INP-M1-2019

EXERCICE I

On admet que $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$ et on pose, pour $t \in]0, +\infty[$, $f(t) = \dfrac{te^{-t}}{1 - e^{-t}}$

Q1. Justifier que la fonction f est intégrable sur $]0, +\infty[$ puis, à l'aide d'un théorème d'intégration terme à terme, calculer l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{t}{e^t - 1} \,\mathrm{d}t$

EXERCICE II

Si X est une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$ de loi de probabilité donnée par : $\forall n \in \mathbb{N}$, $p_n = P(X = n)$, la fonction génératrice de X est

$$G_X(t) = E\left(t^X\right) = \sum_{n=0}^{+\infty} p_n t^n$$

Q2. Démontrer que l'intervalle $]-1, 1[$ est inclus dans l'ensemble de définition de la fonction G_X.

Soient X_1 et X_2 deux variables aléatoires indépendantes à valeurs dans $\mathbb{N}$.
On pose $S = X_1 + X_2$, démontrer que pour tout $t \in]-1, 1[$, $G_S(t) = G_{X_1}(t).G_{X_2}(t))$ par deux méthodes : l'une utilisant le produit de Cauchy de deux séries entières et l'autre utilisant uniquement la définition : $G_X(t) = E\left(t^X\right)$.

On généralise ce résultat, que l'on pourra utiliser dans la question suivante, à n variables aléatoires mutuellement indépendantes à valeurs dans $\mathbb{N}$ (on ne demande pas de preuve de cette récurrence).

Q3. Un sac contient quatre boules : une boule numérotée 0 , deux boules numérotées 1 et une boule numérotée 2.
On effectue n tirages d'une boule avec remise et on note S_n la somme des numéros tirés.
Déterminer pour tout $t \in]-1, 1[$, $G_{S_n}(t)$ et en déduire la loi de S_n

PROBLÈME

Dans ce sujet une série de fonctions L_a est une série de fonctions $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} a_n \frac{x^n}{1 - x^n}$ où $(a_n)_{n\geqslant 1}$ est une suite de réels telle que la série entière $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} a_n x^n$ soit de rayon 1.

Partie I: Propriétés

Soit une série de fonctions L_a : $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} a_n \frac{x^n}{1 - x^n}$

Q4. Si $x \in]-1, 1[$, donner un équivalent de $1 - x^n$ pour n au voisinage de $+\infty$.
Démontrer que pour tout $x \in]-1, 1[$, la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} a_n \frac{x^n}{1 - x^n}$ converge absolument.

Remarque: la série L_a peut parfois converger en dehors de l'intervalle $]-1, 1[$. Donner un exemple de suite $(a_n)_{n\geqslant 1}$ telle que la série L_a converge en au moins un x_0 n'appartenant pas à l'intervalle $]-1, 1[$

Q5. Démontrer que la série de fonctions $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} a_n \frac{x^n}{1 - x^n}$ converge uniformément sur tout segment $[-b, b]$ inclus dans l'intervalle $]-1, 1[$

Q6. On pose, pour tout $x \in]-1, 1[$, $f(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} a_n \frac{x^n}{1 - x^n}$
Justifier que la fonction f est continue sur l'intervalle $]-1, 1[$ et démontrer ensuite que la fonction f est de classe C^1 sur l'intervalle $]-1, 1[$. Donner la valeur de $f'(0)$

INP-M1-2019

Q7. **Expression sous forme de série entière**

On note $A = N^* \times \mathbb{N}^*$.

Lorsque $(u_{n,p})_{(n,p)\in A}$ est une famille sommable de réels, justifier que

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\sum_{p=1}^{+\infty} u_{n,p}\right) = \sum_{n=1}^{+\infty}\left(\sum_{(k,p)\in I_n} u_{k,p}\right), \text{ où } I_n = \{(k,p) \in A, kp = n\}$$

Démontrer que pour tout $x \in]-1,1[$, la famille $(a_n x^{np})_{(n,p)\in A}$ est sommable.

En déduire que pour tout $x \in]-1,1[, \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} a_n \frac{x^n}{1-x^n} = \sum_{n=1}^{+\infty} b_n x^n$ où $b_n = \displaystyle\sum_{d|n} a_d$ ($d|n$ signifiant d divise n)

Partie II: Exemple

Q8. Dans cette question, pour $n \geqslant 1, a_n = 1$ et on note d_n le nombre de diviseurs de n. Exprimer, pour tout $x \in]-1,1[, f(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n \frac{x^n}{1-x^n}$ comme la somme d'une série entière.

Q9. Dans cette question, pour $n \geqslant 1, a_n = \varphi(n)$ où $\varphi(n)$ est le nombre d'entiers naturels premiers avec n et inférieurs à n.

Justifier que la série entière $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} a_n x^n$ est de rayon 1

On admet que pour $n \geqslant 1, n = \displaystyle\sum_{d|n} \varphi(d)$. Vérifier ce résultat pour $n = 12$.

Pour $x \in]-1,1[$, exprimer $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \varphi(n) \frac{x^n}{1-x^n}$ sous la forme d'un quotient de deux polynômes.

Q10. En utilisant le théorème de la double limite, établir à l'aide du développement en série entière de la fonction $x \mapsto \ln(1+x)$ sur l'intervalle $]-1,1[$ la valeur de la somme $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n}$

Q11. Dans cette question et la suivante, pour $n \geqslant 1$, $a_n = (-1)^n$ et pour tout $x \in]-1,1[, f(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} a_n \frac{x^n}{1-x^n}$.

En utilisant le théorème de la double limite, calculer $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{x}$ et donner un équivalent de $f(x)$ au voisinage de 0. Retrouver le dernier résultat de la question **Q.6**

Q12. Démontrer qu'au voisinage de 1, $f(x) \sim \dfrac{-\ln 2}{1-x}$.

On pourra remarquer que pour $x \in]0,1[, \dfrac{1-x}{1-x^n} = \dfrac{1}{1+x+x^2+\ldots+x^{n-1}}$

INP-M1-2019

EXERCICE I

On admet que $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2}=\frac{\pi^2}{6}$ et on pose, pour $t\in]0,+\infty[$, $f(t)=\frac{te^{-t}}{1-e^{-t}}$

Q1. L'application $t\longmapsto\frac{te^{-t}}{1-e^{-t}}$ est continue sur $]0,+\infty[$

— En 0^+: $f(t)=\frac{t+o(t)}{t+o(t)}=1+o(1)$, donc elle est prolongeable par continuité en 0^+, donc elle est intégrable en 0

— En $+\infty$: $f(t)\sim te^{-t}=o\left(\frac{1}{t^2}\right)$, donc elle est intégrable par la règle de Riemann

Donc f est intégrable sur $]0,+\infty[$.

Pour tout $t>0$, on a $\forall x\in]-1,1[$: $\frac{x}{1-x}=\sum_{n=1}^{+\infty}x^n$. Comme $e^{-t}\in]0,1[$, alors

$$\frac{te^{-t}}{1-e^{-t}}=\sum_{n=1}^{+\infty}te^{-nt}$$

Les fonctions $f_n: t\in]0,+\infty[\longmapsto te^{-nt}$ sont continues par morceaux sur $]0,+\infty[$ et, en vertu de l'étude qui précède, la série $\sum_{n\geqslant 1}f_n$ converge simplement et sa somme f est continue sur $]0,+\infty[$

Les fonctions f_n sont intégrables sur $]0,+\infty[$ et par une intégration par parties

$$\int_0^{+\infty}|f_n(t)|\mathrm{d}t=\int_0^{+\infty}te^{-nt}\mathrm{d}t=\frac{1}{n^2}$$

Avec $\sum_{n\geqslant 1}\frac{1}{n^2}$ converge, on en déduit, par le théorème d'intégration terme à terme, que

$$\int_0^{+\infty}\frac{t}{e^t-1}\,\mathrm{d}t=\int_0^{+\infty}f(t)\mathrm{d}t=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2}=\frac{\pi}{n^2}$$

EXERCICE II

Si X est une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$ de loi de probabilité donnée par : $\forall n\in\mathbb{N}$, $p_n=P(X=n)$, la fonction génératrice de X est

$$G_X(t)=E\left(t^X\right)=\sum_{n=0}^{+\infty}p_nt^n$$

Q2. — La série entière $\sum_{n\geqslant 0}P(X=n)t^n$ converge pour $t=1$, donc, d'après le lemme d'Abel, elle est de rayon de convergence $R_X\geqslant 1$, ceci démontre que que l'intervalle $]-1,1[$ est inclus dans l'ensemble de définition de la fonction G_X.

— **Utilisation du produit de Cauchy:**
Les deux séries entières $\sum_{n\geqslant 0}P(X_1=n)t^n$ et $\sum_{n\geqslant 0}P(X_2=n)t^n$ ont des rayons de convergence supérieurs ou égaux à 1, alors elles sont absolument convergentes sur $]-1,1[$. En conséquence la série entière, leur produit de Cauchy, $\sum_{n\geqslant 0}\sum_{k=0}^{n}P(X_1=k)P(X_2=n-k)t^n$ converge absolument convergente sur $]-1,1[$ et est de somme

$$\sum_{n=0}^{+\infty}\sum_{k=0}^{n}P(X_1=k)P(X_2=n-k)t^n=\left(\sum_{n=0}^{+\infty}P(X_1=n)t^n\right)\left(\sum_{n=0}^{+\infty}P(X_2=n)t^n\right)=G_{X_1}(t)G_{X_2}(t)$$

Or, par indépendance et positivité de X_2, on a:

INP-M1-2019

$$\sum_{k=0}^{n} P(X_1=k)P(X_2=n-k)=\sum_{k=0}^{n} P(X_1=k,X_2=n-k)=P(S=n)$$

On obtient

$$\sum_{n=0}^{+\infty}\sum_{k=0}^{n} P(X_1=k)P(X_2=n-k)t^n=\sum_{n=0}^{+\infty} P(S=n)t^n=G_S(t)$$

— **Utilisation de l'espérance:**
Comme X_1 et X_2 sont indépendantes, alors pour tout $t\in\,]-1,1[$, les deux variables t^{X_1} et t^{X_2} sont indépendantes par le lemme des coalitions

$$G_S(t)=E\left(t^{X_1+X_2}\right)=E\left(t^{X_1}t^{X_2}\right)=E\left(t^{X_1}\right)E\left(t^{X_2}\right)=G_{X_1}(t)\times G_{X_2}(t)$$

— **Généralisation:**
Soit $X_1,\cdots,X_n$, n variables aléatoires mutuellement indépendantes à valeurs dans $\mathbb{N}$. On note $S_n=\sum_{k=1}^{n}X_k$, alors

$$\forall t\in\,]-1,1[,\quad G_{S_n}(t)=\prod_{k=1}^{n}G_{X_i}(t)$$

Q3. Pour $k\in[\![1,n]\!]$, on pose X_k la variable aléatoire qui vaut le numéro de la boule tirée au k-ième tirage. Une telle variable est de loi: $X_k(\Omega)=\{0,1,2\}$, $P(X_k=0)=P(X_k=2)=\dfrac{1}{4}$ et $P(X_k=1)=\dfrac{1}{2}$. Les variables $X_1,\cdots,X_n$ sont indépendantes, de même loi et $S_n=\sum_{k=1}^{n}X_k$. D'après la généralisation précédente

$$\forall t\in\,]-1,1[,\quad G_{S_n}(t)=\prod_{k=1}^{n}G_{X_i}(t)=G_{X_1}(t)^n$$

Avec $G_{X_1}(t)^n=\dfrac{1}{4}+\dfrac{1}{2}t+\dfrac{1}{4}t^2=\left(\dfrac{1}{2}t+\dfrac{1}{2}\right)^2$, soit

$$\forall t\in\,]-1,1[,\quad G_{S_n}(t)=\left(\frac{1}{2}t+\frac{1}{2}\right)^{2n}$$

Donc S_n suit la loi binomiale de paramètre $\left(2n,\dfrac{1}{2}\right)$

PROBLÈME

Partie I: Propriétés

Q4. — Si $x\in]-1,1[$, on a $1-x^n\underset{n\to+\infty}{\sim}1$

— Soit $x\in]-1,1[$, on a $\left|a_n\dfrac{x^n}{1-x^n}\right|\underset{n\to+\infty}{\sim}|a_nx^n|$ et la série $\sum_{n\geqslant1}a_nx^n$ converge absolument car elle est de rayon 1. Donc, par la critère de comparaison des séries à termes positifs, $\sum_{n\geqslant1}a_n\dfrac{x^n}{1-x^n}$ converge absolument.

— On définit la suite (a_n) par

$$\begin{cases}a_{2n}=0\\ a_{2n+1}=\dfrac{1}{(2n+1)^2}\end{cases}$$

La série lacunaire $\sum_{n\geqslant1}a_nx^n=\sum_{n\geqslant0}\dfrac{1}{(2n+1)^2}x^{2n+1}$ est de rayon de convergence 1 et la série $\sum_{n\geqslant1}a_n\dfrac{x^n}{1-x^n}$ converge pour $x_0=-1$ car $\sum_{n\geqslant0}\dfrac{-1}{2(2n+1)^2}$ converge

INP-M1-2019

Q5. Soit $b \in [0,1[$ et $x \in [-b,b]$, on a: $\left|a_n \dfrac{x^n}{1-x^n}\right| \leqslant |a_n| \dfrac{b^n}{1-b^n}$. D'autre part $|a_n| \dfrac{b^n}{1-b^n} \underset{n\to+\infty}{\sim} |a_n| b^n$ et la série $\sum\limits_{n\geqslant 1} a_n b^n$ converge absolument car elle est de rayon 1. Donc la série de fonctions $\sum\limits_{n\geqslant 1} a_n \dfrac{x^n}{1-x^n}$ converge normalement, puis uniformément, sur le segment $[-b,b]$

Q6. On pose, pour tout $x \in]-1,1[$, $f(x) = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n \dfrac{x^n}{1-x^n}$

<u>**Continuité:**</u> Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $f_n : x \in]-1,1[\longmapsto a_n \dfrac{x^n}{1-x^n}$

- Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, l'application f_n est continue sur $]-1,1[$
- Soit $[-b,b] \subset]-1,1[$. D'après la question **Q5**, la série $\sum\limits_{n\geqslant 1} f_n$ converge uniformément sur $[-b,b]$

Par le théorème de la contuinuité de la fonction somme f est continue sur $]-1,1[$

<u>**Régularité de $\mathcal{C}^1$:**</u>

- Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, l'application f_n est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]-1,1[$ et

$$\forall x \in]-1,1[, \quad f_n'(x) = a_n \frac{nx^{n-1}}{(1-x^n)^2}$$

- Soit $[-b,b] \subset]-1,1[$
  Pour $x \in [-b,b]$ et $n \in \mathbb{N}^*$, on a:

$$|f_n'(x)| \leqslant |a_n| \frac{n|x|^{n-1}}{(1-x^n)^2} \leqslant |a_n| \frac{nb^{n-1}}{(1-b^n)^2}$$

  D'autre part $|a_n| \dfrac{nb^{n-1}}{(1-b^n)^2} \underset{n\to+\infty}{\sim} n|a_n| b^n$ et la série dérivée $\sum\limits_{n\geqslant 1} na_n b^n$ converge absolument car elle est de même rayon que $\sum\limits_{n\geqslant 1} a_n b^n$. Donc la série de fonctions $\sum\limits_{n\geqslant 1} a_n \dfrac{nx^{n-1}}{(1-x^n)^2}$ converge normalement, puis uniformément, sur le segment $[-b,b]$.

Par le théorème de dérivation terme à terme la fonction f est de classe C^1 sur l'intervalle $]-1,1[$.

$$\forall x \in]-1,1[, \quad f'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \frac{nx^{n-1}}{(1-x^n)^2}$$

En particulier $f'(0) = a_1$

Q7. **Expression sous forme de série entière**

On note $A = N^* \times \mathbb{N}^*$.

- Soit $n \in \mathbb{N}^*$ l'élément $(1,n) \in I_n$, donc $I_n \neq \emptyset$
- Soit $m,n \in \mathbb{N}^*$ tels que $m \neq n$. Si $(p,q) \in I_n \cap I_m$, alors $n = pq = m$, donc $m = n$. Absurde
- Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a $I_n \subset A$, donc $\bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}^*} I_n \subset A$. Inversement si $(p,q) \in A$, on pose $n = pq$, donc il existe $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $(p,q) \in I_n$, ainsi $A \subset \bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}^*} I_n$. D'où $\bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}^*} I_n = A$

On conclut que $(I_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est une partition de A. Alors par le théorème de sommation par paquets

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\sum_{p=1}^{+\infty} u_{n,p}\right) = \sum_{(n,p)\in A} u_{n,p} = \sum_{n=1}^{+\infty}\left(\sum_{(k,p)\in I_n} u_{k,p}\right)$$

On montre que pour tout $x \in]-1,1[$, la famille $(a_n x^{np})_{(n,p)\in A}$ est sommable.

INP-M1-2019

— Soit $n \in \mathbb{N}^*$, la série géométrique $\sum_{p\geqslant 1} |a_n|\,|x^{np}|$ de raison $|x^n| \in [0,1[$ est convergente de somme $\sum_{p=1}^{+\infty} |a_n|\,|x^{np}| = |a_n| \dfrac{|x|^n}{1-|x|^n}$

— On a $|a_n| \dfrac{|x|^n}{1-|x|^n} \underset{n\to+\infty}{\sim} |a_n|\,|x|^n$ et la série $\sum_{n\geqslant 1} a_n x^n$ converge absolument car elle est de rayon 1. Donc $\sum_{n\geqslant 1} |a_n| \dfrac{|x|^n}{1-|x|^n}$ converge.
Donc par le théorème de Fubini, la famille la famille $(a_n x^{np})_{(n,p)\in A}$ est sommable

— Déduction:

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{+\infty} a_n \frac{x^n}{1-x^n} &= \sum_{n=1}^{+\infty}\sum_{p=1}^{+\infty} a_n x^{np} = \sum_{(n,p)\in A} a_n x^{np} \\ &= \sum_{n=1}^{+\infty}\left(\sum_{(k,p)\in I_n} a_k x^{kp}\right) \\ &= \sum_{n=1}^{+\infty}\left(\sum_{(k,p)\in I_n} a_k\right) x^n\end{aligned}$$

Mais $\sum_{(k,p)\in I_n} a_k = \sum_{k|n} a_k$, donc $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n \dfrac{x^n}{1-x^n} = \sum_{n=1}^{+\infty} b_n x^n$ où $b_n = \sum_{k|n} a_k$

Partie II: Exemple

Q8. D'après la question **Q7**, pour tout $x \in]-1,1[$,

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{1-x^n} = \sum_{n=1}^{+\infty} b_n x^n$$

Où $b_n = \sum_{k|n} 1 = d_n$. Ainsi $f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} d_n x^n$

Q9. Dans cette question, pour $n \geqslant 1, a_n = \varphi(n)$ où $\varphi(n)$ est le nombre d'entiers naturels premiers avec n et inférieurs à n.

— Soit $n \in \mathbb{N}^*$, on a $1 \leqslant \varphi(n) \leqslant n$, donc $\mathcal{R}_c\left(\sum_{n\geqslant 1} nx^n\right) \leqslant \mathcal{R}_c\left(\sum_{n\geqslant 1} a_n x^n\right) \leqslant \mathcal{R}_c\left(\sum_{n\geqslant 1} x^n\right)$.
Or $\mathcal{R}_c\left(\sum_{n\geqslant 1} nx^n\right) = \mathcal{R}_c\left(\sum_{n\geqslant 1} nx^n\right) = 1$, donc $\mathcal{R}_c\left(\sum_{n\geqslant 1} a_n x^n\right) = 1$

— L'ensemble des diviseurs entiers de 12 est $D_{12} = \{1,2,3,4,6,12\}$ et par définition

$$\begin{cases}\varphi(1) = \varphi(2) = 1 \\ \varphi(3) = \varphi(4) = \varphi(6) = 2 \\ \varphi(12) = 4\end{cases}$$

On a bien $\sum_{d|12} \varphi(d) = 12$

— Soit $x \in]-1,1[$, d'après la question **Q7**, on a

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \varphi(n) \frac{x^n}{1-x^n} = \sum_{n=1}^{+\infty}\sum_{d|n} \varphi(d) x^n = \sum_{n=1}^{+\infty} nx^n$$

INP-M1-2019

Or $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} nx^n = x\sum_{n=1}^{+\infty} nx^{n-1} = \frac{x}{(1-x)^2}$, alors $f(x) = \dfrac{x}{(1-x)^2}$

Q10. La fonction $\ln(1+x)$ est développable en série entière sur $]-1,1[$ et on a :

$$\forall x \in]-1,1[, \ln(1+x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} x^n$$

— La série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{(-1)^{n-1}}{n} x^n$ converge simplement sur $[0,1[$

— Pour tout $x \in [0,1[$ et $n \in \mathbb{N}^*$, on a

$$\left| \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k} x^k \right| \leqslant \frac{x^{n+1}}{n+1} \leqslant \frac{1}{n+1} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$$

La suite $\left(\dfrac{1}{n+1}\right)_{n\geqslant 1}$ est de réels positifs, indépendante de x, et de limite nulle, donc la suite de fonctions des restes de la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{(-1)^{n-1}}{n} x^n$ converge uniformément vers $\tilde{0}$

— Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a $\dfrac{(-1)^{n-1}}{n} x^n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \dfrac{(-1)^{n-1}}{n} \in \mathbb{R}$

Par le théorème de la double limite

$$\ln(2) = \lim_{x\to 1^-} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} x^n = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n}$$

Soit $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n} = -\ln(2)$

Q11. Soit $b \in [0,1[$ et $x \in [-b,b] \setminus \{0\}$.

— On a: $\left| a_n \dfrac{x^{n-1}}{1-x^n} \right| \leqslant |a_n| \dfrac{b^{n-1}}{1-b^n}$. D'autre part $|a_n| \dfrac{b^{n-1}}{1-b^n} \underset{n\to+\infty}{\sim} |a_n| b^{n-1}$ et la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} a_n b^{n-1}$ converge absolument car elle est de rayon 1. Donc la série de fonctions $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} a_n \frac{x^{n-1}}{1-x^n}$ converge normalement, puis uniformément, sur $[-b,b] \setminus \{0\}$

— Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a $a_n \dfrac{x^{n-1}}{1-x^n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \begin{cases} a_1 & \text{si } n=1 \\ 0 & \text{si } n \geqslant 1 \end{cases}$. Par le théorème de la double limite

$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to 0} \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \frac{x^{n-1}}{1-x^n} = a_1 = -1$$

Donc $f(x) \underset{x\to 0}{\sim} -x$

— On conclut que f est dérivable en 0 et $f'(0) = -1$

Q12. Pour tout $x \in [0,1[$, on a $(1-x) f(x) = (1-x) \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^n}{1-x^n}$.

— Soit $n \geqslant 1$ et $x \in [0,1[$, on a

$$\frac{x^{n+1}}{1-x^{n+1}} - \frac{x^n}{1-x^n} = \frac{x^n(x-1)}{(1-x^{n+1})(1-x^n)} \leqslant 0$$

et $\dfrac{x^n}{1-x^n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$. Donc la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} (-1)^n (1-x) \frac{x^n}{1-x^n}$ est alternée vérifiant le critère spécial des séries alternées, alors elle converge

— Pour tout $x \in [0,1[$ et $n \in \mathbb{N}^*$, on a

$$\left| \sum_{k=n+1}^{+\infty} (-1)^n (1-x) \frac{x^n}{1-x^n} \right| \leqslant (1-x)\frac{x^{n+1}}{1-x^{n+1}} = \frac{x^{n+1}}{\sum_{k=0}^{n} x^k}$$

En introduisant l'application ψ_n définie sur $[0,1[$, par $\psi_n(x) = \dfrac{x^{n+1}}{\sum_{k=0}^{n} x^k}$. Une telle fonction est de classe $\mathcal{C}^1$, par les théorèmes généraux, et $\forall x \in [0,1[$:

$$\begin{aligned} \psi_n'(x) &= \frac{(n+1)x^n \sum_{k=0}^{n} x^k - x^{n+1} \sum_{k=1}^{n} k x^{k-1}}{\left(\sum_{k=0}^{n} x^k\right)^2} \\ &= \frac{(n+1)x^n + \sum_{k=1}^{n} (n+1-k) x^{n+k}}{\left(\sum_{k=0}^{n} x^k\right)^2} \geqslant 0 \end{aligned}$$

Donc ψ_n est croissante sur $[0,1[$, avec $\psi_n(0) = 0$ et $\lim\limits_{x \to 1^-} \psi_n(x) = \dfrac{1}{n+1}$, on gagne

$$\left| \sum_{k=n+1}^{+\infty} (-1)^n (1-x) \frac{x^n}{1-x^n} \right| \leqslant \frac{1}{n+1}$$

La suite $\left(\dfrac{1}{n+1}\right)_{n \geqslant 1}$ est de réels positifs, indépendante de x, et de limite nulle, donc la suite de fonctions des restes de la série $\sum\limits_{n \geqslant 1} (-1)^n (1-x) \dfrac{x^n}{1-x^n}$ converge uniformément vers $\tilde{0}$

— Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a $(-1)^n (1-x) \dfrac{x^n}{1-x^n} = (-1)^n \dfrac{x^n}{\sum_{k=0}^{n-1} x^k} \xrightarrow[n \to +\infty]{} \dfrac{(-1)^n}{n} \in \mathbb{R}$.

Par le théorème de la double limite

$$\lim_{x \to 1^-} (1-x) f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n} = -\ln(2)$$

Ainsi au voisinage de 1, $f(x) \sim \dfrac{-\ln 2}{1-x}$.