Exercices d'application :

1. La fonction $f \mapsto \sup_{[0,1]\cap\mathbb{Q}} |f|$ est-elle une norme sur $\mathcal{C}([0,1],\mathbb{R})$?
2. Montrer que tout $\mathbb{K}$-espace vectoriel admettant une base, même infinie dénombrable, admet des normes.
3. Les fonctions suivantes sont-elles continues sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$?
$$A \mapsto A^2; \quad A \mapsto \det A; \quad A \mapsto \operatorname{rg} A; \quad A \mapsto \chi_A; \quad A \mapsto \mu_A.$$
La fonction $A \mapsto A^{-1}$ est-elle continue sur $GL_n(\mathbb{R})$?
4. Soit $\varphi : \mathbb{R}[X] \to \mathbb{R}$ définie par $\varphi(P) = P(0)$. Est-elle continue pour les normes suivantes :
$$P \mapsto \int_0^1 |P(t)|\mathrm{d}t; \qquad \sum_k a_k X^k \mapsto \sum_k |a_k|; \qquad \sum_k a_k X^k \mapsto \max_k |a_k|.$$
5. Montrer qu'il existe $a > 0$ tel que pour tout $x, y \in \mathbb{R}$, on a
$$\sqrt{(2x-y)^2 + (y-\sqrt{7}x)^2} \leqslant a \sup_{t\in[0,1]} |x+ty|).$$
6. Tracer la courbe représentative de la fonction réelle $x \mapsto \mathrm{d}(x,\mathbb{N})$.
7. Soit $E = \mathcal{C}^1([0,1],\mathbb{R})$. Montrer que les applications de E dans $\mathbb{R}$ suivantes sont des normes :
$$f \mapsto N_1(f) = \|f\|_\infty + \|f'\|_\infty \quad \text{et} \quad f \mapsto N_2(f) = |f(0)| + \|f'\|_\infty.$$
Sont-elles équivalentes ?
8. L'application $\mathbb{R}[X] \times \mathbb{R}[X] \to \mathbb{R}[X]$ définie par $(P,Q) \mapsto PQ$ est-elle continue pour les normes $P \mapsto \|P\|_{\infty,[0,1]}$ et $\sum_k a_k X^k \mapsto \max_k |a_k|$?
9. La suite de fonctions complexes $f_n : z \mapsto z^n$ converge-t-elle uniformément sur $D = \{z \in \mathbb{C} / |z| < 1\}$?
10. Soit E, F deux espaces vectoriels normés. On note $\mathcal{L}_c(E,F)$ le sous-ensemble de $\mathcal{L}(E,F)$ constitué des applications continues. Montrer que $\mathcal{L}_c(E,F)$ est un espace vectoriel normé muni de la norme $f \mapsto \sup_{x\neq 0} \|f(x)\|/\|x\|$.
11. Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie et $(f_k) \in \mathcal{L}(E)^{\mathbb{N}}$. Montrer l'équivalence entre :
   (a) (f_n) converge ;
   (b) il existe une base $(e_1, \dots, e_n)$ telle que $(f_k(e_j))_k$ converge pour tout j ;
   (c) (f_n) converge simplement ;
   (d) (f_n) converge uniformément sur tout compact.
12. Soit $E = \ell^\infty(\mathbb{N},\mathbb{R})$ l'espace des suites réelles bornées muni de la norme $\sup_n |u_n|$. Soit $(u(n))_{n\in\mathbb{N}}$ une suite dans $E^{\mathbb{N}}$ tel que chaque $u(n)$ est un suite à valeurs dans $[0,1]$. Montrer qu'il existe une sous-suite $(u(\varphi(n)))_{n\in\mathbb{N}}$ de $(u(n))_{n\in\mathbb{N}}$ telle que chaque coordonnée $(u_k(\varphi(n)))_k$ converge. Y a-t-il convergence dans E ?

Exercice 1 * : Soit $n \geqslant 2$. Montrer qu'il n'existe pas de norme N sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telle que pour tout $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ et tout $P \in GL_n(\mathbb{C})$, $N(PAP^{-1}) = N(A)$.

Exercice 2 : Soit $z \in \mathbb{C}$. Montrer que $\lim_{n\to+\infty} \left(1 + \frac{z}{n}\right)^n = e^z$.

Exercice 3 : Soit I un segment infini et $E = \mathcal{C}(I,\mathbb{R})$.

1. L'application $f \mapsto \int_I |f|$ est-elle une norme sur $\mathcal{CM}(I,\mathbb{R})$?
2. Déterminer deux constantes $c_1, c_2 > 0$ telles que $\|f\|_1 \leqslant c_1\|f\|_2$ et $\|f\|_2 \leqslant c_2\|f\|_\infty$ pour toute $f \in E$.
3. Déterminer une suite de fonctions (f_n) de E telles que $\|f_n\|_1 \to 0$ et $\|f_n\|_\infty \to +\infty$.
4. Déterminer une suite de fonctions (f_n) de E telles que $\|f_n\|_2 \to 0$ et $\|f_n\|_\infty \to +\infty$.
5. Déterminer une suite de fonctions (f_n) de E telles que $\|f_n\|_1 \to 0$ et $\|f_n\|_2 \to +\infty$.
6. (**) Déterminer une suite de fonctions (f_n) de E telle que $\|f_n\|_1 \to 0$ mais $(f_n(x))_n$ ne converge pour aucun x.

Exercice 4 * : Soit (u_n) une suite à valeurs dans $[0,1]$. Pour $f \in E = \mathcal{C}([0,1],\mathbb{R})$, on pose
$$N(f) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{|f(u_n)|}{2^n}.$$

1. Donner une condition nécessaire et suffisante sur (u_n) pour que N soit une norme.
2. Est-elle équivalente à $\|.\|_\infty$?

Exercice 5 : Soit $E = \mathcal{C}([0,1],\mathbb{R})$ muni de la norme $\|.\|_\infty$. On fixe $g \in E$.

1. À quelle condition nécessaire et suffisante sur g la fonction $f \mapsto N(f) = \|fg\|_\infty$ est-elle une norme ?

2. Donner une condition nécessaire et suffisante pour que N et $\|.\|_\infty$ soient équivalentes.

Exercice 6 * : Soit $E = \mathbb{C}[X]$ muni de la norme $\|P\| = \max |a_k|$ où $P = \sum_k a_k X^k$. Pour $\alpha \in \mathbb{C}$, on pose $\Phi_\alpha : E \to \mathbb{C}$, $P \mapsto P(\alpha)$.

1. À quelle condition nécessaire et suffisante sur α la fonction Φ_α est-elle continue ?
2. Déterminer $|||\Phi_\alpha|||$.

Exercice 7 * : Soit $E = \mathcal{B}_c(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ l'espace vectoriel des fonctions réelles continues bornées sur $\mathbb{R}$ muni de la norme $\|.\|_\infty$ et $g \in E$. Étudier la continuité de l'application $\Phi : f \in E \mapsto g \circ f$.

Exercice 8 ** : Soit $P \in \mathbb{R}[X]$. Montrer qu'il existe une norme sur $\mathbb{R}[X]$ telle que $(X^n)_n$ converge vers P.

Exercice 9 ** : Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie et $u \in \mathcal{L}(E)$. On appelle rappelle rayon spectral de u le réel positif $\rho(u) = \max\limits_{\lambda \in \mathrm{Sp}_{\mathbb{C}} u} |\lambda|$.

1. Soit $D \in GL_d(\mathbb{K})$ et $k \in \mathbb{N}$. Calculer $D^k E_{i,j} D^{-k}$.
2. Soit N une norme subordonnée sur $\mathcal{L}(E)$. Montrer que $N(u) \geqslant \rho(u)$.
3. Soit $\varepsilon > 0$. Montrer qu'il existe une norme subordonnée N sur $\mathcal{L}(E)$ telle que $N(u) \leqslant \rho(u) + \varepsilon$.

Exercice 10 ** : Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension n.

1. On munit E d'une norme N. Montrer que la boule ouverte unité est convexe et symétrique par rapport à 0 *i.e.* $x \in B \Longrightarrow -x \in B$.
2. Soit B une partie convexe ouverte bornée de E symétrique par rapport à 0, Montrer que $N(x) = \inf \{\alpha \in]0, +\infty[\mid x/\alpha \in B\}$ est une norme dont B est la boule unité.

Exercice 11 * : Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Montrer que l'ensemble $\{PMP^{-1} \mid P \in GL_n(\mathbb{C})\}$ est borné si et seulement si M est une matrice scalaire.

Exercice 12 : Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dont tous les coefficients sont 1 sauf les diagonaux qui valent 0. Calculer $\exp M$.

Exercice 13 ** : Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ diagonalisables tels que $\exp A = \exp B$. Montrer que $A = B$. (Indication : on pourra montrer que B est un polynôme en la matrice $\exp B$.) Est-ce encore vrai sur $\mathbb{C}$?

Exercice 14 ** : Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Déterminer $\lim\limits_k \left(I_n + \dfrac{1}{k} A\right)^k$.

Exercice 15 ** – Le théorème de Riesz : Soit E un espace vectoriel normé de dimension infinie.

1. Soit F un sous-espace vectoriel de dimension finie et $a \in E \setminus F$. Montrer qu'il existe $b \in F$ tel que $\|a - b\| = d(a, F)$.
2. En déduire qu'il existe une suite à valeur dans la boule unité de E sans sous-suite convergente.

Travaux dirigés 1 – Autour des suites géométriques matricielles

Ici, $\mathbb{K}$ désigne le corps $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ et p un entier $\geqslant 2$.

1. Déterminer successivement l'ensemble des $z \in \mathbb{C}$ tels que
   (a) $(z^n)_n$ converge ;
   (b) $\sum z^n$ converge ;
   (c) $\dfrac{1}{n} \sum\limits_{k=0}^{n-1} z^k$ converge.
2. Soit $A, B \in \mathcal{M}_p(\mathbb{K})$ semblables. Montrer que $(A^n)_n$ converge (resp. est bornée) si et seulement si $(B^n)_n$ converge (resp. est bornée).
3. On suppose que $M \in \mathcal{M}_p(\mathbb{C})$ admet une seule valeur propre λ, que $|\lambda| = 1$ et que $(M^n)_n$ est bornée. Montrer que M est une matrice scalaire. (On pourra commencer par le cas $p = 2$, puis se ramener à ce cas.)
4. Caractériser les matrices $M \in \mathcal{M}_p(\mathbb{K})$ telles que (M^n) converge vers 0.
5. (a) Soit $M \in \mathcal{M}_p(\mathbb{R})$ telle que $(M^k)_k$ converge. Montrer que sa limite est un projecteur qui commute à M.
   (b) Montrer que $(M^n)_n$ converge si et seulement si $\mathrm{Sp}_{\mathbb{C}}(M) \subset D(0,1) \cup \{1\}$, et que $\dim E_1(M) = m(1)$ où $m(1)$ est la multiplicité de 1 en tant que valeur propre. Exprimer l'image et le noyau de la limite P en fonction des espaces propres de M.
6. Caractériser les matrices $M \in \mathcal{M}_p(\mathbb{K})$ telles que $(M^n)_n$ est bornée.
7. Soit $A \in \mathcal{M}_p(\mathbb{C})$ telle que la suite $(A^n)_n$ soit bornée. On pose
$$B_n = \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^{n} A^k.$$
   (a) Montrer que (B_n) admet une valeur d'adhérence B. Montrer que B est un projecteur et que $AB = BA = B$.
   (b) Montrer que $\mathrm{Ker}\, B = \mathrm{Im}(I_p - A)$ et que $\mathrm{Im}\, B = \mathrm{Ker}(I_p - A)$.
   (c) Montrer que (B_n) converge.

(d) Déterminer les matrices $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telles que $(\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} M^k)$ converge.

8. Déterminer les matrices $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telles que $(\sum M^p)$ converge. (On pourra utiliser l'exercice 9.)

Travaux dirigés 2 – Une preuve du théorème de d'Alembert-Gauss

Soit $n \in \mathbb{N}$ et $P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$ un polynôme de $\mathbb{C}[X]$ de degré n. On suppose que P ne possède aucune racine.

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}^*$ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ 2π-périodique. On appelle *indice* de f le nombre complexe

$$I(f) = \frac{1}{2\pi i}\int_0^{2\pi} \frac{f'(t)}{f(t)}dt.$$

1. (Théorème du relèvement) Soit I un intervalle et $f : I \to$ de classe $\mathcal{C}^1$. Montrer qu'il existe $\theta : I \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$ telle que pour tout $t \in I$, $f(t) = e^{i\theta(t)}$.
2. Soit I un intervalle et $g : I \to \mathbb{C}^*$ de classe $\mathcal{C}^1$. Montrer qu'il existe $\rho : I \to \mathbb{R}_+^*$ et $\theta : I \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$ telles que $g(t) = \rho(t)e^{i\theta(t)}$ pour tout $t \in I$. (Théorème du relèvement $\mathcal{C}^1$.)
3. Justifier que $I(f)$ est un entier relatif. L'interpréter en fonction du nombre de tour que fait le support de f autour de 0 dans le sens positif. (Un tour dans le sens indirect correspond donc à l'entier -1.)
4. On pose $g_r(t) = \dfrac{P'(re^{it})re^{it}}{P(re^{it})}$ et $J(r) = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} g_r(u)du$ pour tous $r \in \mathbb{R}^+$ et $t \in [0, 2\pi]$. Montrer que pour tout $r \in \mathbb{R}^+$, $J(r) = 0$.
5. Montrer que $\displaystyle\lim_{|z|\to+\infty} \frac{P'(z)z}{P(z)} = n$.
6. Conclure.

Indications

Exercice 1. Se limiter à $n = 2$ et prendre P diagonale.

Exercice 2. Considérer module et argument.

Exercice 5.
1. Seule la séparation pose problème. C'est le cas si g s'annule sur un intervalle ouvert.
2. L'une domine toujours l'autre.

Exercice 6. 2. Réponse : $\dfrac{1}{1-|\alpha|}$

Exercice 7. La lipschitziannité de g semble suffisante. Est-elle nécessaire ?

Exercice 8. On peut même choisir une norme euclidienne.

Exercice 10. 2. Commencer par montrer que $I_x = \{\alpha \in]0, +\infty[\mid x/\alpha \in B\}$ est un intervalle non borné. Pour l'inégalité triangulaire, utiliser un barycentre.