Banque ENS 2011
Corrigé de l'épreuve C de mathématiques
(Ulm-Lyon-Cachan)

1 Énergie et inégalité de trou spectral

1.(a) π est non nul et $P\pi = \left(\sum_{j=1}^{N} p_{i,j}\right)_{1\leq i\leq n} = \pi$, donc π est un vecteur propre de P associé à la valeur propre 1.

1.(b) Soit $u = (u_i)_{1\leq i\leq N}$ un vecteur propre de P pour la valeur propre 1 et soit i_0 tel $u_{i_0} = \max(u_1, u_2, \ldots, u_N)$. Nous avons :

$$0 = u_{i_0} - u_{i_0} = \sum_{j=1}^{N} p_{i_0,j}u_{i_0} - \sum_{j=1}^{N} p_{i_0,j}u_j = \sum_{j=1}^{N} \underbrace{p_{i_0,j}(u_{i_0} - u_j)}_{\geq 0}$$

donc $p_{i_0,j}(u_{i_0} - u_j) = 0$ pour tout $j \in \{1, \ldots, N\}$. Comme les $p_{i,j}$ sont strictement positifs, $u = u_{i_0}\,\pi$. On en déduit que l'espace propre de P associé à la valeur propre 1 est la droite engendrée par π. Comme P est symétrique réelle, elle est diagonalisable et chaque espace propre de P a pour dimension l'ordre de multiplicité de la valeur propre associée : 1 est donc une valeur propre simple de P.

1.(c) Notons $M = \max(u_1, \ldots, u_N)$ et $E = \{j,\ u_j = M\}$. En reprenant la preuve précédente, nous avons :

$$\forall\, i, j \in \{1, 2, \ldots, N\}, (i \in E \text{ et } p_{i,j} \neq 0) \Longrightarrow j \in E$$

Autrement-dit, si j est connecté à i et si i est élément de E, j est également élément de E. Comme E est non vide et P irréductible, on obtient que $E = \{1, 2, \ldots, N\}$, c'est-à-dire que u est colinéaire à π : on conclut comme à la question (b).

2.(a) Nous avons, pour tout $u \in \mathbb{R}^N$:

$$\begin{aligned}
\mathcal{E}(u,u) &= \frac{1}{N}\sum_{1\leq i,j\leq N} \frac{u_i^2 + u_j^2}{2} p_{i,j} - \frac{1}{N}\sum_{1\leq i,j\leq N} u_iu_jp_{i,j} \\
&= \frac{1}{2N}\sum_{i=1}^{N} u_i^2 \underbrace{\sum_{j=1}^{N} p_{i,j}}_{=1} + \frac{1}{2N}\sum_{j=1}^{N} u_j^2 \underbrace{\sum_{i=1}^{N} p_{i,j}}_{=1} - \frac{1}{N}\sum_{1\leq i,j\leq N} u_iu_jp_{i,j} \\
&= \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} u_i^2 - \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} u_i\left(\sum_{j=1}^{N} p_{i,j}u_j\right) \\
&= \langle\, u\,,\, u\,\rangle - \langle\, u\,,\, Pu\,\rangle
\end{aligned}$$

Par symétrie du produit scalaire, nous obtenons donc

$$\mathcal{E}(u,u) = \langle\, u\,,\, (Id - P)u\,\rangle = \langle\, (Id - P)u\,,\, u\,\rangle$$

2.(b) Notons $\mathcal{B} = (e_i)$ la base orthonormale canonique, définie par $e_i = {}^t(0, \ldots, 0, \sqrt{N}, 0, \ldots, 0)$ où $\sqrt{N}$ est en position i. L'application $\varphi :\ u \longmapsto (Id - P)u$ a pour matrice $(Id - P)$ dans $\mathcal{B}$. Cette matrice est symétrique (réelle) et admet 0 pour valeur propre simple, associée à l'espace propre $\mathbb{R}\,\pi$. Le théorème spectral permet donc d'affirmer qu'il existe une base orthonormale $\mathcal{B}' = (\pi, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_n)$ tel que

$$Mat(\varphi, \mathcal{B}') = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 \\ 0 & \ldots & 0 & \lambda_N \end{pmatrix}$$

Si v est un vecteur non nul orthogonal à π, il s'écrit :

$$v = \sum_{i=2}^{N} v_i \varepsilon_i$$

et

$$\frac{\mathcal{E}(v,v)}{||v||_2^2} = \frac{\left\langle \sum_{i=2}^{N} u_i \varepsilon_i \,, \sum_{i=2}^{N} \lambda_i u_i \varepsilon_i \right\rangle}{\sum_{i=2}^{N} u_i^2} = \frac{\sum_{i=2}^{N} \lambda_i u_i^2}{\sum_{i=2}^{N} u_i^2} \geq \min_{2 \leq i \leq N} \lambda_i$$

Si i_0 est un indice en lequel ce minimum est atteint, le vecteur $u = \varepsilon_{i_0}$ donne un cas d'égalité : ceci prouve que la valeur μ est bien définie, qu'elle est atteinte et qu'elle est égale à λ_{i_0}. D'autre part, $\lambda_{i_0} = \mathcal{E}(\varepsilon_{i_0}, \varepsilon_{i_0}) \geq 0$ et λ_{i_0}est non nulle (0 est valeur propre simple de $Id - P$), donc $\mu > 0$.

Remarques :

• on peut évidemment suivre l'énoncé et commencer par démontrer que μ est atteint et strictement positif ($K = \{v \in \pi^\perp,\ ||v||_2 = 1\}$ est compact, $f :\ v \longmapsto \varepsilon(u,u)$ est continue et à valeurs strictement positives et $\mu = \inf\{f(v),\ v \in K\}$). Il faut cependant reprendre ensuite la preuve précédente pour obtenir $\mu = \lambda_{i_0}$.

• sauf erreur, je ne vois pas pourquoi l'énoncé suggère de commencer par supposer que les $p_{i,j}$ sont tous strictement positifs.

• cela aurait été plus pratique de définir directement la forme bilinéaire symétrique positive $\mathcal{E}$ (question 2-2) et de montrer que $\mathcal{E}$ restreinte à $\pi^\perp$ est définie positive (d'autant que l'on a besoin à la question suivante de la propriété $\langle\, u\,,\, (Id-P)v \,\rangle = \langle\, (Id-P)u\,,\, v \,\rangle$ dans un cas où $u \neq v$).

3.(a) (1) est un système différentiel linéaire d'ordre 1 homogène à coefficients constants avec condition initiale : on sait qu'il possède une unique solution maximale, définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\forall\, t \in \mathbb{R},\ u(t) = e^{t(P-Id)}\, u^0$$

3.(b) L'application $t \longmapsto \langle\, \pi\,,\, u(t) \,\rangle$ est de classe C^1 et a pour dérivée

$$t \longmapsto \langle\, \pi\,,\, u'(t) \,\rangle = \langle\, \pi\,,\, (Id-P)u(t) \,\rangle = \langle\, (Id-P)\pi\,,\, u(t) \,\rangle = \langle\, 0\,,\, u(t) \,\rangle = 0,$$

en remarquant que $u \longmapsto (Id-P)u$ est un endomorphisme symétrique (sa matrice dans la base orthonormale $\mathcal{B}$ est symétrique). Comme $\langle\, \pi\,,\, u(0) \,\rangle = \left\langle\, \pi\,,\, u^0 \,\right\rangle = 1$, nous obtenons l'égalité demandée.

3.(c) Dérivons la fonction e :

$$\begin{aligned} \forall t \in \mathbb{R},\ e'(t) &= 2\,\langle\, u(t)-\pi\,,\, u'(t) \,\rangle = 2\,\langle\, u(t)-\pi\,,\, (P-Id)u(t) \,\rangle \\ &= 2\,\langle\, u(t)-\pi\,,\, (P-Id)(u(t)-\pi) \,\rangle + 2\,\underbrace{\langle\, u(t)-\pi\,,\, (P-Id)\pi \,\rangle}_{=0} \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= -2\,\mathcal{E}(u(t)-\pi, u(t)-\pi) \\
&\leq -2\mu\,||u(t)-\pi||_2^2 \qquad \text{car } \langle\, u(t)-\pi\,,\,\pi\,\rangle = \langle\, u(t)\,,\,\pi\,\rangle - \langle\,\pi\,,\,\pi\,\rangle = 0 \\
&\leq -2\mu\, e(t)
\end{aligned}
$$

Classiquement, la fonction $\varphi:\ t \longmapsto e^{2\mu t}\, e(t)$ est de classe C^1 et sa dérivée est négative : on en déduit que $\varphi(t) \leq \varphi(0)$ pour tout $t \geq 0$, ce qui est exactement l'inégalité demandée.

2 Entropie et inégalité de Sobolev

1. L'application

$$\varphi:\ u \longmapsto \begin{cases} u\ln u & \text{si } u > 0 \\ 0 & \text{si } u = 0 \end{cases}$$

est continue sur $[0,+\infty[$, de classe C^2 sur $]0,+\infty[$ avc $\varphi''(u) = 1/u > 0$ pour tout $u > 0$. φ est donc strictement convexe sur $\mathbb{R}^+$, ce qui permet d'écrire :

$$0 = \varphi(1) = \varphi\left(\sum_{i=1}^{N} \frac{1}{N}\, u_i\right) \leq \sum_{i=1}^{N} \frac{1}{N}\, \varphi(u_i) = \frac{1}{N}\, \sum_{i=1}^{N} u_i \ln u_i = H(u).$$

2.(a) Il suffit de faire le calcul :

$$
\begin{aligned}
L(\pi+\varepsilon v) &= \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}(1+\varepsilon v_i)^2 \ln\frac{(1+\varepsilon v_i)^2}{||\pi+\varepsilon v||_2^2} \\
&= \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}(1+\varepsilon v_i)^2\Big(2\,\ln(1+\varepsilon v_i) - \ln(||\pi||_2^2 + 2\varepsilon\,\langle\,\pi\,,\,v\,\rangle + \varepsilon^2||v||_2^2)\Big) \\
&= \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}(1+\varepsilon v_i)^2\Big(2\,\varepsilon v_i - \varepsilon^2 v_i^2 + O(\varepsilon^3) - \ln(1+\varepsilon^2||v||_2^2)\Big) \\
&= \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}(1+2\varepsilon v_i+\varepsilon^2 v_i^2)\Big(2\,\varepsilon v_i - \varepsilon^2(v_i^2 + ||v||_2^2) + O(\varepsilon^3)\Big) \\
&= \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\Big(2\varepsilon\, v_i + \varepsilon^2\,(3v_i^2 - ||v||_2^2) + O(\varepsilon^3)\Big) \\
&= 2\varepsilon\,\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} v_i + \varepsilon^2\,\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\Big(3v_i^2 - ||v||_2^2\Big) + O(\varepsilon^3) \\
&= 2\varepsilon\,\langle\,\pi\,,\,v\,\rangle + \varepsilon^2\,(3\,||v||_2^2 - ||v||_2^2) + O(\varepsilon^3) \\
&= 2\,\varepsilon^2\,||v||_2^2 + O(\varepsilon^3)
\end{aligned}
$$

2.(b) Fixons v non nul tel que $\langle\,\pi\,,\,v\,\rangle = 0$ et $\mu = \dfrac{\mathcal{E}(v,v)}{||v||_2^2}$. Comme $||v||_2^2$ est non nul, la question précédente prouve que $L(\pi+\varepsilon v)$ est équivalent à $2\,\varepsilon^2\,||v||_2^2$ quand ε tend vers 0. En particulier, pour ε non nul assez proche de

0, $L(\pi+\varepsilon v) \neq 0$ et

$$\alpha \leq \frac{\mathcal{E}(\pi+\varepsilon v, \pi+\varepsilon v)}{L(\pi+\varepsilon v)} = \frac{\langle \pi+\varepsilon v\,,\,(Id-P)(\pi+\varepsilon v)\,\rangle)}{L(\pi+\varepsilon v)} = \frac{\varepsilon\,\langle \pi+\varepsilon v\,,\,(Id-P)v\,\rangle)}{L(\pi+\varepsilon v)}$$

Comme $Id-P$ est symétrique, on en déduit :

$$\alpha \leq \frac{\varepsilon\,\langle\,(Id-P)(\pi+\varepsilon v)\,,\,v\,\rangle)}{L(\pi+\varepsilon v)} = \frac{\varepsilon^2\,\langle\,(Id-P)v\,,\,v\,\rangle)}{L(\pi+\varepsilon v)} = \frac{\varepsilon^2\mathcal{E}(v,v)}{L(\pi+\varepsilon v)} = \frac{\varepsilon^2\,\mu\,||v||_2^2}{L(\pi+\varepsilon v)}$$

On obtient alors $\alpha \leq \dfrac{\mu}{2}$ en faisant tendre ε vers 0.

3.(a) L'endomorphisme $u \longmapsto (Id-P)u$ est un endomorphisme symétrique de $(\mathbb{R}^N, \langle\ \ ,\ \ \rangle)$. On en déduit que l'application $\psi:\ (u,v) \longmapsto \langle\, u\,,\,(Id-P)v\,\rangle$ est une forme bilinéaire symétrique, associée à la forme quadratique $\mathcal{Q}:\ u \longmapsto \mathcal{E}(u,u)$. Cela donne en particulier :

$$\forall\, u,v \in \mathbb{R}^N,\ \langle\, u\,,\,(Id-P)v\,\rangle = \langle\, v\,,\,(Id-P)u\,\rangle = \langle\,(Id-P)u\,,\,v\,\rangle\,.$$

D'autre part, l'application $\mathcal{E}$ est également une forme bilinéaire symétrique, associée à la même forme quadratique $\mathcal{Q}$. Par unicité de la forme polaire associée à une forme quadratique (égalité de polarisation), on en déduit que $\mathcal{E} = \psi$.

3.(b) Par symétrie, nous pouvons supposer que $0 < a < b$. Nous avons alors, en utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz :

$$\left(\frac{\sqrt{b}-\sqrt{a}}{b-a}\right)^2 = \frac{1}{(b-a)^2}\left(\int_a^b \frac{\mathrm{d}t}{2\sqrt{t}}\right)^2 \leq \frac{1}{(b-a)^2}\left(\int_a^b \frac{\mathrm{d}t}{4t}\right)\left(\int_a^b \mathrm{d}t\right) = \frac{1}{4}\,\frac{\ln b - \ln a}{b-a}$$

3.(c) Soit $u \in (\mathbb{R}_+^*)^{\mathbb{N}}$. L'inégalité précédente donne directement :

$$\begin{aligned}\mathcal{E}(u, \ln u) &= \frac{1}{2N}\sum_{\substack{1\leq i,j\leq N\\ u_i\neq u_j}} (u_i-u_j)^2\,\frac{\ln u_i - \ln u_j}{u_i-u_j}\\ &\geq \frac{1}{2N}\sum_{\substack{1\leq i,j\leq N\\ u_i\neq u_j}} 4(u_i-u_j)^2\left(\frac{\sqrt{u_i}-\sqrt{u_j}}{u_i-u_j}\right)^2 = 4\,\mathcal{E}(\sqrt{u},\sqrt{u})\end{aligned}$$

4.(a) Soit $t \geq 0$. Les matrices $t\,P$ et $-t\,Id$ commutent, donc :

$$\forall\, t\geq 0,\ \exp(t(P-Id)) = \exp(t\,P)\exp(-t\,Id)) = e^{-t}\exp(t\,P) = \sum_{k=0}^{+\infty}\underbrace{e^{-t}\,\frac{t^k}{k!}}_{\geq 0}\,P^k$$

Pour tout $k \geq 0$, P^k est à termes positifs, donc $\exp(t(P-Id))$ l'est également.

On en déduit que pour tout t, $u(t) = \exp(t(P-Id))u^0$ a ses composantes toutes positives. Supposons que pour un certain $t_0 \geq 0$, l'ensemble $E = \{i \in \{1,\ldots,N\},\ u_i(t) = 0\}$ soit non vide. Fixons $i \in E$. L'hypothèse faite sur u^0 impose d'avoir $t_0 > 0$ et u_i étant à valeurs positives sur $[0,+\infty[$, nous avons $u_i'(t_0) = 0$, soit :

$$0 = u_i'(t_0) = \left(\sum_{j=1}^N p_{i,j}u_j(t_0)\right) - u_i(t_0) = \sum_{j=1}^N p_{i,j}u_j(t_0)$$

Comme les $p_{i,j}u_j(t_0)$ sont positifs, il sont tous nuls. Ainsi, comme à la question1.1c :

$$\forall\, i, j \in \{1, \ldots, N\}, (i \in E \text{ et } p_{i,j} \neq 0) \Longrightarrow j \in E$$

P étant irréductible et E non vide, $E = \{1, \ldots, N\}$, i.e. $u(t_0) = 0$, d'où

$$u^0 = \exp(-t(P - Id))u(t_0) = 0$$

Nous avons donc démontré un peu mieux que ce qui était demandé : si u^0 est non nul et à coordonnées positives, $u(t)$ est à coordonnées strictement positives pour tout $t > 0$.

4.(b) $\dfrac{d\mathbf{H}(u(t))}{dt} = \dfrac{1}{N}\displaystyle\sum_{i=1}^{N} u_i'(t)\ln u_i(t) + \dfrac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} u_i'(t) = \langle\, u'(t)\,,\, \ln u(t) + \pi\,\rangle = \langle\, u'(t)\,,\, \ln u\,\rangle$ (voir question 1.3b).

4.(c) Pour tout $t \geq 0$, on sait que $u_i(t) > 0$ pour tout i et le 2.c permet d'écrire :

$$\frac{d\mathbf{H}(u(t))}{dt} = \langle\, u'(t)\,,\, \ln u(t)\,\rangle = \langle\,(P - Id)u(t)\,,\, \ln u\,\rangle = -\mathcal{E}(u, \ln u(t)) \leq -4\mathcal{E}(\sqrt{u(t)}, \sqrt{u(t)}) \leq -4\alpha L(\sqrt{u(t)})$$

On a d'autre part :

$$||\sqrt{u(t)}||_2^2 = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} u_i(t) = \langle\, u(t)\,,\, \pi\,\rangle = 1 \text{ et } L(\sqrt{u(t)}) = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} u_i(t)\ln u_i(t) = \mathbf{H}(u(t))$$

donc

$$\forall\, t \geq 0,\ \frac{d\mathbf{H}(u(t))}{dt} \leq -4\alpha\mathbf{H}(u(t))$$

et on conclut comme à la question 1.3c :

$$\forall\, t \geq 0,\ \mathbf{H}(u(t)) \leq \mathbf{H}(u^0)\exp(-4\alpha t)$$

4.(d) Soit $\varepsilon > 0$. Le vecteur $u_\varepsilon^0 = (1 - \varepsilon)u^0 + \varepsilon\pi$ est strictement positif et vérifie (4). La question précédente donne donc :

$$\forall\, t \geq 0,\ \forall\, \varepsilon > 0,\ \mathbf{H}\left(e^{t(P-Id)}u_\varepsilon^0\right) \leq \mathbf{H}(u_\varepsilon^0)\, e^{-4\alpha t}$$

Il suffit alors de faire tendre ε vers 0 pour obtenir (6) ($\mathbf{H}$ et $\varepsilon \longmapsto (1 - \varepsilon)u^0 + \varepsilon\pi$ sont continues).

5.(a) C'est effectivement une application directe de l'inégalité de Cauchy-Schwarz :

$$\forall\, u, v,\ ||u - v||_{VT}^2 = \frac{1}{N^2}\left(\sum_{1\leq i\leq N} |u_i - v_i|\right)^2 \leq \frac{1}{N^2}\left(\sum_{1\leq i\leq N}(u_i - v_i)^2\right)\left(\sum_{1\leq i\leq N} 1\right) = ||u - v||_2^2$$

d'où l'inégalité demandée, avec $C_N = 1$.

5.(b) L'inégalité admise est également valable pour $a = 0$. On en déduit :

$$2H(u) = \frac{2}{N}\sum_{i=1}^{N} u_i\,\ln u_i \geq \frac{2}{N}\sum_{i=1}^{N}\left(u_i - 1 + \frac{3(u_i - 1)^2}{4 + 2u_i}\right) = \underbrace{2\,\langle\,\pi\,,\, u\,\rangle - 2}_{=0} + \frac{2}{N}\sum_{i=1}^{N}\frac{3(u_i - 1)^2}{4 + 2u_i} = \frac{6}{N}\sum_{i=1}^{N}\frac{(u_i - 1)^2}{4 + 2u_i}$$

or l'inégalité de Cauchy-Schwarz donne :

$$||u - \pi||_{VT}^2 = \frac{1}{N^2}\left(\sum_{i=1}^{N}\sqrt{4 + 2u_i}\,\frac{|u_i - 1|}{\sqrt{4 + 2u_i}}\right)^2 \leq \underbrace{\left(\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}(4 + 2u_i)\right)}_{=6}\left(\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\frac{(u_i - 1)^2}{4 + 2u_i}\right) = \frac{6}{N}\sum_{i=1}^{N}\frac{(u_i - 1)^2}{4 + 2u_i}$$

d'où l'égalité demandée.

3 Exemple de l'hypercube $\left((\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^d\right)$

Il y a une maladresse dans la définition de $x\cdot y$: comme x, y sont éléments de E, les x_i et y_i sont des éléments de $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$, donc $\sum_{i=1}^d x_iy_i$ est également un élément de $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$. Il faut comprendre ici que les x_iy_i sont identifiés aux éléments 0 et 1 de $\mathbb{R}$ avant de faire leur somme. On remarquera également que $(-1)^{-\xi\cdot x} = (-1)^{\xi\cdot x}$ pour $x, \xi \in E$.

1.(a) Soit $z \in E$. Nous avons :

$$\sum_{\xi\in E}(-1)^{\xi_i z_i} = \sum_{\xi_1,\ldots,\xi_d\in\{0,1\}} (-1)^{\xi_1 z_1+\cdots\xi_d z_d} = \prod_{1\le i\le d}(1+(-1)^{z_i}) = \begin{cases} 0 & \text{si } z\neq 0 \\ N & \text{si } z = 0\end{cases}$$

1.(b) Pour $u \in \mathbb{R}^E$, notons $\widetilde{u}$ l'élément de $\mathbb{R}^E$ défini par :

$$\forall\, z\in E,\ \widetilde{u}(z) = \frac{1}{N}\sum_{\xi\in E}(-1)^{\xi\cdot z}\, u(\xi).$$

Les applications $u \longmapsto \widehat{u}$ et $u \longmapsto \widetilde{u}$ sont clairement linéaires et nous devons montrer qu'elles sont inverses l'une de l'autre. Il suffit pour cela de démontrer la relation demandée pour chaque vecteur de la base canonique $(\delta_x)_{x\in E}$ de $\mathbb{R}^E$.

$$\begin{aligned}
\frac{1}{N}\sum_{\xi\in E}(-1)^{\xi\cdot y}\widehat{\delta_x}(\xi) &= \frac{1}{N}\sum_{\xi\in E}(-1)^{\xi\cdot y}\left(\sum_{\xi'\in E}(-1)^{-\xi'\cdot\xi}\,\delta_x(\xi')\right)\\
&= \frac{1}{N}\sum_{\xi\in E}(-1)^{\xi\cdot y}(-1)^{-x\cdot\xi}\\
&= \frac{1}{N}\sum_{\xi\in E}(-1)^{\xi\cdot(y-x)}\\
&= \begin{cases} 1 & \text{si } x-y=0\\ 0 & \text{sinon}\end{cases}\\
&= \delta_x(y)
\end{aligned}$$

1.(c) Nous en déduisons directement :

$$\frac{1}{N}\,\langle\,\widehat{u}\,,\,\widehat{v}\,\rangle = \frac{1}{N^2}\sum_{x\in E}\widehat{u}(x)\Bigg(\sum_{y\in E}(-1)^{-x\cdot y}\,v(y)\Bigg) = \frac{1}{N}\sum_{y\in E}v(y)\underbrace{\Bigg(\frac{1}{N}\sum_{x\in E}(-1)^{-x\cdot y}\,\widehat{u}(x)\Bigg)}_{=u(y)} = \langle\,u\,,\,v\,\rangle$$

2. Nous avons :

- pour $x, y \in E$, $p_{x,y} \geq 0$ et $x-y = y-x$ donne $p_{x,y} = p_{y,x}$;
- pour tout $x \in E$, les éléments y de E tels que $p_{x+y} = 1/q$ sont les éléments $x+e_1, x+e_2, \ldots, x+e_q$, ce qui donne $\sum_{y\in E} p_{x,y} = 1$;
- P étant symétrique, $\sum_{x\in E} p_{x,y} = 1$ pour tout $y \in E$;

- soient $x, y \in E$; si $x = y$, on a $p_{x,x+e_1} = p_{x+e_1,x} = 1/d > 0$; sinon, on peut écrire

$$x - y = e_{i_1} + e_{i_2} + \cdots + e_{i_k}$$

avec $k \geq 1$, ce qui donne : $p_{x,x+e_{i_1}} = p_{x+e_{i_1},x+e_{i_1}+e_{i_2}} = \cdots = p_{x+e_{i_1}+\cdots+e_{i_{k-1}},y} = 1/d > 0$.

La matrice P est donc symétrique, bistochastique et irréductible.

3.(a) Comme ξ est non nul, il existe i_0 tel que $\xi_{i_0} = 1$. Nous en déduisons :

$$c(\xi) = 1 + \frac{1}{d} - \frac{1}{d} \sum_{i \neq i_0} \underbrace{(-1)^{\xi_i}}_{\leq 1} \geq 1 + \frac{1}{d} - \frac{d-1}{d} = \frac{2}{d}$$

3.(b) Pour tout x de E, $w_x = v_x - \sum_{i=1}^{d} \frac{1}{d} v_{x+e_i}$, donc :

$$\begin{aligned}
\forall \xi \in E,\ \widehat{w}(\xi) &= \sum_{x \in E} (-1)^{-\xi \cdot x} \left(v_x - \sum_{i=1}^{d} \frac{1}{d} v_{x+e_i} \right) \\
&= \widehat{v}(\xi) - \frac{1}{d} \sum_{x \in E} (-1)^{-\xi \cdot x} \sum_{i=1}^{d} v_{x+e_i} \\
&= \widehat{v}(\xi) - \frac{1}{d} \sum_{i=1}^{d} \left(\sum_{x \in E} (-1)^{-\xi \cdot x} v_{x+e_i} \right) \\
&= \widehat{v}(\xi) - \frac{1}{d} \sum_{i=1}^{d} \left(\sum_{y \in E} (-1)^{-\xi \cdot (y - e_i)} v_y \right) \\
&= \widehat{v}(\xi) - \frac{1}{d} \sum_{i=1}^{d} (-1)^{\xi_i} \widehat{v}(\xi) \\
&= c(\xi) \widehat{v}(\xi)
\end{aligned}$$

3.(c) En reprenant les notations précédentes, nous avons, pour v non nul tel que $\langle \pi \, , \, v \rangle = 0$:

$$\mathcal{E}(v, v) = \langle w \, , \, v \rangle = \frac{1}{N} \langle \widehat{w} \, , \, \widehat{v} \rangle = \frac{1}{N^2} \sum_{x \in E} c(x) \widehat{v}(x)^2 \geq \frac{2}{q} \frac{1}{N} \langle \widehat{v} \, , \, \widehat{v} \rangle = \frac{2}{d} \langle v \, , \, v \rangle$$

Nous en déduisons que $\mu \geq \dfrac{2}{d}$.

Il reste à construire un vecteur v qui donne l'égalité. Pour cela, il faut et il suffit que l'on ait

$$\forall x \in E,\ c(x) \widehat{v}(x)^2 = \frac{2}{d} v(x)^2.$$

Comme $c(x) > \dfrac{2}{d}$ dès que x n'est pas l'un des e_i, cela impose d'avoir $\widehat{v}(x) = 0$ dès que $x \notin \{e_1, \ldots, e_d\}$. Posons donc $v = \widehat{\delta}_{e_1}$, de sorte que $\widehat{v} = \delta_{e_1}$ d'après la formule d'inversion. Nous avons :

- $\langle \pi \, , \, v \rangle = \dfrac{1}{N} \langle \widehat{\pi} \, , \, \widehat{v} \rangle = \dfrac{1}{N} \displaystyle\sum_{x \in E} \widehat{\pi}(x) \delta_{e_1}(x) = \dfrac{1}{N} \widehat{\pi}(e_1) = \dfrac{1}{N} \displaystyle\sum_{x \in E} (-1)^{e_1 \cdot x} \pi(x) = \dfrac{1}{N} \displaystyle\sum_{x \in E} (-1)^{e_1 \cdot x} = 0$

  car $e_1 \neq 0$.

- en posant $w = (Id - P)v$, nous avons :

$$\forall \xi \in E,\ \widehat{w}(\xi) = c(\xi)\widehat{v}(\xi) = \begin{cases} c(e_1) = 2/d & \text{si } \xi = e_1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

ce qui donne $\widehat{w} = \dfrac{2}{d}\,\delta_{e_1} = \dfrac{2}{d}\,\widehat{v}$. On en déduit :

$$\mu \leq \frac{\mathcal{E}(v,v)}{\langle\, v\,,\, v\,\rangle} = \frac{\langle\, v\,,\, w\,\rangle}{\langle\, v\,,\, v\,\rangle} = \frac{\langle\, \widehat{v}\,,\, \widehat{w}\,\rangle}{\langle\, \widehat{v}\,,\, \widehat{v}\,\rangle} = \frac{2}{d}$$

4.(a) En appliquant les questions 2.5.(a) et l'inégalité (2), nous obtenons :

$$\forall\, t \geq 0,\ ||u(t) - \pi||_{VT} \leq ||u(t) - \pi||_2 \leq ||u^0 - \pi||_2\, e^{-\mu t} = \sqrt{\frac{(N-1)^2 + N - 1}{N}}\, e^{-2t/d} = \sqrt{N-1}\, e^{-2t/d}$$

Nous aurons donc $||u(t) - \pi||_{VT} \leq \varepsilon$ pour tout $t \geq T_1$, avec :

$$T_1 = \frac{d}{2}\left(\ln\sqrt{N-1} - \ln\varepsilon\right) = -\frac{d}{2}\,\ln\varepsilon + \frac{d}{4}\,\ln(2^d - 1)$$

4.(b) Nous avons cette fois, pour tout $t \geq 0$:

$$||u(t) - \pi||_{VT} \leq \sqrt{2\,H(u(t))} \leq \sqrt{2\,H(u^0)}e^{-2\alpha t} = \sqrt{2\ln N}\, e^{-2t/d} = \sqrt{2d\ln 2}\, e^{-2t/d}$$

Nous aurons donc $||u(t) - \pi||_{VT} \leq \varepsilon$ pour tout $t \geq T_2$, avec :

$$T_2 = \frac{d}{2}\,\left(\ln\sqrt{2\,d\,\ln 2} - \ln\varepsilon\right) = -\frac{d}{2}\,\ln\varepsilon + \frac{d}{4}\,\ln(2\,d\,\ln 2)$$

Une étude élémentaire montre que $2^d - 1 \geq 2\,d\ln 2$ pour tout $d \geq 2$: on a donc toujours $T_1 \geq T_2$ et la méthode du (b) est plus efficace que celle du (a).