

1	Réduction des endomorphismes	1
I	Rappels et compléments d'algèbre linéaire	1
1	Dualité	1
2	Endomorphismes nilpotents	2
3	Polynôme caractéristique	2
II	Réduction	3
1	Sous-espaces stables par un endomorphisme	3
2	Valeurs propres, vecteurs propres	4
3	Diagonalisation	5
4	Matrices et vecteurs propres	7
III	Polynôme en un endomorphisme	7
1	Polynôme annulateur	8
2	Le lemme des noyaux	9
3	Diagonalisation et polynôme annulateur	10
4	Le théorème de Cayley-Hamilton	11
5	Trigonalisation	11
6	Réduction simultanée (HP)	13
7	Quelques exercices corrigés	13
2	Convexité	17
I	Ensembles convexes	17
1	Définition	17
2	Barycentres	17
3	Enveloppe convexe	18
II	Fonctions convexes	18
1	Fonctions convexes	18
2	Fonctions convexes dérivables	19
3	Inégalités de convexité	20
3	Séries numériques	21
I	Compléments sur les séries numériques	21
1	Règle de d'Alembert	21
2	Formule de Stirling	21
3	Séries alternées	22
4	Comparaison séries-intégrales	22
5	Sommation des relations de comparaison	22

	6	Techniques avancées (HP)	24
II		Dénombrabilité	24
	1	Équipotence	24
	2	Dénombrabilité	24
III		Familles sommables	25
	1	Familles sommables positives	25
	2	Familles sommables complexes	26
	3	Séries doubles	26
4		Intégrales généralisées	28
I		Intégrales impropres	28
	1	Définitions	28
	2	Propriétés	29
II		Fonctions intégrables	30
	1	Fonctions positives intégrables	30
	2	Fonctions complexes intégrables	31
	3	Propriétés	32
	4	Techniques usuelles	32
	a	Intégration par parties	32
	b	Changement de variables	33
	c	Intégration des relations de comparaisons	33
III		Intégrales dépendant d'un paramètre	34
	1	Le théorème de convergence dominée	34
	2	Continuité d'une intégrale à paramètre	35
	3	Dérivabilité d'une intégrale à paramètre	35
5		Suites et séries de fonctions	38
I		Suites de fonctions	38
	1	Convergence simple	38
	2	Convergence uniforme	39
	3	Propriétés des limites uniformes	40
	4	Deux théorèmes d'approximation	42
II		Séries de fonctions	43
	1	Convergence simple et uniforme	43
	2	Convergence absolue et normale	43
	3	Propriété de la somme	44
	4	Un autre théorème d'intégration d'une série de fonctions	44
	5	Exemples	45
6		Espaces vectoriels normés et topologie	46
I		Espaces vectoriels normés	46
	1	Normes	46
	2	Équivalence des normes	48
	3	Parties bornées, applications bornées	49
II		Limites et continuité des fonctions de variable vectorielle	49
	1	Limites	49
	2	Continuité	50
	3	Continuité des applications linéaires	51
	4	Suites convergentes dans un espace vectoriel normé	52
	5	Séries dans un espace vectoriel normé	54
	6	Continuité des fonctions de plusieurs variables	54
III		Topologie	55

1	Ouverts	55
2	Fermés	56
3	Topologie relative	58
4	Voisinages	58
5	Densité	58
6	Compacité	59
7	Connexité	61
IV	Fonctions de la variable vectorielle et arcs paramétrés	62
1	Suites et séries de fonctions de variable vectorielle	62
2	Intégrales des fonctions à valeurs vectorielles	63
3	Dérivation des fonctions à valeurs vectorielles	64
4	Étude des arcs paramétrés plans	66
7	Équations différentielles linéaires	67
I	Équations différentielles linéaires d'ordre un	67
1	Le théorème de Cauchy-Lipschitz linéaire	67
2	Systèmes différentiels d'ordre 1	68
3	Systèmes différentiels linéaires à coefficients constants	69
II	Équations différentielles linéaires scalaires	70
1	Le théorème de Cauchy-Lipschitz pour les équations scalaires	70
2	Équations différentielles linéaires scalaires à coefficients constants	71
3	Équations différentielles linéaires scalaires d'ordre 1 et 2	72
4	Quelques techniques usuelles	72
a	Raccordements des solutions	72
b	Méthode de la variation de la constante	72
c	Expression explicite des solutions	72
d	Utilisation du wronskien	72
e	Étude qualitative	73
8	Séries entières	74
I	Séries entières	74
1	Séries formelles (HP)	74
2	Convergence des séries entières	74
3	Opérations sur les séries entières	76
4	Continuité d'une fonction définie par une série entière	76
5	L'exponentielle complexe	77
II	Série entière de la variable réelle	77
1	Propriétés de la somme	78
2	Fonctions développables en série entière	78
3	Développements usuels	79
4	Séries génératrices	79
9	Endomorphismes symétriques des espaces euclidiens	82
I	Projections orthogonales	82
1	Rappels	82
2	Projections orthogonales sur un sous-espace de dimension finie	83
3	Suites totales	83
II	Endomorphismes des espaces euclidiens	84
1	Endomorphismes symétriques	84
2	Le théorème spectral	85
3	Endomorphismes orthogonaux	85
4	Compléments (HP)	86

10 Structures algébriques usuelles	88
I Groupes	88
1 Morphismes de groupes	88
2 Sous-groupes de \mathbb{Z} et de \mathbb{R}	90
3 Parties génératrices	91
4 Le groupe $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$	92
5 Groupes cycliques	92
II Anneaux	93
1 Sous-anneaux et morphismes	93
2 Idéaux	94
3 Intégrité	95
4 Corps	95
5 L'anneau $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$	96
6 Compléments sur les corps	97
III Algèbres	97
1 Algèbres	98
2 L'algèbre $K[X]$	98
11 Probabilités	100
I Notion de probabilités	100
1 Espace probabilisable	100
2 Espace probabilisé	100
3 Probabilités conditionnelles	102
4 Indépendance	103
II Variables aléatoires discrètes	103
1 Notion de variable aléatoire	103
2 Lois usuelles	103
3 Vecteurs aléatoires discrets	104
4 Variables aléatoires indépendantes	104
III Espérance, variance, moments	105
1 Espérance	105
2 Propriétés de l'espérance	107
3 Variance, écart-type, covariance	109
4 Loi des grands nombres	111
IV Séries génératrices	111
12 Calcul différentiel	114
I Dérivées partielles	114
1 Compléments sur la continuité des fonctions de variable vectorielle	114
2 Dérivées partielles	115
3 Fonctions de classe \mathcal{C}^1	116
4 Fonctions de classe \mathcal{C}^k	118
II Applications	119
1 Extremums	119
2 Équations aux dérivées partielles	120
3 Changement de variables linéaire	120
4 Changement de variables : coordonnées polaires	121
III Différentielle	121
1 Dérivées partielles et directionnelles	121
2 Différentielle et application linéaire tangente	122
3 Opérations sur les applications différentiables	123

4	Gradient et points critiques	124
5	Retour sur les fonctions de classe \mathcal{C}^1	124
6	Circulation d'un champ de vecteur	125
IV	Géométrie différentielle	125
1	Espace tangent	125
2	Arcs paramétrés	126
3	Le théorème d'inversion locale (HP)	127
4	Le théorème des fonctions implicites (HP)	127