CONCOURS COMMUN INP

ÉPREUVE SPÉCIFIQUE - FILIÈRE MP

MATHÉMATIQUES 1

Lundi 29 avril : 14 h - 18 h

N.B. : le candidat attachera la plus grande importance à la clarté, à la précision et à la concision de la rédaction. Si un candidat est amené à repérer ce qui peut lui sembler être une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et devra poursuivre sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il a été amené à prendre.

Les calculatrices sont interdites

Le sujet est composé de deux exercices et d'un problème, tous indépendants.

EXERCICE I

On admet que $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$ et on pose, pour $t \in \left]0,+\infty\right[$, $f(t) = \frac{te^{-t}}{1-e^{-t}}$.

Q1. Justifier que la fonction f est intégrable sur $\left]0,+\infty\right[$ puis, à l'aide d'un théorème d'intégration terme à terme, calculer l'intégrale $\int_0^{+\infty} \frac{t}{e^t - 1}\,\mathrm{d}t$.

EXERCICE II

Si X est une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$ de loi de probabilité donnée par : $\forall n \in \mathbb{N}$, $p_n = P(X = n)$, la fonction génératrice de X est $G_X(t) = E(t^X) = \sum_{n=0}^{+\infty} p_n t^n$.

Q2. Démontrer que l'intervalle $\left]-1,1\right[$ est inclus dans l'ensemble de définition de la fonction G_X .

Soient X_1 et X_2 deux variables aléatoires indépendantes à valeurs dans $\mathbb{N}$.
On pose $S = X_1 + X_2$, démontrer que pour tout $t \in \left]-1, 1\right[$, $G_S(t) = G_{X_1}(t).G_{X_2}(t)$ par deux méthodes : l'une utilisant le produit de Cauchy de deux séries entières et l'autre utilisant uniquement la définition : $G_X(t) = E(t^X)$.

On généralise ce résultat, que l'on pourra utiliser dans la question suivante, à n variables aléatoires mutuellement indépendantes à valeurs dans $\mathbb{N}$ (on ne demande pas de preuve de cette récurrence).

Q3. Un sac contient quatre boules : une boule numérotée 0, deux boules numérotées 1 et une boule numérotée 2.
On effectue n tirages d'une boule avec remise et on note S_n la somme des numéros tirés.
Déterminer pour tout $t \in \left]-1, 1\right[$, $G_{S_n}(t)$ et en déduire la loi de S_n.

PROBLÈME

Introduction

Dans ce sujet une série de fonctions L_a est une série de fonctions $\sum_{n\geq 1} a_n \frac{x^n}{1-x^n}$ où $(a_n)_{n\geq 1}$ est une suite de réels telle que la série entière $\sum_{n\geq 1} a_n x^n$ soit de rayon 1.

Partie I - Propriétés

Soit une série de fonctions L_a : $\sum_{n\geq 1} a_n \frac{x^n}{1-x^n}$.

Q4. Si $x\in \left]-1,1\right[$, donner un équivalent de $1-x^n$ pour n au voisinage de $+\infty$.

Démontrer que pour tout $x\in \left]-1,1\right[$, la série $\sum_{n\geq 1} a_n \frac{x^n}{1-x^n}$ converge absolument.

<u>Remarque</u> : la série L_a peut parfois converger en dehors de l'intervalle $\left]-1,1\right[$. Donner un exemple de suite $(a_n)_{n\geq 1}$ telle que la série L_a converge en au moins un x_0 n'appartenant pas à l'intervalle $\left]-1,1\right[$.

Q5. Démontrer que la série de fonctions $\sum_{n\geq 1} a_n \frac{x^n}{1-x^n}$ converge uniformément sur tout segment $[-b,b]$ inclus dans l'intervalle $\left]-1,1\right[$.

Q6. On pose, pour tout $x\in \left]-1,1\right[$, $f(x)=\sum_{n=1}^{+\infty} a_n \frac{x^n}{1-x^n}$.

Justifier que la fonction f est continue sur l'intervalle $\left]-1,1\right[$ et démontrer ensuite que la fonction f est de classe C^1 sur l'intervalle $\left]-1,1\right[$. Donner la valeur de $f'(0)$.

Q7. Expression sous forme de série entière
On note $A=\mathbb{N}^*\times\mathbb{N}^*$.
Lorsque $(u_{n,p})_{(n,p)\in A}$ est une famille sommable de réels, justifier que

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\sum_{p=1}^{+\infty} u_{n,p}\right)=\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\sum_{(k,p)\in I_n} u_{k,p}\right),\text{ où } I_n=\{(k,p)\in A,\, kp=n\}.$$

Démontrer que pour tout $x\in \left]-1,1\right[$, la famille $(a_n x^{np})_{(n,p)\in A}$ est sommable.

En déduire que pour tout $x\in \left]-1,1\right[$, $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n \frac{x^n}{1-x^n}=\sum_{n=1}^{+\infty} b_n x^n$ où $b_n=\sum_{d|n} a_d$

($d|n$ signifiant d divise n).

Partie II - Exemples

Q8. Dans cette question, pour $n \geq 1$, $a_n = 1$ et on note d_n le nombre de diviseurs de *n*. Exprimer, pour tout $x \in \left]-1,1\right[$, $f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \frac{x^n}{1-x^n}$ comme la somme d'une série entière.

Q9. Dans cette question, pour $n \geq 1$, $a_n = \varphi(n)$ où $\varphi(n)$ est le nombre d'entiers naturels premiers avec *n* et inférieurs à *n*.

Justifier que la série entière $\sum_{n \geq 1} a_n x^n$ est de rayon 1.

On admet que pour $n \geq 1$, $n = \sum_{d|n} \varphi(d)$. Vérifier ce résultat pour $n = 12$.

Pour $x \in \left]-1,1\right[$, exprimer $\sum_{n=1}^{+\infty} \varphi(n) \frac{x^n}{1-x^n}$ sous la forme d'un quotient de deux polynômes.

Q10. En utilisant le théorème de la double limite, établir à l'aide du développement en série entière de la fonction $x \mapsto \ln(1+x)$ sur l'intervalle $\left]-1,1\right[$, la valeur de la somme $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n}$.

Q11. Dans cette question et la suivante, pour $n \geq 1$, $a_n = (-1)^n$ et pour tout $x \in \left]-1,1\right[$, $f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \frac{x^n}{1-x^n}$.

En utilisant le théorème de la double limite, calculer $\lim_{x \to 0} \frac{f(x)}{x}$ et donner un équivalent de $f(x)$ au voisinage de 0. Retrouver le dernier résultat de la question **Q6**.

Q12. Démontrer qu'au voisinage de 1, $f(x) \sim \frac{-\ln 2}{1-x}$.

On pourra remarquer que pour $x \in \left]0,1\right[$, $\frac{1-x}{1-x^n} = \frac{1}{1+x+x^2+\ldots+x^{n-1}}$.

FIN

IMPRIMERIE NATIONALE – 19 1144 – D'après documents fournis