Exercice 1 : Soit E un espace vectoriel normé.

1. Soient A et B deux parties disjointes de E avec A ouverte. Montrer que $A \cap \overline{B} = \emptyset$.
2. ♡ Soit U un ouvert non vide de E. Montrer que $\operatorname{Vect} U = E$.
3. Soit $A \subset E$. Montrer que
$$\mathrm{Fr} A = \{x \in E | \forall r > 0,\ B(x,r) \cap A \neq \emptyset \text{ et } B(x,r) \cap A^c \neq \emptyset\}.$$
4. Montrer que dans l'espace vectoriel normé produit $E \times F$, on a
$$\mathrm{Int}(A \times B) = \mathrm{Int}\, A \times \mathrm{Int}\, B, \quad \overline{A \times B} = \overline{A} \times \overline{B}$$
puis déterminer $\mathrm{Fr}(A \times B)$.
5. Quels sont les parties A de E telles que $\mathrm{Fr} A = \emptyset$?
6. Soit A une partie fermée de E. Montrer qu'il existe $f : E \to \mathbb{R}$ telle que $A = f^{-1}(\{0\})$.

Exercice 2 * : Soit A une partie convexe de E. Montrer que l'adhérence et l'intérieur (**) de A sont convexes. Donner un exemple d'un espace normé E et d'une partie convexe A de E telle que $A \neq E$ et A est dense dans E.

Exercice 3 : Soit E un espace vectoriel normé de dimension finie, $\mathcal{U}$ un ouvert dense de E et D un partie dense de E. Montrer que $\mathcal{U} \cap D$ est dense dans E. Le résultat subsiste-t-il si $\mathcal{U}$ n'est pas ouvert ?

Exercice 4 * : Soit $E = \mathcal{C}([0,1], \mathbb{R})$ muni de la norme $\|.\|_\infty$. Les parties suivantes sont-elles ouvertes ? fermées ? compactes ?

1. L'ensemble des injections de $[0,1]$ dans $[0,1]$?
2. L'ensemble des surjections de $[0,1]$ dans $[0,1]$?
3. L'ensemble des bijections de $[0,1]$ dans $[0,1]$?

Exercice 5 * : Soit V un espace euclidien. Pour chacun des ensembles suivants, déterminer s'il est fermé, borné, compact, connexe par arcs.

1. l'ensemble E_1 des projecteurs de V ;
2. l'ensemble E_2 des projecteurs orthogonaux de V (on pourra commencer par montrer qu'un projecteur p est orthogonal si et seulement si $\langle p(x) | y \rangle = \langle x | p(y) \rangle$ pour tous $x, y \in E$) ;
3. l'ensemble E_3 des symétries de V ;
4. l'ensemble E_4 des réflexions de V.

Exercice 6 * – Points isolés : Soit A une partie de E un espace vectoriel normé. Un point $x \in A$ est isolé dans A s'il existe $\varepsilon > 0$ tel que $A \cap B(a, \varepsilon) = \{a\}$; autrement dit, le singleton $\{a\}$ est ouvert dans A. Une partie de E est discrète si tous ses points sont isolés.

1. Donner un exemple de partie discrète dans $\mathbb{R}$ non fermée.
2. (*) Existe-t-il une partie discrète fermée infinie non dénombrable de $\mathbb{R}$?
3. (**) Existe-t-il une partie discrète infinie non dénombrable de $\mathbb{R}$?
4. (***) Existe-t-il une partie discrète d'adhérence non dénombrable de $\mathbb{R}$?
5. Quels sont les points isolés de l'ensemble des projecteurs dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$?
6. Soit G un sous-groupe de $(\mathbb{R}^n, +)$.
   (a) Montrer que G est discret si et seulement si $\{0\}$ est isolé dans G.
   (b) Montrer que si G est discret, alors G est fermé dans $\mathbb{R}^n$.

Exercice 7 ** : Soit $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ telle que $f(0) = 0$ et $|f'(0)| < 1$. Montrer que $\Omega = \{x \in \mathbb{R} | f^n(x) \to 0\}$ est un ouvert. (Ici, f^n est l'itéré n^{e} de f.)

Exercice 8 * : ♡

1. Soient a et b deux réels non-nuls et soit $G = a\mathbb{Z} + b\mathbb{Z}$. Montrer que G est discret (*i.e.* de la forme $\alpha\mathbb{Z}$) si et seulement si a/b appartient à $\mathbb{Q}$. En déduire que $(\cos n)_n$ est dense dans $[-1, 1]$.
2. Montrer qu'une fonction continue admettant 1 et $\sqrt{2}$ pour périodes est constante.
3. Exhiber une fonction non-constante admettant 1 et $\sqrt{2}$ pour périodes. (Justifier.)
4. Montrer $\mathbb{N} + 2\pi\mathbb{Z}$ est dense dans $\mathbb{R}$. En déduire que $(\sin n)_n$ est dense dans $[-1, 1]$ et que $(e^{in})_n$ est dense dans $\mathbb{U}$.

Exercice 9 * : Soit E, F deux $\mathbb{R}$-espaces vectoriels de dimensions finies. Soit $\varphi \in \mathcal{L}(E, F)$. Montrer que φ est surjective si et seulement si φ est ouverte, *i.e.* l'image de tout ouvert de E par φ est un ouvert de F.

Exercice 10 * : Soient $a < b$ deux réels et $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ continue telle que pour toute fonction en escalier g, $\displaystyle\int_{[a,b]} fg = 0$. Montrer que $f = 0$. (Deux méthodes.)

Exercice 11 *– le lemme de Riemann-Lebesgue : Soit f une fonction continue par morceaux sur le segment I. ♡

1. Montrer que
$$\lim_{\lambda \to +\infty} \int_I f(t) e^{i\lambda t} dt = 0$$
en utilisant la densité $\mathcal{C}^1(I, \mathbb{C})$ dans $\mathcal{C}(I, \mathbb{C})$ pour $\| \cdot \|_\infty$.

2. Montrer que
$$\lim_{\lambda\to+\infty}\int_I f(t)e^{i\lambda t}dt=0$$
en utilisant la densité des fonctions en escalier.
3. Déterminer
$$\lim_{\lambda\to+\infty}\int_I f(t)|\sin(\lambda t)|dt.$$

Exercice 12 * : Soit $\varphi:[0,1]\to[0,1]$ définie par $t\mapsto 2t(1-t)$.

1. Étudier la convergence simple et uniforme de $\varphi^{\circ n}$.
2. Montrer que l'ensemble W des polynômes à coefficients entiers est dense dans $\mathcal{C}([a,b],\mathbb{R})$ si $[a,b]\subset]0,1[$. (On pourra commencer par vérifier que $\overline{W}$ est une sous-algèbre.)

Exercice 13 ** : Montrer que tout ouvert de $\mathbb{R}$ s'écrit de manière unique comme réunion finie ou dénombrable d'intervalles ouverts disjoints.

Exercice 14 * : Donner un exemple de partie dénombrable dense de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, puis de $GL_n(\mathbb{R})$, puis de $SL_n(\mathbb{R})$.

Exercice 15 * : Soit $P\in\mathbb{C}[X]$ non constant. Montrer que l'image par P d'une partie fermée de $\mathbb{C}$ est fermée.

Exercice 16 * : Soit $A\in\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ admettant n valeurs propres distinctes. Montrer que $\chi_A(A)=0$. En déduire une nouvelle preuve du théorème de Cayley-Hamilton.

Exercice 17 : Soit C le cercle trigonométrique et $f:C\to\mathbb{R}$ une fonction continue. Montrer qu'il existe $a\in C$ tel que $f(a)=f(-a)$.

Exercice 18 * :

1. Soit $A\subset\mathbb{R}^2$ une partie convexe et $f:A\to\mathbb{R}$ une fonction continue. Montrer que $f(A)$ est un intervalle. En considérant $f:(x,y)\mapsto h(y)-h(x)$, montrer qu'une fonction h continue et injective sur un intervalle I est strictement monotone.
2. Soit I un intervalle et $f:I\to\mathbb{R}$ dérivable. En considérant $A=\{(x,y)\in I^2|x<y\}$ et $\varphi:E\to\mathbb{R}$, $\varphi(x,y)=\dfrac{f(x)-f(y)}{x-y}$, montrer que $f'(I)$ est un intervalle. (C'est le théorème de Darboux.)

Exercice 19 * :

1. Montrer que l'ensemble des matrices nilpotentes de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est connexe par arc.
2. Montrer que $SL_n(\mathbb{R})$ est connexe par arcs. Le groupe $GL_n(\mathbb{R})$ est-il connexe par arcs ?
3. Les groupes $SL_n(\mathbb{C})$ et $GL_n(\mathbb{C})$ sont-ils connexes par arcs ?

Exercice 20 :

1. Soient $(\lambda_1,\dots,\lambda_n),(a_1,\dots,a_n)\in\mathbb{R}^n$ tels que $a_1<\dots<a_n$ et $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ définie par $x\mapsto\sum_{k=1}^n\lambda_k e^{a_kx}$. On suppose que f s'annule n fois. Montrer que $\lambda_1=\dots=\lambda_n=0$.
2. Soit $(b_1,\dots,b_n)\in\mathbb{R}^n$ tel que $b_1<\dots<b_n$ et $A=(e^{a_ib_i})_{i,j}$. Montrer que A est inversible.
3. Montrer que $\det A>0$. (Utiliser un argument de connexité.)

Exercice 21 * :

1. Donner un exemple de deux parties A,B de $\mathbb{R}$ et d'une fonction $f:A\to B$ continue bijective dont la réciproque n'est pas continue.
2. Soient E, F deux espaces vectoriels normés, A une partie compacte de E et $f:A\to F$ continue et injective. Montrer que $f^{-1}:f(A)\to A$ est aussi continue.

Exercice 22 * : Soit E un espace vectoriel normé de dimension finie et K un compact de E dont 0 est un point intérieur.

1. Montrer que $A=\{u\in\mathcal{L}(E)|u(K)\subset K\}$ est un compact de $\mathcal{L}(E)$.
2. Montrer que pour tout $u\in A$, $|\det u|\leqslant 1$.

Exercice 23 * : Soit E un espace vectoriel normé de dimension finie $n\geqslant1$ et K un compact de E. Soit $F_K=\{f\in\mathcal{L}(E)|f(K)\subset K\}$. Montrer que F_K est compact si et seulement si $\operatorname{Vect}K=E$.

Exercice 24 ** : Soit $\mathcal{D}$ l'ensemble des matrices diagonalisables de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Déterminer son intérieur et son adhérence. (Pour l'intérieur, montrer que si $A_p\to B$ et $\lambda\in\operatorname{sp}(B)$, $\mathrm{d}(\lambda,\operatorname{sp}(A_p))\to0$.)

Exercice 25 * – Dépendance des racines d'un polynôme en fonction des coefficients (1) : Soit $n\in\mathbb{N}^*$ et $\Phi:\mathbb{C}^n\to X^n+\mathbb{C}_{n-1}[X]$ définie par $(\alpha_1,\dots,\alpha_n)\mapsto(X-\alpha_1)\cdots(X-\alpha_n)$.

1. Montrer que Φ est continue.
2. Soit $P\in\mathbb{C}_n[X]$ unitaire, avec $P=\sum_{k=0}^{n-1}a_kX^k+X^n$ et $Q=X^n-\sum_{k=0}^{n-1}|a_k|X^k$.
   (a) Montrer que Q admet une unique racine $\rho>0$ sur $\mathbb{R}_+^*$.

(b) Montrer que pour tout $z \in \mathbb{C}$, $|P(z)| \geqslant Q(|z|)$.

(c) Soit $\gamma_1 = 1 + \max_{0 \leqslant k \leqslant n-1} |a_k|$ et $\gamma_2 = \max(1, \sum_{k=0}^{n-1} |a_k|)$. Montrer que $\rho \leqslant \gamma_1$ et $\rho \leqslant \gamma_2$.

(d) Soit z une racine de P. Montrer que $|z| \leqslant \min(\gamma_1, \gamma_2)$.

3. Montrer que Φ est propre, *i.e.* l'image réciproque d'un compact est un compact.
4. Montrer que Φ est fermée, *i.e.* l'image d'un fermé par Φ est un fermé.
5. En déduire que l'ensemble des polynômes réels unitaires de degré n scindés sur $\mathbb{R}$ est un fermé dans l'espace des polynômes unitaires réels (ou complexes) de degré n.
6. Que peut-on en déduire pour le sous-ensemble des matrices trigonalisables de $\mathbb{R}$? Et pour celui des matrices diagonalisables ?

Exercice 26 * – Dépendance des racines d'un polynôme en fonction des coefficients (2) : On munit $\mathbb{R}[X]$ de la norme $P = \sum_k a_k X^k \mapsto \max_k |a_k| = \|P\|$.

1. Montrer que l'ensemble $\mathcal{E}$ des polynômes unitaires est un fermé.
2. Soit $P \in \mathcal{E}$ de degré n et scindé. Montrer que pour tout $z \in \mathbb{C}$, $|P(z)| \geqslant |\operatorname{Im} z|^n$.
3. Montrer que l'ensemble des polynômes scindés de $\mathcal{E}$ est fermé.

Exercice 27 ** : Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie n et $u \in \mathcal{L}(E)$. On considère pour tout $x \in E$ l'ensemble $I_x = \{P \in \mathbb{R}[X] | P(u)(x) = 0\}$.

1. Montrer l'existence de $\mu_x \in \mathbb{R}[X]$ tel que $I_x = \mu_x \mathbb{R}[X]$.
2. Montrer que l'ensemble des $x \in E$ tels que $\mu_u = \mu_x$ est un ouvert dense dans E. En déduire que u est cyclique si et seulement si $\mu_u = \chi_u$.

Exercice 28 ** : Soit E un espace vectoriel normé et f une forme linéaire sur E. Montrer que f est continue si et seulement si $\operatorname{Ker} f$ est fermé.

Exercice 29 : Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie et F un sous-espace. Montrer que $E \setminus F$ est connexe par arcs si et seulement si $\dim E - \dim F \geqslant 2$. Que dire dans le cas de $\mathbb{C}$-espaces vectoriels ?

Exercice 30 * : Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $\rho(A)$ son rayon spectral, *i.e.* $\rho(A) = \max_{\lambda \in \mathrm{Sp}_{\mathbb{C}}(A)} |\lambda|$. Pour tout $r > \rho(A)$ et tout $k \in \mathbb{N}$, on note

$$J(r,k) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} r^{k+1} e^{i(k+1)\theta} (re^{i\theta} I_n - A)^{-1} \mathrm{d}\theta.$$

(Remarque : on pourra dans ce problème remplacer la condition $r > \rho(A)$ par r assez grand ; cela ne diminue que peu son intérêt.)

1. Justifier l'existence de J.
2. Calculer $J(r,k)$.
3. En déduire que $\chi_A(A) = \dfrac{1}{2\pi} \displaystyle\int_0^{2\pi} re^{i\theta}\ {}^t\mathrm{Com}(re^{i\theta} I_n - A) \mathrm{d}\theta$.
4. En déduire une démonstration du théorème de Cayley-Hamilton.

Exercice 31 ** – Le théorème de Riesz : Soit E un espace vectoriel normé de dimension infinie et S sa sphère unité.

1. Soit F un sous-espace vectoriel de dimension finie et $a \in E \setminus F$. Montrer qu'il existe $b \in F$ tel que $\|a - b\| = d(a, F)$. En déduire qu'il existe $v \in S$ tel que $\mathrm{d}(v, F) = 1$.
2. En déduire que la boule unité de E n'est pas compacte.

Exercice 32 * : Soit E un espace euclidien et $a < b$ deux réels. Déterminer les fonctions $f \in \mathcal{C}([a,b], E)$ telles que $\| \int_a^b f \| = \int_a^b \|f\|$. (Indication : considérer une projection orthogonale.)

Exercice 33 * : Soit E un espace vectoriel normé de dimension finie.

1. Soit I un intervalle et $f : I \to E$, $g : I \to \mathbb{R}^+$ dérivables telles que $\|f'\| \leqslant g'$. Soient $a < b$ dans I. Montrer que
$$\|f(b) - f(a)\| \leqslant g(b) - g(a).$$
(Indication : considérer $A = \{x \in [a,b]\ \|f(x) - f(a)\| \leqslant g(x) - g(a) + \varepsilon(x-a)\}$.)
2. Soit $f \in \mathcal{C}^1([a,b], E)$ où $a < b$ telle que $f(a) = f(b) = 0$. Montrer que
$$\left\| \int_a^b f(u) \mathrm{d}u \right\| \leqslant \frac{(b-a)^2}{4} \|f'\|_\infty.$$

Travaux dirigés 1 – Décomposition QR

Soit $\mathcal{T} \subset GL(n, \mathbb{R})$ l'ensemble des matrices triangulaires supérieures à coefficients diagonaux strictement positifs.

1. Montrer que $\mathcal{T}$ est un sous-groupe de $GL(n, \mathbb{R})$, fermé dans $GL_n(\mathbb{R})$.
2. Montrer que l'application $g \mapsto g^{-1}$ de $GL(n, \mathbb{R})$ dans lui-même est continue.
3. Montrer que $O(n)$ est compact.

4. Montrer que l'application
$$\left\{\begin{array}{ccc} O(n)\times\mathcal{T} & \longrightarrow & GL(n,\mathbb{R}) \\ (k,t) & \longmapsto & kt \end{array}\right.$$
est un homéomorphisme, *i.e.* bijective continue de réciproque continue. (Pour la surjectivité, utiliser l'orthonormalisée de la base des colonnes de g ; pour la continuité de la réciproque, on pourra utiliser la caractérisation séquentielle et la compacité de $O(n)$.)

Travaux dirigés 2 – Adhérence et intérieur des matrices diagonalisables

Soit $\mathbb{K}=\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. On note $D_{\mathbb{K}}$ l'ensemble des matrices diagonalisables de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

1. Soit $A,B\in\mathbb{C}[X]$, $p=\deg A$ et $q=\deg B$. Montrer que l'application Φ : $\mathbb{C}_{q-1}[X]\times\mathbb{C}_{p-1}[X]\to\mathbb{C}_{p+q-1}[X]$ définie par $\Phi:(U,V)\mapsto AU+BV$ est un isomorphisme si et seulement si A et B sont premiers entre eux.
2. En déduire que l'ensemble des polynômes de $\mathbb{C}_n[X]$ à racines complexes simples est un ouvert.
3. Montrer que l'ensemble des matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ admettant n valeurs propres distinctes est un ouvert. En déduire l'intérieur de $D_{\mathbb{C}}$.
4. Déterminer l'adhérence de $D_{\mathbb{C}}$ dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.
5. Montrer que si $f\in\mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ est trigonalisable, elle l'est dans une base orthonormée. En déduire l'adhérence de l'ensemble des matrices diagonalisables de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
6. Déterminer l'intérieur de l'ensemble des matrices diagonalisables de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Travaux dirigés 3 – Topologie des classes de similitudes

On appelle classe de similitude de $A\in\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ l'ensemble $\{PAP^{-1}|P\in GL_n(\mathbb{C})\}$.

1. (Un calcul qui sert.) Soit $D=\operatorname{diag}(\lambda_1,\dots,\lambda_n)$ où $\lambda_k\in\mathbb{R}$ et $\lambda_1>\lambda_2>\cdots>\lambda_n$ et N une matrice triangulaire supérieure stricte. Étudier la convergence de $(D^{-k}ND^k)_k$.
2. Montrer qu'il n'existe aucune classe de similitude ouverte. (On pourra utiliser la trace ou considérer le polynôme caractéristique de $A+\lambda I_n$ pour λ assez petit.)
3. Montrer que la classe de similitude $\mathcal{S}(A)$ de $A\in\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ est fermée si et seulement si A est diagonalisable.
4. Montrer que la classe de similitude $\mathcal{S}(A)$ de $A\in\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ contient 0 dans son adhérence si et seulement si A est nilpotente.
5. Montrer que la classe de similitude $\mathcal{S}(A)$ de $A\in\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ est bornée si et seulement si A est scalaire.

Travaux dirigés 4 – Théorèmes de point fixe

Soit K une partie compacte non vide d'un espace vectoriel normé E de dimension finie.

1. Soit $f:K\to K$ vérifiant
$$\forall x,y\in K,\ x\neq y\Longrightarrow d(f(x),f(y))<d(x,y).$$
Montrer que f admet un unique point fixe. (Considérer $x\mapsto d(x,f(x))$.)
2. Soit $f:K\to K$ 1-lipschitzienne. On suppose K convexe. Montrer que f admet un point fixe. (On pourra considérer $f_n: x\mapsto \frac{a}{n}+(1-\frac{1}{n})f(x)$.)
3. Soit $f\in\mathcal{L}(E)$ continu tel que $f(K)\subset K$. On suppose K convexe.
   (a) Montrer que f admet un point fixe dans K. (Indication : on pourra considérer $x_n=\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}f^k(a)$ où $a\in K$.)
   (b) Soit $g\in\mathcal{L}(E)$ continu tel que $f(K)\subset K$ et commutant avec f. Montrer que f et g possèdent un point fixe commun.

Travaux dirigés 5 – Suites équiréparties

Soit (u_n) une suite dans $[0,1]$ et $E=\mathcal{CM}([0,1],\mathbb{R})$. On le munit de la norme $\|.\|_\infty$. Pour toute fonction $f\in E$, on appelle somme de Birkhoff d'indice $n\geqslant 1$ la quantité
$$S_n(f)=\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}f(u_k).$$
Pour tout intervalle $I\subset[0,1]$ et tout entier $n\geqslant 1$, on note
$$A_{I,n}=\operatorname{Card}\{k\in[\![0,n-1]\!]|\ u_k\in I\}.$$
On appelle densité de (u_n) par rapport à I, si elle existe, la quantité $d_I=\lim\frac{1}{n}A_{I,n}$. Enfin, soit V_u l'ensemble des fonctions telles que $(S_n(f))_n$ converge vers $\int_0^1 f$.

1. Montrer que V_u est un sous-espace vectoriel fermé de E pour la norme de la convergence uniforme.
2. Soit $f\in E$. On suppose que pour tout $\varepsilon>0$, il existe $\varphi,\psi\in V_u$ telles que
$$\varphi\leqslant f\leqslant\psi \quad\text{et}\quad \|\psi-\varphi\|_1\leqslant\varepsilon.$$
Montrer que $f\in V_u$.

On veut montrer l'équivalence entre les trois propriétés suivantes :

(a) pour tout intervalle $I \subset [0,1]$, d_I existe et vaut $\operatorname{long}(I)$;

(b) pour toute fonction $f \in E$, $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n(f) = \displaystyle\int_0^1 f$;

(c) pour tout entier $p \in \mathbb{N}^*$, on a $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=0}^{n} e^{i2\pi p u_k} = 0$.

On admettra le théorème de Weierstrass trigonométrique : pour toute fonction continue 1-périodique à valeurs complexes et tout $\varepsilon > 0$, il existe $P \in \mathbb{C}[X]$ tel que $\sup\limits_{t\in[0,1]} |f(t) - P(e^{i2\pi t})| \leqslant \varepsilon$.

3. Trouver le lien entre χ_I et $A_{I,n}$. En déduire que (b) implique (a).
4. Reconnaitre l'espace vectoriel engendré par les fonctions caractéristiques d'intervalle dans $[0,1]$. En déduire l'équivalence entre (a) et (b).
5. Montrer que (b) implique (c). (Considérer les parties réelles et imaginaires.)
6. On se propose de montrer que (c) implique (a). On suppose donc (c).
   (a) Soit $F = \{f \in \mathcal{C}([0,1],\mathbb{R}) | f(0) = f(1)\}$. Déterminer $\overline{F}$.
   (b) Montrer que F est inclus dans V_u.
   (c) Montrer que pour tout segment $I \subset [0,1]$, $\chi_I \in \overline{F}$.
   (d) En déduire que (c) implique (a).

   On conclut par une application.
7. Montrer que la suite $(\{n\} = n\theta - \lfloor n\theta \rfloor)_n$ est équirépartie si et seulement si $\theta \notin \mathbb{Q}$.
8. Soit $c \in [\![1,9]\!]$. Déterminer la fréquence des entiers $n \in \mathbb{N}$ tels que c est le premier chiffre décimal de 2^n.

Travaux dirigés 6 – L'algèbre de Lie d'un groupe de Lie

1. Montrer qu'une partie compacte de $GL_n(\mathbb{R})$ stable par produit est un sous-groupe. (Considérer la suite $(M^n)_{n\geqslant 1}$.)
2. Algèbre de Lie : propriétés algébriques.

   Une algèbre de Lie est un espace vectoriel V muni d'une loi de composition interne bilinéaire alternée, généralement notée $(u,v) \mapsto [u,v]$ et appelée crochet, et vérifiant pour tous $u, v, w \in V$
   $$[u,[v,w]] + [v,[w,u]] + [w,[u,v]] = 0,$$
   connue sous le nom d'identité de Jacobi.

   (a) Montrer que $\mathcal{G} = \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) | \operatorname{Tr} M = 0\}$ est une algèbre de Lie pour le crochet $[A,B] = AB - BA$.
   (b) Montrer que $\mathbb{R}^3$ muni du produit vectoriel usuel est une algèbre de Lie.
3. Un bon chemin est une application $C : t \mapsto (c_{i,j}(t))_{i,j}$ dérivable définie sur un voisinage $]-\varepsilon,\varepsilon[$ de 0 et à valeurs dans $SL_n(\mathbb{R})$ telle que $C(0) = I_n$. Soit $\mathcal{H}$ l'algèbre de Lie du groupe $SL_n(\mathbb{R})$, *i.e.* l'ensemble des matrices des dérivées en 0 des bons chemins, soit encore
   $$\mathcal{H} = \{C'(0) \,|\, C \text{ est un bon chemin}\}.$$
   (a) Soit C_1, C_2 deux bons chemins. Montrer que $C_1C_2 : t \mapsto C_1(t)C_2(t)$ est un bon chemin et calculer sa dérivée en 0. En déduire que $\mathcal{H}$ est stable par addition.
   (b) Montrer que $\mathcal{H}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
   (c) Montrer que $\mathcal{H}$ est une algèbre de Lie pour le crochet défini à la question (**??**). (Indication : on pourra commencer par montrer que pour tout $G \in SL_n(\mathbb{R})$ et tout $M \in \mathcal{H}$, $GMG^{-1} \in \mathcal{H}$.)
   (d) Montrer que $\mathcal{H}$ est l'algèbre de Lie $\mathcal{G}$ introduite à la question (**??**). (Indication : on pourra utiliser les matrices élémentaires de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.)
4. Déterminer l'algèbre de Lie de $SO(n)$.
5. Déterminer l'algèbre de Lie $\mathcal{N}$ du groupe T des matrices triangulaires supérieures possédant seulement des 1 sur la diagonale. Montrer que $\exp : \mathcal{N} \to T$ est un homéomorphisme. (Utiliser la fonction $x \mapsto \ln(1+x)$.)
6. Soit $\varphi : \mathbb{R} \to GL_n(\mathbb{R})$ un morphisme dérivable 2π-périodique. On note H l'image de $\mathbb{R}$.
   (a) Montrer que H est un sous-groupe compact de $SL_n(\mathbb{R})$.
   (b) Montrer que les valeurs propres de tout $M \in H$ sont de module 1.
   (c) Achever la description de φ.

Indications

Exercice 1. 2. $\operatorname{Vect} U$ est stable par homothétie et une boule ouverte contient des (petites) bases.
3. Penser aux espaces de fonctions.
4. On a $\operatorname{Fr}(A \times B) = \left(\overline{A} \times \operatorname{Fr} B\right) \cup \left(\operatorname{Fr} A \times \overline{B}\right)$

Exercice 6.
1. Reprendre un exemple du cours.
2. Remarquer qu'une partie discrète fermée d'un compact est finie.
3. Choisir une boule assez petite autour de chaque point. Il contient un rationnel qui n'est dans aucune des autres boules considérées.
4. Les arbres binaires infinis ont un nombres infini non dénombrable de branches, pour un nombre fini de points à profondeur fixée.
5. Les points I_n et 0.

Exercice 7. Commencer par montrer que $f^n(x) \to 0$ dès que x est assez proche de 0, puis que $x \in \Omega$ si et seulement s'il existe un entier n tel que $f^n(x)$ appartient à un ouvert contenant 0 fixé.

Exercice 8. 1. On pourra utiliser qu'un sous-groupe d'un groupe discret est discret.
4. On sait déjà que $\mathbb{Z} + 2\pi\mathbb{Z}$ est dense dans $\mathbb{R}$. Utiliser que l'ensemble $p + 2\pi\mathbb{Z}$ intersecté avec $]0, \varepsilon[$ est fini.

Exercice 9. Il existe des bases dont les vecteurs sont arbitrairement petits.

Exercice 10. On peut au choix utiliser une fonction pic, ou un argument de densité couplé à la continuité de $g \mapsto \displaystyle\int_a^b fg$ sur un espace normé convenable.

Exercice 11. 3. Le dessin suggère que la limite est $\dfrac{2}{\pi}\displaystyle\int_a^b f$. Par soustraction, il suffit de vérifier que $\displaystyle\int_a^b |\sin \lambda t)| \mathrm{d}t$ tend vers $\dfrac{2(b-a)}{\pi}$. Faire le changement de variable $x = \lambda t$ et découper en intervalle où sin est de signe constant.

Exercice 12.
1. Il s'agit d'étudier une suite récurrente.
2. Commencer par montrer que les fonctions constantes rationnelles sont dans $\overline{W}$ puis utiliser $\mathbb{Q}[X]$.

Exercice 13. Montrer que les composantes connexes sont ouvertes et qu'elles contiennent toutes un rationnel.

Exercice 14. Il existe une application continue surjective de $GL_n(\mathbb{R})$ dans $SL_n(\mathbb{R})$.

Exercice 15. Commencer par montrer que $P^{-1}(B_f(z, r))$ est un compact de $\mathbb{C}$.

Exercice 16. Montrer la continuité de $A \mapsto \chi_A(A)$.

Exercice 17. Paramétrer le cercle trigonométrique.

Exercice 18. 1. Un convexe est connexe par arcs, et un triangle est convexe.

Exercice 19.
1. Un ensemble étoilé par rapport à un point est connexe par arcs.
2. Décomposer en produit de matrices élémentaires.

Exercice 21. On peut prendre $A = [0, 1[\cup[2, 3]$.

Exercice 22.
1. Pour le caractère fermé, utiliser l'application bilinéaire $(u, x) \in \mathcal{L}(E) \times E \mapsto u(x)$. Pour le caractère borné, utiliser une base de E incluse dans K.
2. A est stable par composition.

Exercice 23. Pour $\Rightarrow$, raisonner par contraposée : ça devient un exercice d'algèbre linéaire. Pour $\Leftarrow$, utiliser une base de E incluse dans F_K.

Exercice 28. Pour le sens difficile, considérer une suite $(x_n)_n$ sur la boule unité de E telle que $f(x_n) \to +\infty$.

Solutions

Exercice 4. 1. L'ensemble n'est pas ouvert car son complémentaire en'est pas fermé : prendre $f(x) = x$ sur $[0, 1 - 1/k]$ et constante sur $[1 - 1/k, 1]$.

Il n'est pas fermé car la fonction linéaire $x \mapsto \varepsilon x$ converge uniformément vers 0. En particulier, il n'est pas compact.

2. L'ensemble n'est pas ouvert car son complémentaire n'est pas fermé : le premier exemple précédent le prouve.

   Il est fermé : soit (f_k) suite de fonctions surjective converge vers g. Par l'absurde : si g non surjective. Par le TVI, on a 0 ou 1 qui n'appartient pas à l'image de g. Si c'est 1 (par symétrie). Soit $x = \max g$. Alors par convergence uniforme de (f_k), on a $f_k(t) \leqslant (1 + x)/2$ pour tout k assez grand.

   Il n'est pas compact : itérer la fonction tente.

3. Il n'est pas ouvert car son complémentaire n'est pas fermé : prendre la fonction constante 1 sur $[0, 1/k]$ puis affine sur $[1/k, 1]$ avec $f(1) = 0$.

   Il n'est pas non plus fermé : prendre f_k affine sur $[0, 1/2]$ et $[1/2, 1]$ telle que $f_k(0) = 0$, $f_k(1/2) = 1/k$ et $f_k(1) = 1$.

Exercice 1. (TD 1 - q4) Soit (e_j) la base canonique de $\mathbb{R}^n$, c_j la j-ième colonne de g. Soit (u_j) l'orthonormalisée de (c_j) par le procédé de Schmidt. Par définition, pour chaque j, il existe des réels $a_{1,j}, a_{2,j}, \ldots, a_{j,j}$ tels que $c_j = a_{1,j}u_1 + a_{2,j}u_2 + \cdots a_{j,j}u_j$. On définit $k \in \mathcal{L}(E)$ par $k(e_j) = u_j$. On a donc $k \in O(n)$ car envoie une base orthonormée sur une base orthonormée. En posant $t = k^{-1}g$, on a pour tout j que $t(e_j) = a_{1,j}e_1 + a_{2,j}e_2 + \cdots a_{j,j}e_j$. Donc $t \in \mathcal{T}$.