} \langle \widehat{u}, \widehat{v} \rangle\ .$$

2. On définit la matrice $P = (p_{x,y}) \in \mathcal{M}_N(\mathbb{R})$:

$$\begin{cases} p_{x,y} = 1/d & \text{s'il existe } i \text{ tel que } y - x = e_i \\ p_{x,y} = 0 & \text{sinon}\ . \end{cases}$$

   Montrer que la matrice P est symétrique, bistochastique et irréductible.

3. On définit $\mathcal{E}$ la forme de Dirichlet associée à P comme précédemment :

$$\forall u \in \mathbb{R}^E \quad \mathcal{E}(u,u) = \frac{1}{2N} \sum_{x \in E} \sum_{y \in E} (u(x) - u(y))^2 p_{x,y} \,,$$

ainsi que la constante de Poincaré

$$\mu = \inf \left\{ \frac{\mathcal{E}(v,v)}{\|v\|_2^2} \;\middle|\; v \in \mathbb{R}^E \setminus \{0\} \,,\; \langle \pi, v \rangle = 0 \right\} .$$

Pour tout $\xi \in E$ on définit

$$c(\xi) = 1 - \frac{1}{d} \sum_{i=1}^{d} (-1)^{\xi_i} \,.$$

(a) Montrer que

$$\forall \xi \neq 0, \quad c(\xi) \geq \frac{2}{d} \,.$$

(b) On définit $w = (\mathrm{Id} - P)v$. Montrer que

$$\forall \xi \in E, \quad \widehat{w}(\xi) = c(\xi) \widehat{v}(\xi) \,,$$

(c) En déduire la valeur de la constante de Poincaré :

$$\mu = \frac{2}{d} \,.$$

4. **On admettra** que la constante de Sobolev vaut $\alpha = 1/d$ dans ce cas. On considère à nouveau le système différentiel introduit en (1), avec la donnée initiale $u^0 = N\delta_x$. Déterminer le temps T suffisant pour atteindre la configuration uniforme π avec la précision $\varepsilon > 0$ en variation totale :

$$\forall t \geq T \quad \|u(t) - \pi\|_{VT} \leq \varepsilon \;\ldots$$

(a) ... en utilisant la constante de Poincaré et l'estimation (2),

(b) ... en utilisant la constante de Sobolev et l'estimation (6).

Que pouvez-vous en conclure ?

* *
*