CHAPITRE 6

ESPACES VECTORIELS NORMÉS ET TOPOLOGIE

Dans tout le chapitre, tous les espaces vectoriels sont réels ou complexes. Soient E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels, $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. On utilisera fréquemment :

Théorème (Bolzano-Weierstrass) *Soit $(u(k))_{k\in\mathbb{N}}$ une suite dans $\mathbb{K}^n$ donc toutes les coordonnées sont bornées. On écrit $u(k) = \big(u_1(k), \ldots, u_n(k)\big)$. Alors il existe une extractrice $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ telle que $(u_j(\varphi(k)))_k$ converge pour tout $j \in [\![1, n]\!]$.*

I Espaces vectoriels normés

1 Normes

Définition *Une norme sur E est une application $N : E \to \mathbb{R}^+$ vérifiant*

(séparation) $N(x) = 0$ *si et seulement si* $x = 0$ *;*

(homogénéité) *pour tous $\lambda \in \mathbb{K}$, $x \in E$, $N(\lambda x) = |\lambda| N(x)$;*

(inégalité triangulaire) *pour tous $x, y \in E$, $N(x + y) \leqslant N(x) + N(y)$.*

Un espace vectoriel muni d'une norme s'appelle un espace vectoriel normé. Un vecteur de norme 1 s'appelle un vecteur unitaire (ou normé).

Attention à la terminologie : dans $\mathbb{C}[X]$ muni d'une norme, l'adjectif "unitaire" a deux sens.

Proposition *(Inégalité triangulaire inversée) Soit (E, N) un espace vectoriel normé. Pour tous $x, y \in E$, $|N(x) - N(y)| \leqslant N(x - y)$.*

Exemples

1. Si E est muni d'un produit scalaire $\langle | \rangle$, alors $x \mapsto \sqrt{\langle x|x\rangle}$ est une norme appelée norme euclidienne.
2. La fonction $\alpha|\cdot|$ (où $\alpha > 0$) sur le $\mathbb{K}$-espace vectoriel $\mathbb{K}$ est une norme (même euclidienne). Ce sont les seules. Mais le $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathbb{C}$ admet plein d'autres normes que les $z \mapsto \alpha|z|$.
3. Si $x \in E$ est non-nul, $x/N(x)$ est unitaire.
4. On définit sur $\mathbb{K}^n$: $\|x\|_1 = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} |x_k|$, $\|x\|_2 = \sqrt{\displaystyle\sum_{k=1}^{n} |x_k|^2}$ et $\|x\|_\infty = \displaystyle\max_{1\leqslant k\leqslant n} |x_k|$.

   Ce sont des normes. (Remarque : ceci s'applique aussi à tout espace vectoriel de dimension finie munie d'une base, donc aux matrices.) Pour la norme $\|\cdot\|_2$, on distingue $\mathbb{R}$ et $\mathbb{C}$. Sur $\mathbb{R}$, c'est une conséquence de Cauchy-Schwarz. Sur $\mathbb{C}$, on a un analogue complexe de Cauchy-Schwarz en posant $\langle x|y\rangle = \sum_{k=1}^{n} x_i\overline{y_i}$ et en évaluant $\|x-ty\|$ en $t = \langle x|y\rangle/\|y\|^2$.

5. Soit I une partie quelconque non vide de $\mathbb{R}$ et $\mathcal{B}(I,\mathbb{K})$ l'espace des fonctions bornées définies sur I. Alors $f \mapsto \|f\|_\infty = \max_{t\in I} |f(t)|$ est une norme sur $\mathcal{B}(I,\mathbb{K})$
6. Soit $I = [a,b]$ un segment de $\mathbb{R}$ ($a < b$) et $E = \mathcal{C}(I,\mathbb{K})$. On définit pour tout $f \in E$ $\|f\|_1 = \int_a^b |f(t)|\mathrm{d}t$ et $\|f\|_2 = \sqrt{\int_a^b |f(t)|^2\mathrm{d}t}$. Ce sont des normes. Mais on ne peut pas remplacer E par $\mathcal{CM}(I,\mathbb{K})$.
7. Soit $E = \mathbb{C}[X]$. Alors $N_1(P) = \sup_{t\in[0,1]} |P(t)|$, $N_2(P) = \sum_k |a_k|$ et $N_3(P) = \max_k |a_k|$ (où $P = \sum_k a_kX^k$) sont des normes.
8. Soit $E = C^1(I,\mathbb{K})$ où I est un segment et $x_0 \in I$. Alors les applications $f \mapsto \|f\|_\infty + \|f'\|_\infty$ et $f \mapsto |f(x_0)| + \|f'\|_\infty$ sont des normes.
9. Un sous-espace vectoriel d'un *evn* est naturellement un *evn* par restriction de la norme.
10. Soit (E,N) un espace vectoriel normé. Si F est un autre $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $f : E \to F$ un isomorphisme, alors $N_f : F \to \mathbb{R}^+$ définie par $N_f(y) = N(f^{-1}(y))$ est une norme. Pour cette norme, f est une isométrie $\big($*i.e.* pour tout $x \in E$, $N_f(f(x)) = N(x)\big)$.

    En particulier, si $A \in GL_n(\mathbb{K})$ et $\|\cdot\|$ est une norme sur $\mathbb{K}^n$, alors $X \mapsto \|AX\|$ est une norme sur $\mathbb{K}^n$. De même, si $\|\cdot\|$ est une norme sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et que $P \in GL_n(\mathbb{K})$, alors $M \mapsto \|P^{-1}MP\|$ est une norme.
11. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $((E,N_i))_{1\leqslant i\leqslant n}$ une famille de n espaces vectoriels normés sur $\mathbb{K}$. On appelle espace vectoriel normé produit $E_1 \times E_2 \times \cdots \times E_n$ produit muni de la norme (dite norme produit) $(x_1,\cdots,x_n) \mapsto \max_{1\leqslant i\leqslant n} N_i(x_i)$. C'est bien une norme.
12. (À retenir) On munit $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ ($n \geqslant 2$) de son produit scalaire canonique (*i.e.* celui qui rend la base canonique orthonormée). Par le théorème de Pythagore, $\|(a_{i,j})\|^2 = \sum_{i,j} a_{i,j}^2$. Soit $(a_{i,j}),(b_{i,j}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Alors

    $$\|AB\|^2 = \sum_{i,j=1}^{n}\left(\sum_{k=1}^{n} a_{i,k}b_{k,j}\right)^2 \leqslant \sum_{i,j=1}^{n}\left(\big(\sum_{k=1}^{n} a_{i,k}^2\big)\big(\sum_{k=1}^{n} b_{k,j}^2\big)\right) = \|A\|^2\|B\|^2$$

    d'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz dans $\mathbb{R}^n$.

    Les normes sur une $\mathbb{K}$-algèbre qui vérifient $\|ab\| \leqslant \|a\|\|b\|$ sont appelées *normes sous-multiplicatives*. Il n'existe pas de normes sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telle que $\|AB\| = \|A\|\|B\|$ pour tous A,B si $n \geqslant 2$.

Définition *Soit (E,N) un espace vectoriel normé. On appelle distance associée à la norme N la fonction* $\mathrm{d} : E \times E \to \mathbb{R}^+$ *définie par* $\mathrm{d}(x,y) = N(x-y)$. *La fonction* d *vérifie les axiomes des distances :*

(séparation) $\mathrm{d}(x,y) = 0$ *si et seulement si* $x = y$ *;*

(symétrie) *pour tous* $x, y \in E$, $\mathrm{d}(x,y) = \mathrm{d}(y,x)$;

(inégalité triangulaire) *pour tous* $x, y, z \in E$, $\mathrm{d}(x,z) \leqslant \mathrm{d}(x,y) + \mathrm{d}(y,z)$.

Définition *Soit* (E, N) *un espace vectoriel normé. On appelle boule ouverte (resp. fermée) de centre* $x \in E$ *et rayon* $r > 0$ *l'ensemble* $B(x,r) = \{y \in E | \mathrm{d}(x,y) < r\}$ *(resp.* $B_f(x,r) = \{y \in E | \mathrm{d}(x,y) \leqslant r\}$*). On appelle sphère centrée en* x *de rayon* r *l'ensemble* $\{y \in E | \mathrm{d}(x,y) = r\}$.

Remarque Le centre et le rayon d'une boule ouverte ou fermée sont uniques.

Proposition *Une boule, fermée ou ouverte, est convexe.*

Définition *Soit* A *une partie non vide d'une espace vectoriel normé* E. *On définit la distance de* $x \in E$ *à* A *par* $\mathrm{d}(x, A) = \inf_{y \in A} \mathrm{d}(x,y)$.

2 Équivalence des normes

Définition *Deux normes* N_1 *et* N_2 *sur* E *sont dites équivalentes s'il existe* $C_1, C_2 > 0$ *tels que pour tout* $x \in E$, *on ait* $N_1(x) \leqslant C_1 N_2(x)$ *et* $N_2(x) \leqslant C_2 N_1(x)$.

Remarque Ceci équivaut à l'existence de $C > 1$ telle que $\frac{1}{C} N_1 \leqslant N_2 \leqslant C N_1$. Cette relation est une relation d'équivalence sur l'ensemble des normes sur E.

La proposition suivante ne prendra de sens qu'*a posteriori* :

Proposition *Si* N_1 *et* N_2 *sont deux normes équivalentes sur* E, *alors ces deux normes définissent les mêmes suites convergentes, les mêmes fonctions continues, les mêmes limites, etc.*

Remarque Pour montrer que deux normes ne sont pas équivalentes, on exhibe en général une suite qui tend vers 0 pour l'une mais pas pour l'autre.

Exemples

1. Soit $E = \mathbb{R}^n$. Alors $\|.\|_\infty$, $\|.\|_2$ et $\|.\|_1$ sont équivalentes. En effet $\sum_{i=1}^n |x_i| \leqslant \sqrt{n} \sqrt{\sum_{i=1}^n |x_i|^2}$ par l'inégalité de Cauchy-Schwarz. De plus $\sqrt{\sum_{i=1}^n |x_i|^2} \leqslant \sum_{i=1}^n |x_i|$ (élever au carré).
   D'autre part, $\max_i |x_i| \leqslant \sqrt{\sum_{i=1}^n |x_i|^2}$ et $\sqrt{\sum_{i=1}^n |x_i|^2} \leqslant \sqrt{n} \max_i |x_i|$ (majorer par le plus grand).
2. Les normes $\|.\|_\infty$, $\|.\|_2$ et $\|.\|_1$ ne sont pas équivalentes sur $E = \mathcal{C}([a,b], \mathbb{R})$. On a bien $\|f\|_1 \leqslant (b-a)\|f\|_\infty$ et $\|f\|_2 \leqslant \sqrt{b-a}\|f\|_\infty$ par l'inégalité de la moyenne et $\|f\|_1 \leqslant \sqrt{b-a}\|f\|_2$ par l'inégalité de Cauchy-Schwarz.
   Pour tout $n \geqslant 1$, on définit la fonction f_n affine par morceaux sur $[a,b]$ par : f_n vaut constamment $\sqrt{n}$ sur $[a+(b-a)/2(n+1), b]$, f_n est nulle sur $[a+(b-a)/(n+1), b]$, et f_n est affine sur $[(b-a)/2(n+1), (b-a)/(n+1)]$. On a alors d'une part $\|f_n\|_\infty \to +\infty$.
   D'autre part, $\|f_n\|_1 \leqslant \int_a^{\frac{b-a}{n+1}} \sqrt{n} \mathrm{d}t \longrightarrow 0$. Enfin
   $$\frac{b-a}{2n+2} n \leqslant \|f_n\|_2^2 \leqslant \frac{b-a}{n+1} n$$
   donc ne tend ni vers 0, ni vers $+\infty$.

3. Les matrices $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 0 & \lambda \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ étant semblables pour $\lambda \neq 0$, il n'existe pas de norme N sur $\mathcal{M}_2(\mathbb{K})$ telle que deux matrices semblables aient toujours même norme.

Théorème *Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie. Alors toutes les normes sur E sont équivalentes.*

Démonstration ◀ (Nécessite BW dans $\mathbb{K}^n$ pour $\|\cdot\|_\infty$.) Soit (e_j) base de E, et $\|u\|_\infty = \max_j |u_j|$. Soit N une norme sur E. Déjà $N \leqslant C\|\|_\infty$. Réciproquement, par l'absurde : il existe une suite $(v(n))_n$ telle que $\|v(n)\|_\infty = 1$ et $N(v(n)) \leqslant \frac{1}{n}$. Par BW, quitte à extraire une sous-suite, $v(n) \to w$. Par l'inégalité triangulaire inversée, $\|w\|_\infty = 1$. Mais $N(w) \leqslant N(v(n)) + N(w - v(n)) \leqslant \frac{1}{n} + C\|w - v(n)\|_\infty \to 0$. Absurde.
▶

3 Parties bornées, applications bornées

Désormais $(E, \|.\|)$ est un espace vectoriel normé.

Définition *Une partie A de E est dite bornée s'il existe $r \geqslant 0$ telle que $A \subset B_f(0, r)$.*

Définition *Soit X un ensemble et $f : X \to E$ une fonction. On dit que f est bornée si $f(X)$ est bornée dans E. On note $\mathcal{B}(X, E)$ l'ensemble des applications bornées de X dans E.*

Remarques

1. Une suite (u_n) à valeurs dans E *evn* est bornée s'il existe $M \geqslant 0$ tel que pour tout n, $\|u_n\| \leqslant M$.
2. Deux normes équivalentes définissent les mêmes ensembles, suites, fonctions bornées.

Proposition *L'application $\mathcal{B}(X, E) \to \mathbb{R}^+$ définie par $f \mapsto \|f\|_\infty = \sup_{x \in X} \|f(x)\|$ est une norme sur $\mathcal{B}(X, E)$.*

II Limites et continuité des fonctions de variable vectorielle

Dans cette partie, $(E, \|.\|_E)$ et $(F, \|.\|_F)$ sont deux espaces vectoriels normés, A une partie non vide E.

1 Limites

Définition *Un élément $a \in E$ est adhérent à A si pour tout $\varepsilon > 0$, $B(a, \varepsilon) \cap A \neq \emptyset$.*

Définition *(limite d'une fonction) Soit $f : A \to F$ et a adhérent à A. On dit que f converge en a vers $l \in F$ si*

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0, (x \in A \text{ et } \|x - a\|_E \leqslant \eta) \Longrightarrow \|f(x) - l\|_F \leqslant \varepsilon.$$

On note $l = \lim_a f = \lim_{x \to a} f(x)$.

Remarques

1. La limite si elle existe est unique.

2. Si f converge en a, il existe une boule centrée en a sur laquelle f est bornée ; on dit que f est localement bornée en a.
3. Si $a \in A$ et que f converge en a, alors $l = f(a)$.
4. On peut remplacer dans la définition $\|x - a\|_E \leqslant \eta$ par $\|x - a\|_E < \eta$ et/ou $\|f(x) - l\|_F \leqslant \varepsilon$ par $\|f(x) - l\|_F < \varepsilon$.
5. On peut formuler la convergence uniquement en terme de boules : pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\eta > 0$ tel que $f(A \cap B_f(a, \eta)) \subset B_f(l, \varepsilon)$, ou même $f(B_f(a, \eta)) \subset B_f(l, \varepsilon)$ si l'on convient que $f(X) = f(X \cap A)$ pour une partie X qui n'est pas incluse dans A. Ou encore : pour tout $\varepsilon > 0$, $f^{-1}\big(B_f(l, \varepsilon)\big)$ contient une boule centrée en a de rayon > 0.
6. Si on remplace $\|.\|_E$ (ou $\|.\|_F$) par une norme équivalente, on ne change pas la convergence ni la limite.

Proposition *(propriétés opératoires des limites) Soient $f, g : A \to F$, $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$ et a adhérent à A. On suppose que f et g convergent en a vers l et l' respectivement. Alors $\lambda f + \mu g$ converge en a vers $\lambda l + \mu l'$.*

Proposition *(composition des limites) Soit $(G, \|.\|_G)$ un espace vectoriel normé, B une partie de F, $f : A \to B$, $g : B \to G$. On suppose que f converge vers b en a adhérent à A. Alors b est adhérent à B. Si de plus g converge en b vers c, alors $g \circ f$ converge en a vers c. Autrement dit, $\lim\limits_a g \circ f = \lim_{\lim_a f} g$.*

Définition *(extension des définitions aux limites en $\pm\infty$ ou valant $\pm\infty$) Ici $\mathbb{K} = \mathbb{R}$.*

1. *On suppose $E = \mathbb{R}$ et A non majorée (i.e. $+\infty$ est adhérent à A). La fonction $f : A \to F$ admet pour limite $l \in F$ en $+\infty$ si pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $m \in \mathbb{R}$ tel que $x \geqslant m$ et $x \in A$ implique $\|f(x) - l\| \leqslant \varepsilon$.*
2. *On suppose $F = \mathbb{R}$. Soit a adhérent à A et $f : A \to \mathbb{R}$. On dit que f admet pour limite $+\infty$ en a si pour tout $m \in \mathbb{R}$, il existe $\eta > 0$ tel que $x \in A$ et $\|x - a\|_E \leqslant \eta$ implique $f(x) \geqslant m$.*

Proposition *Soit $f : A \to \mathbb{R}$ convergente en a. Alors*

1. *si $f \geqslant C$ sur un voisinage de a, alors $\lim\limits_a f \geqslant C$;*
2. *si $f \geqslant g$ et que g, définie au voisinage de a, converge en a, alors $\lim\limits_a f \geqslant \lim\limits_a g$;*
3. *si $\lim\limits_a f = l > 0$, il existe une boule ouverte (ou fermée) $B(a, r)$ sur laquelle f est strictement positive (et même minorée par $l/2$).*

2 Continuité

Définition *Soit $f : A \to F$.*

1. *Soit $a \in A$. On dit que f est continue en a si f converge en a vers $f(a)$ i.e.*

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0, x \in A \text{ et } \|x - a\|_E \leqslant \eta \Longrightarrow \|f(x) - f(a)\|_F \leqslant \varepsilon.$$

2. *La fonction f est continue si elle est continue en tout $a \in A$.*
3. *La fonction f est uniformément continue si*

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0, \forall (x, x') \in A \times A, (\|x - x'\|_E \leqslant \eta \Longrightarrow \|f(x) - f(x')\|_F \leqslant \varepsilon).$$

4. *Soit $k \in \mathbb{R}^+$. La fonction f est k-lipschitzienne si pour tous $x, x' \in A$, $\|f(x) - f(x')\|_F \leqslant k\|x - x'\|_E$. Une fonction lipschitzienne est une fonction k-lipschitzienne pour un certain k.*

Remarque f lipschitzienne $\Longrightarrow$ f uniformément continue $\Longrightarrow$ f continue.

Exemples

1. L'application $\|.\|$ est continue car 1-lipschitzienne dans l'*evn* $(E, \|.\|)$.
2. Une application constante est continue car 0-lipschitzienne.

Remarque La continuité est une notion locale : f est continue en x si et seulement s'il existe $\varepsilon > 0$ tel que la restriction de f à $B(x, \varepsilon)$ est continue.

Proposition *Soit (F, N_F) un autre $\mathbb{K}$-espace vectoriel normé, $A \subset E$ et $f : A \to E$.*

1. *Si $a \in A$, $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$ et $f, g : A \to F$ sont continues en a alors $\lambda f + \mu g$ est continue en a.*
2. *Si $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$ et $f, g : A \to F$ sont continues en a alors $\lambda f + \mu g$ est continue.*
3. *Les applications $E \times E \to E$, $(x, y) \mapsto x + y$ et $\mathbb{K} \times E \to E$, $(\lambda, x) \mapsto \lambda x$ sont continues.*

Proposition *Soit B une partie de F, $(G, \|.\|_G)$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel normé et $f : A \to B$, $g : B \to G$ continues. Alors $g \circ f$ est continue.*

Proposition *Soit A une partie non vide de E. Alors la fonction $E \to E$, $x \mapsto \mathrm{d}(x, A)$ est 1-lipschitzienne donc continue.*

Schéma de preuve ◀ Passer au sup sur $z \in A$ dans $d(x, z) \leqslant d(x, y) + d(y, z)$. ▶

Définition *Soit A et B deux parties respectivement de E et F. Une fonction $f : A \to B$ est un homéomorphisme si f est continue, bijective, de réciproque continue.*

Exemple Si $a \in E$, la translation $x \mapsto x + a$ de E dans lui-même est un homéomorphisme.

3 Continuité des applications linéaires

Proposition *Soit E, F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels normés et $f \in \mathcal{L}(E, F)$. On a équivalence entre*

1. *f est continue en 0 ;*
2. *f est continue ;*
3. *f est uniformément continue ;*
4. *f est lipschitzienne ;*
5. *l'ensemble $\{\|f(x)\|/\|x\| \mid x \neq 0\}$ est borné, i.e. il existe $k \geqslant 0$ tel que pour tout $x \in E$, $\|f(x)\| \leqslant k\|x\|$;*
6. *f est bornée sur la sphère unité, i.e. l'ensemble $\{\|f(y)\| \mid \|y\| = 1\}$ est borné.*
7. *l'image par f d'une partie bornée est bornée.*

Schéma de preuve ◀ Tout découle de l'homogénéité et la linéarité. On a facilement que chaque propriété implique la précédente. Pour (1) $\Longrightarrow$ (7), si $\varepsilon > 0$ est fixé et que $f(B(0, 1)) \subset B(0, M)$, alors $f(B(0, \eta)) \subset B(0, \varepsilon)$ où $\eta = M/\varepsilon$. ▶

Exemples

1. (HP, mais à connaitre impérativement) Si $f : E \to F$ est continue, le réel $|||f||| = \sup_{x\neq 0} \frac{\|f(x)\|_F}{\|x\|_E} = \sup_{\|x\|_E=1} \|f(x)\|_F$ s'appelle la norme subordonnée (relativement aux normes sur E et F) ou norme triple de f. L'application $f \mapsto |||f|||$ est une norme. Si de plus $f, g \in \mathcal{L}(E)$ sont continues, $|||f \circ g||| \leqslant |||f||| \cdot |||g|||$.
En particulier, toute $\mathbb{K}$-algèbre $\mathcal{L}(E)$ avec E de dimension finie admet des normes sous-multiplicatives.
2. Soit $E = \mathcal{C}([a, b], \mathbb{K})$ muni de la norme $\|.\|_\infty$. Alors la forme linéaire $\int_a^b : E \to \mathbb{K}$ est continue, car $(b - a)$-lipschitzienne par l'inégalité de la moyenne. De même, l'application $\Phi : E \to E$, $f \mapsto F$ où $F(x) = \int_a^x f(t)dt$ est continue car $(b - a)$-lipschitzienne.
3. On munit $\mathcal{C}([a, b], \mathbb{K})$ et $\mathcal{C}^1([a, b], \mathbb{K})$ de la norme $\|.\|_\infty$. L'application $D : \mathcal{C}^1([a, b], \mathbb{K}) \to \mathcal{C}([a, b], \mathbb{K})$, $f \mapsto f'$ n'est pas continue : l'application $s_\lambda : x \mapsto \sin(\lambda x)$ est de norme 1 (pour $\lambda \neq 0$), mais $\|D(s_\lambda)\|_\infty = \lambda$.
4. La dérivation sur $\mathbb{R}[X]$ ou $\mathbb{C}[X]$ n'est pas continue pour les deux normes $\sum_k a_k X^k \mapsto \max_k |a_k|$ et $\sum_k a_k X^k \mapsto \sum_k |a_k|$ car $\|X^n\| = 1$ et $\|(X^n)'\| = n$.
5. Soit $\mathbb{R}[X]$ muni de la norme euclidienne $\|P\| = \sqrt{\sum_{n=0}^{+\infty} P^{(n)}(0)^2}$, associée au produit scalaire $\langle P|Q\rangle = \sum_{n=0}^{+\infty} P^{(n)}(0)Q^{(n)}(0)$. Pour cette norme, la dérivation est 1-lipschitzienne car $\sum_{n=1}^{+\infty} P^{(n)}(0)^2 \leqslant \sum_{n=0}^{+\infty} P^{(n)}(0)^2$, donc continue. Remarquer que la base $\left(\frac{X^n}{n!}\right)_n$ est orthonormée pour le produit scalaire $\langle|\rangle$.
6. Si $B : E \times F \to G$ est bilinéaire et bornée sur la boule unité de $E \times F$ (pour la norme produit), alors B est continue. (La réciproque est vraie.)

4 Suites convergentes dans un espace vectoriel normé

Définition *Soit $(E, \|.\|)$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel normé. La suite $(u_n)_n$ à valeurs dans E converge vers $l \in E$ si pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que si $n \geqslant N$, alors $\|u_n - l\| \leqslant \varepsilon$.*

Autrement dit, à partir d'un certain rang, u_n appartient à $B(l, \varepsilon)$.

Ou encore : pour tout $\varepsilon > 0$, l'ensemble $\{n \in \mathbb{N} | u_n \notin B(l, \varepsilon)\}$ est fini.

Remarque (Interprétation de la convergence uniforme en terme de norme.) Soit X un ensemble non vide quelconque et $E = \mathcal{B}(X, \mathbb{K})$. La suite de fonctions (f_n) d'éléments de E converge uniformément vers $g \in E$ si et seulement si elle converge vers g pour la norme $\|.\|_\infty$. Autrement dit, $\|f_n - g\|_\infty$ tend vers 0. (Mais la convergence simple n'est pas – en général – une convergence en norme.)

Vocabulaire Soit I un intervalle non vide de $\mathbb{R}$, $E = \mathcal{L}^1(I, \mathbb{K})$ et (f_n) une suite d'éléments de E. On dit que (f_n) converge vers $g \in E$ *en moyenne* si $\int_I |f_n - g|$ converge vers 0, *i.e.* $\|f_n - g\|_1$ tend vers 0. De même, on dit que (f_n) converge vers g *en moyenne quadratique* dans $\mathcal{L}^2(I, \mathbb{K})$ si $\int_I |f_n - g|^2$ converge vers 0, *i.e.* $\|f_n - g\|_2$ tend vers 0.

Comme pour les suites à valeurs dans $\mathbb{K}$:

Proposition *1. Si $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$, $(u_n), (v_n)$ convergentes resp. vers l et l', alors $(\lambda u_n + \mu v_n)$ converge vers $\lambda l + \mu l'$.*

2. L'ensemble des suites convergentes de $E^{\mathbb{N}}$ est un sous-espace vectoriel.

3. Si (u_n) converge vers l, toutes ses sous-suites convergent aussi vers l.

Proposition *(caractérisation séquentielle de la continuité) Soit $A \subset E$, $a \in A$ et $f : A \to F$ où E, F sont deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels normés. Alors f est continue en a si et seulement si pour toute suite $(u_n) \in A^{\mathbb{N}}$ qui converge vers a, on a que $(f(u_n))_n$ converge vers $f(a)$.*

Proposition *Soit N et N' deux normes équivalentes sur E et $(u_n) \in E^{\mathbb{N}}$. Alors (u_n) converge vers $l \in E$ pour la norme N si et seulement si (u_n) converge vers $l \in E$ pour la norme N'.*

Remarque (Intérêt de l'équivalence des normes) Vue la caractérisation séquentielle de la continuité, on ne change pas la continuité d'une application $f : E \to F$ entre deux espaces vectoriels normés en remplaçant les normes sur E et F par des normes équivalentes.

En particulier, sur un K-espace vectoriel normé de dimension finie, on n'a pas besoin de choisir une norme pour parler de convergence de suites, de limites, de continuité...

Définition *Soit E un espace vectoriel normé et $(u_n) \in E^{\mathbb{N}}$. On dit que $x \in E$ est une valeur d'adhérence de (u_n) s'il existe une sous-suite qui converge vers x. On note* Adh (u_n) *l'ensemble des valeurs d'adhérence de (u_n).*

Certaines propriétés des suites réelles et complexes se transposent sans difficulté. Par exemple :

1. Une suite qui possède au moins deux valeurs d'adhérence diverge.
2. Une sous-suite d'une suite convergente converge vers la même limite.
3. Si (u_{2n}) et (u_{2n+1}) convergent vers la même limite l, alors (u_n) converge vers l.

Proposition *Soit E un espace vectoriel normé et $(u_n) \in E^{\mathbb{N}}$. Alors $x \in$ Adh (u_n) si et seulement si*

$$\forall \varepsilon > 0, \forall N \in \mathbb{N}, \exists n \geqslant N \text{ tel que } \|u_n - l\| \leqslant \varepsilon.$$

Exemple L'ensemble des valeurs d'adhérence de $(e^{i\sqrt{n}})$ dans $\mathbb{C}$ est $\mathbb{U}$.

Proposition *(Convergence dans un espace normé produit) Soit E l'espace vectoriel normé produit $E_1 \times E_2 \times \cdots \times E_n$. On note $\pi_i : E \to E_i$ la i^e projection canonique. Alors*

1. Soit A une partie non vide d'un espace vectoriel normé. L'application $f : A \to E$ est continue si et seulement si les n fonctions $\pi_i \circ f$ sont continues.

2. La suite $(u_k) \in E^{\mathbb{N}}$ converge si et seulement si $(\pi_i(u_k))_k$ converge pour tout i.

Proposition *(Convergence dans un espace de dimension finie) On suppose E de dimension finie et $(e_k)_{1 \leqslant k \leqslant d}$ une base de E. Soit $(u(n))_n \in E^{\mathbb{N}}$. On écrit $u(n) = u_1(n)e_1 + \cdots + u_d(n)e_d$. Alors $(u(n))$ converge vers $l = l_1 e_1 + \cdots + l_d e_d$ si et seulement si pour chaque $k \in [\![1, d]\!]$, $(u_k(n))_n$ converge vers l_k.*

Définition *Soit E un espace vectoriel normé, $(u_n), (v_n) \in E^{\mathbb{N}}$ et $(\alpha_n) \in (\mathbb{R}^+)^{\mathbb{N}}$. Alors*

— *$u_n = O(\alpha_n)$ si $\|u_n\| = O(\alpha_n)$;*
— *$u_n = o(\alpha_n)$ si $\|u_n\| = o(\alpha_n)$;*
— *$u_n \sim v_n$ si $u_n - v_n = o(\|u_n\|)$. ($\sim$ est une relation d'équivalence.)*

5 Séries dans un espace vectoriel normé

Définition *Soit $(u_n) \in E^{\mathbb{N}}$. On dit que la série $\sum u_n$ converge absolument dans E si $\sum \|u_n\|$ converge.*

Proposition *On suppose E de dimension finie. Soit $(u_n) \in E^{\mathbb{N}}$ tel que la série $\sum u_n$ converge absolument. Alors $\sum u_n$ converge.*

Schéma de preuve ◂ Choisir une base puis la norme infinie associée permet de se ramener au cas de $\mathbb{R}$. ▸

Proposition *Soit $M \in \mathcal{M}_d(\mathbb{K})$. La série $\sum \frac{1}{n!} M^n$ converge absolument. On appelle exponentielle de $M \in \mathcal{M}_d(\mathbb{K})$ la matrice $\exp M = e^M = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} M^n$.*

Schéma de preuve ◂ Choisir une norme sous-multiplicative. ▸

Remarque On a l'énoncé équivalent dans $\mathcal{L}(E)$ où E est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie.

Exemple

1. Si $A = \operatorname{Diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$, alors $\exp A = \operatorname{Diag}(e^{\lambda_1}, \ldots, e^{\lambda_n})$.
2. Exponentielle d'une matrice triangulaire, nilpotente.
3. Si $f \in \mathcal{L}(E)$, $\exp f \in \mathbb{K}[f]$. En particulier, il existe $P \in \mathbb{K}[X]$ tel que $\exp f = P(f)$. (Mais ce P dépend de f.)
4. Si $p \in \mathcal{L}(E)$ est un projecteur, alors $\exp p$ vaut $e\mathrm{Id}_{\operatorname{Im} p}$ sur $\operatorname{Im} p$ et $\mathrm{Id}_{\operatorname{Ker} p}$ sur $\operatorname{Ker} p$.
5. Soit A la matrice dont tous les coefficients valent 1. Alors $e^A = I_n + \frac{e^n - 1}{n} A$.
6. Exponentielle de $\begin{pmatrix} 0 & -t \\ t & 0 \end{pmatrix}$. Résolution de $\exp M = R_\theta$ dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ où $\theta \in \mathbb{R}$. (Analyse : M *dgz*, de trace nulle, de même vecteurs propres que $\exp M$ sur $\mathbb{C}$.)

6 Continuité des fonctions de plusieurs variables

Proposition *Soient E, F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de dimensions finies, $(e_j)_{1 \leqslant j \leqslant p}$ et $(\varepsilon_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ des bases de E et F respectivement.*

1. *Soit $(u_k) \in E^{\mathbb{N}}$. Alors (u_k) converge si et seulement si coordonnées dans la base $(e_j)_{1 \leqslant j \leqslant p}$ convergent. En particulier la convergence des coordonnées ne dépend pas de la base choisie.*
2. *Soit $A \subset E$ et $f : A \to F$. On écrit $f(x) = \sum_{i=1}^{n} f_i(x)\varepsilon_i$. Alors f est continue si et seulement ses fonctions coordonnées f_i dans la base $(\varepsilon_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ sont continues.*
3. *Soit $f \in \mathcal{L}(E, G)$ où G est un $\mathbb{K}$-* evn *. Alors f est continue.*
4. *Soit $(x_1, \ldots, x_n)$ un système de coordonnées sur E à valeurs dans $\mathbb{K}$. Une fonction de E dans $\mathbb{K}$ est polynomiale (à n variables) si elle polynomiale en les x_k ; autrement dit, si elle est combinaison linéaire de fonctions de la forme $(x_1, \ldots, x_k) \mapsto x_1^{\alpha_1} \cdots x_n^{\alpha_n}$ avec $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{N}$. (Ceci ne dépend pas du choix du système de coordonnées choisis.) Les applications polynomiales sont continues.*

5. *Les applications linéaires, bilinéaires et plus généralement multilinéaires entre $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de dimension finie sont continues.*

Corollaire *Le produit matriciel dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et la composition dans $L(E)$ (avec E de dimension finie) sont continus.*

Exemples

1. Si $P \in \mathbb{K}[X]$, alors $A \mapsto P(A)$ dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est continue.
2. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Montrer que $\det \exp A = e^{\operatorname{Tr} A}$. En particulier e^A est inversible.
3. L'application $A \mapsto \chi_A$ est continue sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ car ses coordonnées sont polynomiales en les coefficients de A.
4. Si E, F sont de même dimension finie et $f : E \to F$ est un isomorphisme, alors c'est un homéomorphisme.
5. (Exercice corrigé.) Soit $f \in \mathcal{C}^n(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ telle que f et $f^{(n)}$ sont bornées. On pose $M_0 = \sup\limits_{\mathbb{R}} |f|$ et $M_n = \sup\limits_{\mathbb{R}} |f^{(n)}|$. Montrons que les dérivées intermédiaires $f', f'', \ldots, f^{(n-1)}$ sont aussi bornées.

   On pose $X_x = \big(f(x), f'(x), \ldots, f^{(n-1)}(x)\big)$. Il s'agit de montrer que X_x est borné pour la norme infinie, *i.e.* pour toute norme. On fixe n réels distincts $h_1, \ldots, h_n$. D'après l'inégalité de Taylor-Lagrange à l'ordre n, on a pour tout $k \in [\![1, n]\!]$,

$$|f(x)+h_k f'(x)+\frac{h_k^2}{2}f''(x)+\cdots+\frac{h_k^{n-1}}{(n-1)!}f^{(n-1)}f(x)| \leqslant |f(x+h_k)|+\frac{h_k^n}{n!}M_n \leqslant M_0+\frac{h_k^n}{n!}M_n.$$

   On pose $A = \left(\dfrac{h_i^{j-1}}{(j-1)!}\right)_{i,j} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et

$$Y_x = \Big(f(x) + h_k f'(x) + \frac{h_k^2}{2}f''(x) + \cdots + \frac{h_k^{n-1}}{(n-1)!}f^{(n-1)}\Big)_{1\leqslant k\leqslant n},$$

   de sorte que $AX_x = Y_x$, ou encore $X_x = A^{-1}Y_x$ car A est inversible en tant que matrice de Vandermonde (quitte à factoriser chaque ligne). Donc la famille $(X_x)_{x\in\mathbb{R}}$ est bornée en tant qu'image de la partie bornée $(Y_x)_x$ par A linéaire donc continue, et ses coordonnées aussi.

   (On pouvait aussi dire que la norme $X \mapsto \|A^{-1}X\|_\infty$ est une norme équivalente à $\|.\|_\infty$ – car $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ est de dimension finie –, et donc qu'il existe $C \geqslant 0$ tel que $\|A^{-1}X\|_\infty \leqslant C\|X\|_\infty$. Appliqué en Y_x, ceci permet de conclure.)

III Topologie

Dans cette partie, $(E, \|.\|)$ est un *evn* .

1 Ouverts

Définition *Une partie A de E est un ouvert (de E) si pour tout $x \in A$, il existe $r > 0$ tel que $B(a, r) \subset A$.*

Proposition 1. *$\emptyset$ et E sont des ouverts.*

2. *Une réunion quelconque d'ouverts est ouverte.*

3. *Une intersection finie d'ouverts est ouverte.*
4. *Une boule ouverte est ouverte.*

Proposition *Soit E, F deux* evn *et $f : E \to F$. Alors f est continue si et seulement si pour tout ouvert $\mathcal{U}$ de F, $f^{-1}(\mathcal{U})$ est un ouvert de F.*

Schéma de preuve ◀ Écrire la définition de la continuité avec des boules. ▶

Proposition *Le groupe $GL_n(\mathbb{K})$ est un ouvert de $M_n(\mathbb{K})$.*
Si E est un evn *de dimension finie, alors $GL(E)$ est un ouvert de $\mathcal{L}(E)$.*

Schéma de preuve ◀ Le groupe $GL_n(\mathbb{K})$ est l'image réciproque de l'ouvert $\mathbb{K}^*$ de $\mathbb{K}$ par l'application continue det. ▶

Remarque Un homéomorphisme entre E et F induit une bijection entre les ouverts de E et ceux de F.

Exemple Le seul sous-espace vectoriel ouvert de E contenant un ouvert non-vide de E est E lui-même. (Considérer des petites bases.)

2 Fermés

Proposition *Soit A une partie de E. Les deux propositions sont équivalentes :*

1. *le complémentaire A^c de A dans E est un ouvert ;*
2. *toute suite $(u_n)_n$ d'éléments de A convergente dans E a sa limite dans A.*

Une partie vérifiant ces propriétés est dite fermée.

Schéma de preuve ◀ Pour 1 $\implies$ 2. Soit $l \in A^c$ et $\varepsilon > 0$ tel que $B(l, \varepsilon) \subset A^c$. Alors toute suite (u_n) dans $E^{\mathbb{N}}$ qui converge vers l est dans A^c à partir d'un certain rang. A fortiori, les suites dans $A^{\mathbb{N}}$ convergentes ont leur limite dans A.

Pour 2 $\implies$ 1. Par contraposée. Par définition, il existe un $l \in A^c$ tel que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, il existe $u_n \in B(l, 1/n) \cap A$. Donc $u_n \to l$ avec $(u_n) \in A^{\mathbb{N}}$ et $l \notin A$. ▶

Remarque Le fait pour une partie A d'être ouverte ou fermée est une notion *relative* : cela dépend de l'espace dans lequel on regarde A. Par exemple, l'intervalle $]0,1[$ est ouvert dans $\mathbb{R}$, mais n'est pas ouvert dans $\mathbb{C}$.

De même, si $E = \mathcal{B}([0,1], \mathbb{R})$ et $F = \mathcal{CM}([0,1], \mathbb{R})$ sont muni de la norme uniforme, alors F est fermé dans lui-même, mais n'est ni fermé ni ouvert dans E.

Proposition *Soit E, F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels normés et $f : E \to F$. Alors f est continue si et seulement si pour tout fermé B de F, $f^{-1}(B)$ est un fermé de F.*

Schéma de preuve ◀ On a $f^{-1}(B^c) = (f^{-1}(B))^c$. ▶

Proposition
1. *$\emptyset$ et E sont des fermés.*
2. *Tout singleton $\{x\}$ est fermé.*
3. *Une intersection quelconque de fermés est fermée.*
4. *Une réunion finie de fermés est fermée.*
5. *Un ensemble fini est fermé.*
6. *Une boule fermée est fermée.*

Proposition *Deux normes équivalentes sur un $\mathbb{K}$-espace vectoriel définissent les mêmes ouverts et les mêmes fermés.*

Proposition *Un sous-espace vectoriel V de dimension finie de E est fermé.*

Schéma de preuve ◀ On peut fixer une base de V et la norme $\|\cdot\|_\infty$ associée. Si $(u_n) \in V^{\mathbb{N}}$ converge vers l dans E, alors ses coordonnées admmettent une extractrice commune convergente. Cette sous-suite converge dans V, vers l. ▶

Exemples

1. Soit E un espace vectoriel de dimension finie. Les sous-espaces vectoriels de E sont fermés. En particulier l'espace des matrices symétriques (resp. antisymétriques, triangulaires supérieures, diagonales) est un fermé de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
2. $\emptyset$ et E sont les seules parties à la fois ouvertes et fermées de E. (Prendre la fonction caractéristique de $\mathcal{U}$ et obtenir une contradiction avec la convexité.)
3. Si $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est continue, alors $\{x \in \mathbb{R} | f(x) = 0\}$ est un fermé. En particulier, si cet ensemble est majoré, il admet un maximum (*i.e.* la borne sup est atteinte).
4. $SL_n(\mathbb{R})$ est un fermé de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
5. Soit E un espace vectoriel de dimension finie. Alors l'ensemble des endomorphismes nilpotents de $\mathcal{L}(E)$ est un fermé.

On rappelle :

Définition *Un élément $a \in E$ est adhérent à A si pour tout $\varepsilon > 0$, $B(a, \varepsilon) \cap A \neq \emptyset$.*

Remarque Le point x est adhérent à A si et seulement s'il existe une suite dans A qui converge vers x.

Définition *Soit A une partie de E.*

1. *L'ensemble des points adhérent à A s'appelle l'adhérence de A, noté $\overline{A}$.*
2. *Un point $a \in A$ est dit intérieur à A s'il existe $r > 0$ tel que $B(a, r) \subset A$; autrement dit, A est un voisinage de a. On note $\overset{\circ}{A}$ l'intérieur de A.*
3. *On appelle frontière de A l'ensemble* $\mathrm{Fr}A = \overline{A} \setminus \overset{\circ}{A}$.

Proposition *Soit A une partie de E. Alors $\overline{A}$ est le plus petit fermé pour l'inclusion contenant A. En particulier, A est fermé si et seulement si $\overline{A} = A$.*

Schéma de preuve ◀ Déjà $A \subset \overline{A}$. De plus, quasiment par définition, $\overline{A}^c$ est ouvert, donc $\overline{A}$ est fermé. Enfin, si B fermé contient A, il contient aussi les limites de suites dans A, donc $\overline{A}$. ▶

Exemples

1. $\overline{\{1/n | n \in \mathbb{N}^*\}} = \{1/n | n \in \mathbb{N}^*\} \cup \{0\}$.
2. L'adhérence d'un sous-espace vectoriel de E est un sous-espace vectoriel.
3. L'adhérence de $B(a, r)$ est $B_f(a, r)$.
4. Soit $E = \mathcal{C}([0, 1], \mathbb{R})$ et F le sous-espace constitué des fonctions s'annulant en 0 et 1. Pour la norme infinie, F est fermé dans E, *i.e.* $\overline{F} = F$. Pour la norme de la convergence en moyenne, $\overline{F} = E$.

Remarques

1. Si B est un fermé contenant A, alors $B \supset \overline{A}$. Si B est un ouvert inclus dans A, alors $B \subset \mathring{A}$.
2. Le point x est adhérent à A si et seulement $\mathrm{d}(x, A) = 0$.
3. On a $\overline{\overline{A}} = \overline{A}$ et $\mathring{\mathring{A}} = \mathring{A}$.
4. Une partie B est fermée si et seulement si $\operatorname{Fr} B \subset B$.
5. Soit $(u_n) \in E^{\mathbb{N}}$. Ne pas confondre $\overline{\{u_n | n \in \mathbb{N}\}}$ et $\operatorname{Adh}(u_n)$. (Prendre $u_n = 1/n$.) $\operatorname{Adh}(u_n)$ est fermé.

Remarque Un homéomorphisme $f : A \to B$ induit une bijection entre les ouverts (et les fermés) de A et ceux de B.

3 Topologie relative

On définit ici les ouverts et fermés d'une partie A de E *evn* .

Définition *Soit A une partie de E.*

1. *On appelle fermé (relatif) de A toute partie de la forme $F \cap A$ où F est un fermé de E.*
2. *On appelle ouvert (relatif) de A toute partie de la forme $U \cap A$ où U est un ouvert de E.*

Proposition *Soit A une partie de E, $f : A \to F$ une fonction. Alors f est continue si et seulement pour tout ouvert U de F (resp. tout fermé B de F), $f^{-1}(U)$ est un ouvert (relatif) de A (resp. fermé (relatif) de A).*

Exemple

1. L'ensemble des matrices diagonales à coefficients strictement positifs est un fermé (relatif) de $GL_n(\mathbb{R})$. (Mais pas de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.)
2. L'ensemble V_r des matrices de rang $\leqslant r$ est un fermé de $M_n(\mathbb{K})$. L'ensemble des matrices de rang exactement r est un ouvert (relatif) de V_r.

4 Voisinages

Définition *Soit A une partie de E et $x \in A$. Une partie $\mathcal{V}$ est un voisinage de x dans A s'il existe $r > 0$ tel que $\mathcal{V}$ contient $B(x, r) \cap A$.*
Autrement dit, $\mathcal{V}$ est un voisinage de x dans A s'il contient un ouvert de A contenant x.

Remarque On peut réciproquement caractériser les ouverts à partir des voisinages : une partie X est ouverte si et seulement elle est voisinage de chacun des ses points.

Définition *Soit A une partie de $\mathbb{R}$. Une partie $\mathcal{V}$ de A est un voisinage de $+\infty$ dans A si elle contient une partie de la forme $A \cap [M, +\infty[$ où $M \in \mathbb{R}$.*

On peut reformuler élégamment la notion de limite avec les voisinages : la fonction f converge vers b en a si et seulement si, pour tout voisinage $\mathcal{V}$ de b, l'image réciproque $f^{-1}(\mathcal{V})$ est un voisinage de a, valable même si a ou b vaut $\pm\infty$.

5 Densité

Définition *Soit A, D deux parties de E. On dit que D est dense dans A si $\overline{D} \supset A$.*

Proposition *(caractérisation séquentielle de la densité) Soit A, D deux parties de E. Alors D est dense dans A si et seulement si tout élément de A est limite d'une suite d'éléments de D.*

Schéma de preuve ◀ Si $a \in A$, $B(a, 1/n) \cap D \neq \emptyset$ pour tout $n \geqslant 1$. ▶

Proposition *Soit A et B deux parties de E et F respectivement. Soit $f : A \to B$ continue. Si D est une partie dense dans A, alors $f(D)$ est une partie dense dans $f(A)$.*

Schéma de preuve ◀ Si $y = f(x) \in f(A)$, alors $y = \lim f(u_n)$ où $u_n \to a$ et $u_n \in D$. ▶

Remarque La densité est une notion intrinsèque, *i.e.* non relative, bien que l'adhérence soit une notion relative.

Proposition *Le groupe $GL_n(\mathbb{R})$ est un ouvert dense de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.*

Schéma de preuve ◀ La matrice $M + \dfrac{1}{k} I_n$ est inversible pour tout $k \in \mathbb{N}^*$ assez grand. ▶

Exemples

1. (Théorème de structure des sous-groupes de $\mathbb{R}$.) Un sous-groupe de $\mathbb{R}$ est soit dense, soit de la forme $\alpha\mathbb{Z}$.
2. L'espace $\mathcal{E}([a, b], \mathbb{K})$ est dense dans $\mathcal{CM}([a, b], \mathbb{K})$ pour la norme uniforme.
3. L'ensemble des matrices diagonalisables de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ est dense dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. L'ensemble des matrices diagonalisables de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ n'est pas dense dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Proposition *Soit D une partie dense de A et $f, g : A \to F$ continues. Si f et g coincident sur D, alors $f = g$.*

Schéma de preuve ◀ Soit $a \in A$ et $u_n \in D$ tels que $u_n \to a$. Alors $f(u_n) \to f(a)$ et $g(u_n) \to g(a)$, avec $f(u_n) = g(u_n)$. ▶

Remarque Le théorème de Weierstrass est un théorème de densité.

Exemples Applications de la densité.

1. Un morphisme continu de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ est de la forme $x \mapsto \alpha x$ où $\alpha \in \mathbb{R}$.
2. Si $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, alors $\mathrm{Com}(AB) = \mathrm{Com}\, A \,\mathrm{Com}\, B$.
3. Si $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, alors $\chi_{AB} = \chi_{BA}$.
4. Définition de l'intégrale de Riemann.
5. Il n'existe pas de norme N sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telle que $N(PAP^{-1}) = N(A)$ pour toute matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ et toute $P \in GL_n(\mathbb{C})$.

6 Compacité

Définition *Une partie A de E est compacte si toute suite d'éléments de A admet une valeur d'adhérence dans A.*

Proposition *Un compact est fermé borné.*

Schéma de preuve ◀ Fermé : si $(u_n) \in K^{\mathbb{N}}$ est une suite convergente dans E, elle admet une sous-suite dont la limite est dans K, qui n'est autre que $\lim u_n$.

Borné : Par l'absurde. Sinon, il existe une suite (u_n) dans $K^{\mathbb{N}}$ telle que $\|u_n\| \geqslant n$. Elle n'admet aucune sous-suite convergente. ▶

Proposition *Si E est de dimension finie, les compacts sont exactement les fermés bornés.*

Schéma de preuve ◀ On fixe une base et la norme infinie associée. On conclut par Bolzano-Weierstrass dans $\mathbb{K}^p$. ▶

Proposition *On suppose E de dimension finie et $(u_n) \in E^{\mathbb{N}}$ bornée. Alors (u_n) converge si et seulement si (u_n) admet une unique valeur d'adhérence.*

Schéma de preuve ◀ Elle en admet une l par BW. C'est nécessaire. C'est suffisant car si elle ne converge pas, il existe $\varepsilon > 0$ tel que $\{n | d(u_n, l) < \varepsilon\}$ est infini. D'où une deuxième valeur d'adhérence. ▶

Exemples

1. Un segment est compact. Plus généralement, une boule fermée d'un *evn* de dimension finie est compacte.
2. En dimension infinie, les boules ne sont pas compactes. Par exemple, dans $l^2(\mathbb{N}, \mathbb{R})$, la suite de suites $(u(n))_n$ où $u_k(n) = \delta_{n,k}$ est une suite dans la boule fermé unité qui n'admet aucune valeur d'adhérence : si $n \neq p$, $\|u(n) - u(p)\|_2 = \sqrt{2}$.
3. On suppose E euclidien. Les groupes $O(E)$ et $SO(E)$ (et donc $O_n(\mathbb{R})$ et $SO_n(\mathbb{R})$) sont compacts.
4. Soit u_n une suite convergente dans E vers l. Alors $K = \{u_n | n \in \mathbb{N}\} \cup \{l\}$ est compact. (Tout suite dans K est de la forme $(u_{\varphi(n)})$, et on distingue selon que φ est bornée ou non.)
5. Soit u_n une suite bornée dans E de dimension finie. Alors $\mathrm{Adh}(u_n)$ et $\{u_n | n \in \mathbb{N}\} \cup \mathrm{Adh}(u_n)$ sont compacts.

Proposition
1. *Tout fermé d'un compact est compact.*
2. *Si A (resp. B) est un compact de E (resp. F) alors $A \times B$ est un compact de $E \times F$.*
3. *Une intersection quelconque de compacts de E est compacte.*

Proposition *Soit A une partie de E, K un compact de A et $f : A \to F$. Alors $f(K)$ est compact.*

Schéma de preuve ◀ Soit (y_n) une suite dans $f(K)$. Alors il existe (x_n) suite dans K telle que $y_n = f(x_n)$. Mais alors il existe une sous-suite $(x_{\varphi(n)})$ qui converge vers a dans K. Ainsi, $(y_{\varphi(n)})$ converge vers $f(a)$, qui appartient à $f(K)$. ▶

Remarque En général, l'image d'un fermé (ou d'un ouvert) par une application continue n'est pas fermée (resp. ouverte). L'image réciproque d'un compact n'est pas compacte.

Corollaire *(théorème des bornes atteintes) Soit $f : K \to \mathbb{R}$ continue avec K compact. Alors f est bornée et ses bornes sont atteintes.*

Théorème de Heine *Une fonction continue sur un compact est uniformément continue.*

Schéma de preuve ◀ Par l'absurde et caractérisation séquentielle de l'uniforme continuité, il existe $\varepsilon > 0$ et deux suites (x_n) et (y_n) telles que $|x_n - y_n| \to 0$ avec $|f(x_n) - f(y_n)| > \varepsilon$. Quitte à extraire une sous-suite, (x_n) converge vers $a \in K$, donc (y_n) aussi, donc $|f(x_n) - f(y_n)|$ tend vers 0. Contradiction. ▶

Applications :

1. Toutes les normes sur un espace vectoriel de dimension finie sont équivalentes.
2. Une preuve du théorème fondamental de l'algèbre.
3. Applications dilatantes d'un compact.
4. **Théorème des compacts emboîtés** *(HP) Soit $(K_i)_{i\in\mathbb{N}}$ une famille décroissante de compacts non vides de E. Alors $\displaystyle\bigcap_{i\in\mathbb{N}} K_i$ est non vide. Si de plus le diamètre de K_i tend vers 0, alors $\displaystyle\bigcap_{i\in\mathbb{N}} K_i$ est un singleton.*
5. Le théorème de Dini.
6. Recouvrement d'un compact par des boules de rayon $\varepsilon > 0$. Tout compact contient une suite dense.

7 Connexité

Définition *Une partie A de E est dite connexe par arcs si pour tous $x_0, x_1 \in A$, il existe une application continue (appelé chemin continu) $c : [0,1] \to A$ tel que $c(0) = x_0$ et $c(1) = x_1$.*

Remarque Par reparamétrage, il est équivalent de supposer qu'il existe un chemin continu défini sur $[a,b]$ (avec $a < b$) dans A avec $c(a) = x_0$ et $c(b) = x_1$.

Exemples

1. Un convexe est connexe par arcs.
2. Les connexes par arcs de $\mathbb{R}$ sont exactement les intervalles. Les connexes par arcs de $\mathbb{Q}$ sont les singletons et l'ensemble vide.
3. Si A, B sont parties de E connexes par arcs telles que $A \cap B \neq \emptyset$, alors $A \cup B$ est connexe par arcs.
4. Soit X une partie finie de $\mathbb{C}$. Alors $\mathbb{C} \setminus X$ est connexe par arcs.

Proposition *Soient A, B deux parties connexes par arcs respectivement dans E et F. Alors $A \times B$ est connexe par arcs dans $E \times F$.*

Schéma de preuve ◀ Si c_1, c_2 sont continues sur $[0,1]$, alors $t \mapsto (c_1(t), c_2(t))$ est continue. ▶

Remarque La connexité par arcs n'est stable ni par réunion, ni par intersection.

Proposition *Soit A un connexe par arcs dans E et $f : A \to F$ continue. Alors $f(A)$ est un connexe par arcs.*

Schéma de preuve ◀ Si c est continue, $f \circ c$ aussi. ▶

Exemples

1. $GL_n(\mathbb{R})$ n'est pas connexe par arcs.
2. $GL_n(\mathbb{C})$ est connexe par arcs. (Méthode 1 : pivot de Gauss. Méthode 2 : considérer un chemin z tel que $\det\big((1-z)A + zB\big)$ ne s'annule pas.)
3. L'adhérence d'un connexe par arcs n'est pas nécessairement connexe par arcs : considérer par exemple $(x \sin 1/x)_{x>0}$. Son intérieur non plus.

Remarque Soit $f : A \to B$ un homéomorphisme de A dans B et $X \subset A$. Alors X est compact (resp. connexe, resp. dense dans A) si et seulement si $f(X)$ est compact (resp. connexe, resp. dense dans B). Mais le caractère borné n'est pas préservé en général : $]0, 1[$ est homéomorphe à $\mathbb{R}$.

Définition *(HP - composante connexe par arcs) Soit A une partie non vide de E et $x \in A$. La composante connexe par arcs de x (dans A) est l'ensemble des $y \in A$ tel qu'il existe un chemin continu dans A entre x et y.*

Exemple Si E est un $\mathbb{R}$-espace de dimension finie et H un hyperplan de E. Alors $E \setminus H$ a deux composantes connexes par arcs.

Application de la connexité : Si A est connexe par arcs et $B \subset A$ est un ouvert et fermé (pour la topologie relative), alors $B = A$ ou $\emptyset$. En particulier, E et $\emptyset$ sont les seuls ouverts fermés de E.

IV Fonctions de la variable vectorielle et arcs paramétrés

Dans cette partie, E et F sont deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels normés de dimensions finies. On étend les propriétés classiques de la dérivation et de l'intégration aux arcs paramétrés, *i.e.* aux fonctions $f : I \to F$ où I est un intervalle de $\mathbb{R}$.

1 Suites et séries de fonctions de variable vectorielle

Soit A une partie non vide de E. Les énoncés sur les suites et séries de fonctions se généralisent sans difficulté aux suites et séries entre espaces vectoriels normés de dimensions finies.

Définition *La suite de fonctions $(f_n) \in (F^A)^{\mathbb{N}}$ converge simplement si pour tout $x \in A$, la suite $(f_n(x))$ converge. En cas de convergence, la fonction $g \in F^A$ définie par $x \mapsto \lim_n f_n(x)$ s'appelle la limite simple de (f_n).*

Définition *Soit $(f_n)_n$ une suite de fonctions de A dans F. On dit que la suite $(f_n)_n$ converge uniformément vers $g : A \to F$ si*

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geqslant N, \forall x \in A, \|f_n(x) - g(x)\| \leqslant \varepsilon.$$

La fonction g est la limite uniforme de la suite $(f_n)_n$.

Remarque

1. La convergence uniforme implique la convergence simple.

2. On peut interpréter la convergence uniforme avec la norme $\|.\|_\infty$ sur $\mathcal{B}(A,F)$: $(f_n)_n$ converge uniformément vers g si
$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geqslant N, \|f_n - g\|_\infty \leqslant \varepsilon.$$
Remarquer que $\|f_n - g\|_\infty$ peut ne pas être défini pour des petites valeurs de n, car la fonction $f_n - g$ peut ne pas être bornée.

Exemple Soit $f_n(z) = \left(1 + \frac{z}{n}\right)^n$. Alors (f_n) converge uniformément sur tout compact vers e^z.

On dispose encore du théorème de la double limite et de ses conséquences :

Proposition (théorème de la double limite) *Soit $(f_n)_n$ une suite de fonctions de A dans F qui converge uniformément vers g et $a \in A$. On suppose que chaque fonction f_n admet une limite finie l_n en a dans F. Alors la suite (l_n) converge, la fonction g admet une limite finie en a et $\lim_n l_n = \lim_a g$. En particulier,*
$$\lim_{n\to+\infty} \lim_{x\to a} f_n(x) = \lim_{x\to a} \lim_{n\to+\infty} f_n(x).$$

Schéma de preuve ◀ Repasser aux coordonnées. ▶

Corollaire *Soit $(f_n)_n$ une suite de fonctions continues de A dans F qui converge uniformément vers g. Alors g est continue.*

Corollaire *Soit $(f_n)_n$ une suite de fonctions continues de A dans F telle que $\sum_n f_n$ converge uniformément vers S. Alors S est continue.*

Remarque Dans les deux énoncés précédents, on n'a pas besoin de la convergence uniforme sur tout A : la convergence uniforme sur un voisinage de a dans A suffit.

Définition *Soit $(f_n)_n$ une suite de fonctions de A dans F.*

1. *La série de fonctions $\sum f_n$ converge absolument si la série de fonctions $\sum \|f_n\|$ converge simplement, i.e. $\left(\sum \|f_n(x)\|\right)_n$ converge pour tout $x \in A$.*
2. *La série de fonctions $\sum f_n$ converge normalement si la série numérique positive $\sum \|f_n\|_\infty$ converge, où $\|f\|_\infty = \sup_{x\in A} \|f(x)\|$.*

Remarque On a $CN \Rightarrow CA \Rightarrow CS$ et $CN \Rightarrow CU \Rightarrow CS$. Ces convergences ne dépendent pas du choix des normes sur E et F.

Proposition *L'application exponentielle de $\mathcal{M}_d(\mathbb{K})$ dans lui-même est continue.*

Schéma de preuve ◀ On a convergence normale sur toute $B_f(0,R)$, donc sur toute $B_f(a,r)$ et donc continuité en a. ▶

Remarque On a l'énoncé équivalent dans $\mathcal{L}(E)$.

Exemple On munit $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ d'une norme sous-multiplicative. Montrer que l'application $f : B(0,1) \to \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, $M \mapsto \sum_{k=0}^{\infty} M^k$ est continue et coïncide avec $M \mapsto (I_n - M)^{-1}$. (Bonus : quelle est le domaine de définition de f ?)

2 Intégrales des fonctions à valeurs vectorielles

Soit I un segment de $\mathbb{R}$. La théorie de l'intégration des fonctions de I dans $\mathbb{K}$ s'étend sans grande difficulté aux fonctions de I dans E.

Définition *Soit $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_p)$ une base de E.*

1. *Une fonction de I dans E est continue par morceaux si ses fonctions coordonnées $f_1, \ldots, f_p$ dans la base $\mathcal{B}$ sont continues par morceaux.*
2. *On appelle intégrale de $f : I \to E$ continue par morceaux le vecteur de coordonnées $\left(\int_I f_k\right)$ dans E. On note $\int_I f = \sum_{k=1}^{p} \left(\int_I f_k\right) e_k$, ou si $I = [a,b]$, $\int_a^b f = \int_a^b f(t)\mathrm{d}t$.*

Proposition — *Le fait d'être continue par morceaux ne dépend pas du choix de $\mathcal{B}$.*
— *$\int_I f$ ne dépend pas du choix de la base $\mathcal{B}$.*

Proposition *Soit $f : I = [a,b] \to E$ continue par morceaux.*

1. *L'application $g \mapsto \int_I g$ est linéaire de $\mathcal{CM}(I,E)$ dans E.*
2. *Si $u \in [a,b]$, $\int_a^u f + \int_u^b f = \int_a^b f$.*
3. *Si σ_n est une suite de subdivision de $[a,b]$ dont le pas tend vers 0 et S_{σ_n} une somme de Riemann associée à σ_n, alors S_{σ_n} converge vers $\int_a^b f$.*
4. *On a $\| \int_a^b f(t)dt \| \leqslant \int_a^b \|f(t)\| dt \leqslant (b-a)\|f\|_\infty$.*

Schéma de preuve ◀ Pour (4). C'est vrai pour une fonction en escalier comme on le vérifie. Soit maintenant $x_k = a + k(b-a)/n$ pour $0 \leqslant k \leqslant n$, puis $\varphi_n(t) = f(x_k)$ si $x_k \leqslant t < x_{k+1}$ et $\varphi_n(b) = f(b)$. Donc (φ_n) est une suite de fonctions en escalier sur $[a,b]$ à valeurs dans E telles que $\int_a^b \varphi_n \to \int_a^b f$. (Somme de Riemann à gauche dont le pas tend vers 0.) Mais $\|\varphi_n\|$ est aussi en escalier et $\int_a^b \|\varphi_n(t)\| dt$ est une somme de Riemann pour $t \mapsto \|f(t)\|$. Donc $\int_a^b \|\varphi_n(t)\| dt \to \int_a^b \|f(t)\| dt$. En passant à la limite dans $\| \int_a^b \varphi_n(t) dt \| \leqslant \int_a^b \|\varphi_n(t)\| dt$, on a ce qu'on voulait. ▶

Proposition *Soit f_n une suite de fonctions continues sur l'intervalle J de $\mathbb{R}$ qui convergent uniformément sur tout segment de J vers g et $t_0 \in J$. Si $F_n(t) = \int_{t_0}^t f_n$ et $G(t) = \int_{t_0}^t g$, alors (F_n) converge uniformément sur tout segment vers G.*

Schéma de preuve ◀ Repasser aux coordonnées. ▶

Proposition *Soient A une partie non vide de E, I un intervalle et $f : A \times I \to F$ une fonction. On fixe une norme sur F et on suppose que*

1. *pour tout $t \in I$, $x \mapsto f(x,t)$ est continue sur A ;*
2. *pour tout $x \in A$, $t \mapsto f(x,t)$ est continue par morceaux sur I ;*
3. *il existe une fonction $\varphi : I \to \mathbb{R}^+$ intégrable telle que pour tout $x \in A$, $\|f(x,\cdot)\| \leqslant \varphi$.*

Alors l'application $g : x \mapsto \int_I f(x,t)\mathrm{d}t$ est bien définie et continue sur A.

Schéma de preuve ◀ Utiliser la caractérisation séquentielle de la continuité, ce qui permet de se ramener au théorème de convergence dominée usuel. ▶

3 Dérivation des fonctions à valeurs vectorielles

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $(G, \|.\|)$ un $\mathbb{K}$- *evn* de dimension finie.

Définition *Une fonction $f : I \to E$ est dérivable en $t_0 \in I$ si f admet un développement limité à l'ordre 1 en t_0. Autrement dit, il existe $x_0, x_1 \in E$ tel que $f(t) = x_0 + (t - t_0)x_1 + o(t - t_0)$.*

Remarques

1. Le terme $o(t - t_0)$ est à valeurs dans E et désigne une fonction $g(t)$ telle que $g(t)/(t - t_0) \to 0$ quand $t \to t_0$.
2. On a de même la notion de dérivabilité à droite et à gauche. On définit aussi les fonctions de classe $\mathcal{C}^k$, $\mathcal{C}^\infty$.

Proposition

1. *Soit $f : I \to E$ dérivable et $L : E \to F$ linéaire. Alors $L \circ f$ est dérivable et $(L \circ f)'(t) = L(f'(t))$.*
2. *Soient $f : I \to E$ et $g : I \to F$ dérivables, et $B : E \times F \to G$ bilinéaire. Alors $t \mapsto B(f(t), g(t))$ est dérivable et $B(f(t), g(t))' = B(f'(t), g(t)) + B(f(t), g'(t))$.*

Exemple Si F est euclidien et $f : I \to F$ dérivable et ne prend pas la valeur 0, alors $t \mapsto \|f(t)\|$ est dérivable et de dérivée $\dfrac{\langle f'(t)|f(t)\rangle}{\|f(t)\|}$.

Proposition *Soit $k \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$.*

1. *Une combinaison linéaire de fonctions dérivables est dérivable.*
2. *L'ensemble $\mathcal{C}^k(I, E)$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.*
3. *Si $\mathcal{A}$ est une $\mathbb{K}$-algèbre de dimension finie, alors $\mathcal{C}^k(I, \mathcal{A})$ est une $\mathbb{K}$-algèbre.*

Proposition *Soit $f : I \to E$ continue, alors $t \mapsto \displaystyle\int_a^t f$ est de classe $\mathcal{C}^1$ et de dérivée f.*

Proposition *(Inégalité des accroissements finis) Soit $f \in \mathcal{C}^1(I, E)$. Alors pour tous $a < b$ de I,*

$$\|f(b) - f(a)\| \leqslant |b - a| \|f'\|_{\infty,[a,b]} = |b - a| \sup_{[a,b]} \|f'\|.$$

Schéma de preuve ◀ $f(b) - f(a) = \displaystyle\int_a^b f'(t)dt.$ ▶

Remarque Si E n'est pas de dimension 1, on n'a pas en général d'égalité des accroissements finis. Considérer pour un contre-exemple $t \mapsto e^{it}$ sur $[0, 2\pi]$.

Proposition *(Formule de Taylor-reste intégral)*
Soit $f : I \to E$ de classe $\mathcal{C}^{n+1}$ et $a, b \in I$. Alors

$$f(b) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(b-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) + \frac{1}{n!} \int_a^b (b - s)^n f^{(n+1)}(s)\mathrm{d}s.$$

Schéma de preuve ◀ Intégration par parties. Ou repasser aux coordonnées. ▶

Proposition *(Inégalité de Taylor-Lagrange)*
Soit $f : I \to E$ de classe $\mathcal{C}^{n+1}$ et $a, b \in I$. Alors

$$\left\| f(b) - \sum_{k=0}^{n} \frac{(b-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) \right\| \leqslant \frac{1}{(n+1)!} |b-a|^{n+1} \|f^{(n+1)}\|_\infty.$$

Schéma de preuve ◀ Majorer le reste intégral. ▶

Proposition *(Formule de Taylor-Young)*
Soit $f : I \to E$ de classe $\mathcal{C}^n$ et $t, t_0 \in I$. Alors

$$f(t) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(t-t_0)^k}{k!} f^{(k)}(t_0) + o\big((t-t_0)^n\big).$$

Schéma de preuve ◀ Repasser aux coordonnées. ▶

Proposition *Soit (f_n) une suite de fonctions de $\mathcal{C}^1(I, E)$.*

1. *On suppose que (f_n) converge simplement vers g et que (f_n') converge uniformément sur tout segment de I vers h. Alors g est de classe $\mathcal{C}^1$ et $g' = h$.*
2. *On suppose que $\sum f_n$ converge simplement vers S et que $\sum f_n'$ converge uniformément sur tout segment de I vers U. Alors S est de classe $\mathcal{C}^1$ et $S' = U$.*

Schéma de preuve ◀ Repasser aux coordonnées. ▶

Remarque Comme pour les fonctions à valeurs réelles, on peut étendre ce théorème aux suites et séries de fonctions de classe $\mathcal{C}^p$ sous l'hypothèse de convergence simple des $f_n^{(k)}$ $\big($resp. $\sum_n f_n^{(k)}\big)$, $0 \leqslant k \leqslant p-1$ et la convergence uniforme sur tout segment de $f_n^{(p)}$ (resp. $\sum_n f_n^{(p)}$).

Exemple

1. La fonction $t \mapsto e^{tM}$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$, de dérivée $t \mapsto Me^{tM} = e^{tM}M$.
2. Si $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ commutent, alors $e^{A+B} = e^A e^B$. En particulier, e^M est inversible et son inverse est e^{-M}.
3. Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ et $\chi_M(\lambda) = \lambda^n + \cdots + a_1\lambda + a_0$ son polynôme caractéristique. Alors $a_1 = (-1)^{n-1} \sum_{j=1}^{n} \Delta_{i,i}$ où les $\Delta_{i,i}$ sont les cofacteurs d'indice (i, i). (Dériver $\det(C_1(\lambda), \ldots, C_n(\lambda))$.)
4. Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ antisymétrique. Alors $\exp M$ est une matrice de rotation.
5. Les morphismes de groupes continus de $\mathbb{R}$ dans $GL_n(\mathbb{R})$ sont les $t \mapsto e^{tA}$. (Ils sont dérivables et même de classe $\mathcal{C}^\infty$.)

4 Étude des arcs paramétrés plans

cf chapitre Calcul différentiel.