# CHAPITRE 3

# INTÉGRALES GÉNÉRALISÉES

Dans tout ce chapitre, $a$ et $b$ appartiennent à $\overline{\mathbb{R}}$ et $I$ est un intervalle de borne inférieure $a$ et borne supérieure $b$. On note aussi $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

## I Intégrales impropres

### 1 Définitions

**Définition** *Soit $I$ un intervalle et $f : I \to \mathbb{C}$. On dit que $f$ est continue par morceaux si sa restriction à tout segment inclus dans $I$ est continue par morceaux.*

**Exemple** Les fonctions partie entière $x \mapsto E(x) = \lfloor x \rfloor$ et partie fractionnaire $x \mapsto \{x\} = x - E(x)$ sont continues par morceaux sur $I = \mathbb{R}$.

**Proposition** *L'ensemble $\mathcal{CM}(I, \mathbb{K})$ des fonction continues par morceaux de $I$ dans $\mathbb{K}$ est une $\mathbb{K}$-algèbre.*

**Schéma de preuve** ◀ Si $f$ et $g$ sont c.m. il existe une subdivision adaptée aux deux. ▶

**Remarque** Une composée de fonctions c.m. n'est pas toujours c.m., comme le montre l'exemple de $x \mapsto E(x \sin \frac{1}{x})$ sur $\mathbb{R}$ (prolongée par 0 en 0) qui a une infinité de points de discontinuité sur tout segment $[-\alpha, \alpha]$.

Rappel : si $f : I \to \mathbb{C}$ est continue par morceaux et que $x_0 \in I$, alors $x \mapsto \int_{x_0}^{x} f(t)dt$ est continue sur $I$. Elle n'est pas dérivable, sauf si $f$ est continue.

**Définition**

1. *Soient $a \in \mathbb{R}$, $b \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ avec $b > a$. Soit $f : [a, b[ \to \mathbb{C}$ continue par morceaux. On dit que l'intégrale impropre $\int_a^b f(t)dt$ converge si $x \mapsto \int_a^x f(t)dt$ converge en $b^-$. On note $\int_a^b f(t)dt$ ou $\int_a^b f$ la limite.*
   *(On a une définition analogue sur $]a, b]$, $a \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ et $b \in \mathbb{R}$. )*
2. *Soient $a \in \mathbb{R}$, $b \in \overline{\mathbb{R}}$ avec $b > a$ et $f : ]a, b[ \to \mathbb{C}$ continue par morceaux. L'intégrale $\int_a^b f(t)dt$ converge si $\int_a^c f(t)dt$ et $\int_c^b f(t)dt$ convergent où $a < c < b$ ; ceci ne dépend pas du choix de $c$. On note $\int_a^b f(t)dt = \int_a^b f$ la limite.*

**Exemple**

1. L'intégrale $\displaystyle\int_0^1 \ln t \; dt$ converge.
2. Les intégrales $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{dt}{t}$ et $\displaystyle\int_0^{+\infty} \cos t \; dt$ divergent.
3. (Intégrale de Dirichlet) L'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t} dt$ converge. (Sa valeur, classique, est $\pi/2$.) Elle est faussement impropre en 0.
4. (Intégrale de Gauss) L'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2} dt$ converge. (Sa valeur, classique, est $\sqrt{\pi}$.)
5. On a $\displaystyle\lim_{A\to+\infty} \int_{-A}^{A} \sin t \; dt = 0$, et pourtant $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \sin t \; dt$ diverge.

**Remarques**

1. Si $f : [a, b[\to \mathbb{C}$ continue admet un prolongement par continuité en $b$ (et donc $b \in \mathbb{R}$), l'intégrale $\displaystyle\int_a^b f(t)dt$ est dite *faussement impropre* ; elle converge.
2. Si $f : [a, b] \to \mathbb{C}$ est c.m., alors $\displaystyle\int_{[a,b]} f$ et $\displaystyle\int_{[a,b[} f$ convergent et sont égales. En particulier, pour étudier la convergence de $\displaystyle\int_I f$, on peut toujours supposer que $I$ est un intervalle ouvert.
3. Si $f : [a, b[\to \mathbb{C}$ est continue, de primitive $F$, alors la convergence de $\displaystyle\int_a^b f$ équivaut à la convergence en $b$ de $F$.
4. Contrairement à ce qui se passe pour les séries, on peut avoir $\displaystyle\int_a^{+\infty} f$ converge sans que $f$ tende vers 0 en $+\infty$. Il n'y a pas de divergence grossière pour les intégrales impropres.

## 2 Propriétés

**Proposition (Chasles)** *Soit* $\displaystyle\int_a^b f(t)dt$ *une intégrale impropre convergente. Alors pour tout* $c \in \overline{\mathbb{R}}$, $a \leqslant c \leqslant b$, *on a*

$$\int_a^b f(t)dt = \int_a^c f(t)dt + \int_c^b f(t)dt.$$

**Proposition (Linéarité)** *Soient* $\displaystyle\int_a^b f(t)dt$ *et* $\displaystyle\int_a^b g(t)dt$ *deux intégrales impropres convergentes et* $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$. *Alors*

$$\int_a^b (\lambda f(t) + \mu g(t))dt = \lambda \int_a^b f(t)dt + \mu \int_a^b g(t)dt.$$

**Proposition** *Soit* $f : I \to \mathbb{C}$ *continue. On suppose que* $\displaystyle\int_a^b f$ *converge. Alors la dérivée de* $x \mapsto \displaystyle\int_a^x f$ *(resp.* $x \mapsto \displaystyle\int_x^b f$*) est* $f(x)$ *(resp.* $-f(x)$*).*

**Proposition** *Soient* $\int_a^b f(t)dt$ *et* $\int_a^b g(t)dt$ *deux intégrales impropres convergentes où* $f$ *et* $g$ *sont à valeurs réelles. On suppose que* $f \leqslant g$ *sur* $]a,b[$. *Alors* $\int_a^b f(t)dt \leqslant \int_a^b g(t)dt$.

**Remarque** On a aussi $\overline{\int_a^b f(t)dt} = \int_a^b \overline{f(t)}dt$.

# II Fonctions intégrables

## 1 Fonctions positives intégrables

**Définition** *Soit* $I$ *un intervalle de* $\mathbb{R}$. *Une fonction* $f : I \to \mathbb{R}^+$ *est dite intégrable si elle est continue par morceaux et si l'intégrale* $\int_I f$ *converge.*

**Remarque** Vérifier l'intégrabilité pour une fonction positive est essentiellement un problème *local* : il faut d'abord étudier le caractère c.m. puis l'intégrabilité au voisinage des bornes.

**Proposition** *Soit* $f : I \to \mathbb{R}^+$ *continue telle que* $\int_I f = 0$ *et* $I$ *non trivial. Alors* $f = 0$.

**Proposition** *Soient* $I = [a,b[$ *et* $f, g : I \to \mathbb{R}^+$ *continues par morceaux. On suppose que* $f \leqslant g$, *ou que* $f = O(g)$, *ou que* $f \sim g$ *au voisinage de* $b$. *Si* $g$ *est intégrable, alors* $f$ *aussi.*

**Proposition** *(Fonctions de référence) Soit* $\alpha \in \mathbb{R}$.

1. *L'intégrale* $\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^\alpha}$ *converge si et seulement si* $\alpha > 1$.
2. *L'intégrale* $\int_0^1 \frac{dt}{t^\alpha}$ *converge si et seulement si* $\alpha < 1$.
3. *L'intégrale* $\int_0^{+\infty} e^{\alpha t}dt$ *converge si et seulement si* $\alpha < 0$.

**Proposition** *(Théorème de comparaison) Soit* $f : [a,b[ \to \mathbb{R}^+$ *continue par morceaux.*

1. *On suppose que* $b \in \mathbb{R}$ *et qu'il existe* $\alpha \in \mathbb{R}$ *tel que* $f(x) = O\left(\frac{1}{(b-x)^\alpha}\right)$ *au voisinage de* $b$. *Si* $\alpha < 1$, *alors* $f$ *est intégrable.*
2. *On suppose que* $b \in \mathbb{R}$ *et qu'il existe* $\alpha \in \mathbb{R}$ *tel que* $f(x) \sim \frac{1}{(b-x)^\alpha}$ *au voisinage de* $b$. *Alors* $f$ *est intégrable si et seulement si* $\alpha < 1$.
3. *On suppose* $b = +\infty$ *et qu'il existe* $\alpha \in \mathbb{R}$ *tel que* $f(x) = O\left(\frac{1}{x^\alpha}\right)$ *au voisinage de* $b$. *Si* $\alpha > 1$, *alors* $f$ *est intégrable.*
4. *On suppose* $b = +\infty$ *et qu'il existe* $\alpha \in \mathbb{R}$ *tel que* $f(x) \sim \frac{1}{x^\alpha}$ *au voisinage de* $b$. *Alors* $f$ *est intégrable si et seulement si* $\alpha > 1$.

**Exemple**

1. La fonction $t \mapsto 1/t^\alpha$ n'est jamais intégrable sur $]0,+\infty[$.
2. La fonction $t \mapsto \frac{1}{1+t^2}$ est intégrable sur $\mathbb{R}$.

3. Une fonction continue intégrable peut ne pas être bornée : prendre $f : [2, +\infty[ \to \mathbb{R}$ affine sur les intervalles $[n, n + 1/n^3]$, $[n + 1/n^3, n + 2/n^3]$ et $[n + 2/n^3, n + 1]$ et telle que $f(n) = f(n + 2/n^3) = 0$ et $f(n + 1/n^3) = n$ pour tout entier $n \geqslant 2$.
4. La fonction $t \mapsto \dfrac{|\sin t|}{t}$ n'est pas intégrable sur $\mathbb{R}^+$. (Intégrer sur $[n\pi, (n + 1)\pi]$ et minorer le dénominateur par une constante.)
5. La fonction $t \mapsto e^{-t^2}$ est intégrable sur $\mathbb{R}$ car est continue sur $\mathbb{R}$ et $e^{-t^2} = o(1/t^2)$ en $\pm\infty$.

## 2 Fonctions complexes intégrables

On rappelle que si $f : I \to \mathbb{R}$, on note $f^+(x) = \max(f(x), 0)$ (partie positive de $f$) et $f^-(x) \max(-f(x), 0)$ (opposée de la partie négative de $f$). On a ainsi $|f| = f^+ + f^-$ et $f = f^+ - f^-$.

**Lemme** 1. *Soit $f : I \to \mathbb{R}$ continue par morceaux. Alors $f^+, f^-$ et $|f|$ sont continues par morceaux.*

2. *Soit $f : I \to \mathbb{C}$ continue par morceaux. Alors $\operatorname{Re} f, \operatorname{Im} f$ et $|f|$ sont continues par morceaux.*

**Définition** *Soit $f : I \to \mathbb{C}$. On dit que $f$ est intégrable (ou que l'intégrale $\displaystyle\int_I f$ est absolument convergente) si $f$ est continue par morceaux et $|f|$ est intégrable.*

**Exemple** Une fonction continue par morceaux sur un segment est intégrable.

**Méthode :** Pour montrer qu'une fonction est intégrable, on majore son module.

**Proposition** *Soit $f : I \to \mathbb{C}$ intégrable. Alors l'intégrale $\displaystyle\int_I f$ converge.*

**Remarques**

1. Si $I$ est un intervalle borné et $f : I \to \mathbb{C}$ est c.m. bornée, alors $\displaystyle\int_I f$ est absolument convergente donc convergente. Par exemple, $\displaystyle\int_0^1 \sin\frac{1}{t}\, dt$ est absolument convergente.
2. Soit $f : [a, +\infty[ \to \mathbb{C}$ qui converge vers $l$ en $+\infty$. Si $\displaystyle\int_a^{+\infty} f$ converge, alors $l = 0$. Bien sûr, la réciproque n'est pas vraie en général : on peut avoir $\lim\limits_{+\infty} f = 0$ sans que $\displaystyle\int_a^{+\infty} f$ converge.

**Exemple**

1. La fonction $t \mapsto \dfrac{\ln t}{\sqrt[3]{t^2 - t - 2}}$ est intégrable sur $]0, 2[$.
2. Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. La fonction $t \mapsto (\tan t)^\alpha$ est intégrable sur $]0, \pi/2[$ si et seulement $|\alpha| < 1$.
3. Soit $n \in \mathbb{N}$. Alors $t \mapsto (\ln t)^n$ est intégrable sur $]0, 1]$ et $\displaystyle\int_0^1 (\ln t)^n dt = (-1)^n n!$.
4. L'intégrale de Dirichlet $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\, dt$ est l'exemple typique d'intégrale convergente mais pas absolument convergente.

## 3 Propriétés

La relation de Chasles et la linéarité proviennent des propriétés des intégrales impropres.

**Proposition** *On note $\mathcal{L}^1(I,\mathbb{K})$ l'ensemble des fonctions à valeurs dans $\mathbb{K}=\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ intégrables. C'est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.*

**Proposition (Inégalité triangulaire)** *Si $f,g \in \mathcal{L}^1(I,\mathbb{K})$, alors*

$$\int_I |f+g| \leqslant \int_I |f| + \int_I |g|.$$

**Proposition (Inégalité de la moyenne)** *Soit $f : I \to \mathbb{K}$ intégrable. Alors*

$$\left|\int_I f\right| \leqslant \int_I |f|.$$

**Proposition** *Si $f : I \to \mathbb{K}$ est intégrable et que $J$ est un intervalle inclus dans $I$, alors la restriction de $f$ à $J$ est intégrable et $\displaystyle\int_J f = \int_I f \cdot \chi_J$.*

**Proposition (Inégalité de Cauchy-Schwarz)** *Soit $f,g : I \to \mathbb{K}$ c.m. telles que $|f|^2$ et $|g|^2$ sont intégrables. Alors $fg$ est intégrable et*

$$\left|\int_I fg\right| \leqslant \left(\int_I |f|^2.\right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_I |g|^2.\right)^{\frac{1}{2}}$$

## 4 Techniques usuelles

### a Intégration par parties

On note, lorsque cela existe, $[fg]_a^b = \lim\limits_{b^-} f - \lim\limits_{a^+} f$.

**Proposition** *Soit $f,g : I \to \mathbb{C}$ de classe $\mathcal{C}^1$. Si parmi $[fg]_a^b$, $\displaystyle\int_a^b f'g$ et $\displaystyle\int_a^b fg'$ deux d'entre elles existent, alors la troisième aussi et $\displaystyle\int_a^b f'g = [fg]_a^b - \int_a^b fg'$.*

**Exemples**

1. Une intégration par partie ne préserve pas le caractère intégrable : $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t} dt = \int_0^{+\infty} \frac{\sin^2 t}{t^2} dt$ avec $\dfrac{\sin t}{t}$ non intégrable sur $\mathbb{R}^+$ alors que $\dfrac{\sin^2 t}{t^2}$ l'est.
2. Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. L'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{e^{it}}{t^\alpha} \mathrm{d}t$ converge ssi $\alpha > 0$ et converge absolument ssi $\alpha > 1$, et de même pour $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\sin t}{t^\alpha} \mathrm{d}t$ et $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\cos t}{t^\alpha} \mathrm{d}t$.
3. On a $\displaystyle\int_0^1 t^k \ln^k t dt = \frac{(-1)^k k!}{(k+1)^{k+1}}$.

### b Changement de variables

**Proposition** *Soit $I, J$ deux intervalles, $f : I \to \mathbb{C}$ continue, $\varphi : J \to I$ une bijection de classe $\mathcal{C}^1$. Alors*
- $\displaystyle\int_I f$ *converge si et seulement si* $\displaystyle\int_J (f \circ \varphi) \cdot \varphi'$ *converge ;*
- $f$ *est intégrable sur $I$ si et seulement si $(f \circ \varphi) \cdot \varphi'$ l'est sur $J$.*

*Dans les deux cas, si $J$ a pour bornes $a$ et $b$,* $\displaystyle\int_{\lim_a \varphi}^{\lim_b \varphi} f(t)dt = \int_a^b f(\varphi(t))\varphi'(t)dt.$

**Schéma de preuve** ◀ Écrire la formule du changement de variable sur $[\alpha, \beta] \subset J$ pour l'intégrale de Riemann et faire tendre les bornes vers $\inf I$ et $\sup I$. ▶

**Remarque** La technique du changement de variable est un moyen très efficace pour trouver un équivalent d'une intégrale à paramètre (tout comme celle de l'intégration par parties).

**Exemple**

1. Déterminons un équivalent de $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{dt}{(1+t^2)^n}$.
2. Déterminons un équivalent en $+\infty$ de $x \mapsto \displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{2^k + x}$.

### c Intégration des relations de comparaisons

**Proposition** *Soit $f : [a, b[ \to \mathbb{C}$ continue par morceaux et $\varphi : [a, b[ \to \mathbb{R}^+$ intégrable.*

1. *Si $f = O(\varphi)$ au voisinage de $b$, alors* $\displaystyle\int_x^b f(t)dt = O\left(\int_x^b f(t)dt\right)$ *en $b$.*
2. *Si $f = o(\varphi)$ au voisinage de $b$, alors* $\displaystyle\int_x^b f(t)dt = o\left(\int_x^b f(t)dt\right)$ *en $b$.*

**Proposition** *Soit $f : [a, b[ \to \mathbb{C}$ continue par morceaux et $\varphi : [a, b[ \to \mathbb{R}^+$ c.m.* non-intégrable.

1. *Si $f = O(\varphi)$ au voisinage de $b$, alors* $\displaystyle\int_a^x f(t)dt = O\left(\int_a^x \varphi(t)dt\right)$ *en $b$.*
2. *Si $f = o(\varphi)$ au voisinage de $b$, alors* $\displaystyle\int_a^x f(t)dt = o\left(\int_a^x \varphi(t)dt\right)$ *en $b$.*

**Proposition** *Soit $f, g : [a, b[ \to \mathbb{R}^+$ continues par morceaux, $f \sim g$ au voisinage de $b$.*

1. *Si $g$ est intégrable, $f$ aussi et* $\displaystyle\int_x^b f(t)dt \sim \int_x^b g(t)dt$ *en $b$.*
2. *Si $g$ n'est pas intégrable, $f$ non plus et* $\displaystyle\int_a^x f(t)dt \sim \int_a^x g(t)dt$ *en $b$.*

**Exemple**

1. $\displaystyle\int_x^{+\infty} e^{-t^2} dt = o(e^{-\alpha t})$ pour tout $\alpha \in \mathbb{R}^+$ en $+\infty$.
2. $\displaystyle\int_0^x e^{t^2} dt \sim \frac{e^{x^2}}{2x}$ en $+\infty$.

# III Intégrales dépendant d'un paramètre

## 1 Le théorème de convergence dominée

Une suite de fonctions $(f_n) \in (\mathbb{C}^I)^{\mathbb{N}}$ converge simplement si pour tout $x \in I$, la suite $(f_n(x))_n$ converge.

Le théorème (fondamental) suivant est admis.

**Proposition (Théorème de convergence dominée)** *Soit $I$ un intervalle de $\mathbb{R}$, $(f_n)_n$ une suite de fonctions complexes continues par morceaux sur $I$. On suppose que*

1. *$(f_n)$ converge simplement vers une fonction $g$ continue par morceaux ;*
2. *il existe une fonction $\varphi : I \to \mathbb{R}^+$ intégrable sur $I$ et indépendante de $n$ telle que pour tout $n$ et tout $t \in I$, $|f_n(t)| \leqslant \varphi(t)$.*

*Alors $g$ est intégrable sur $I$ et $\displaystyle\int_I g(t)dt = \lim_{n\to+\infty} \int_I f_n(t)dt$.*

**Remarques**

1. Graphiquement, la condition de domination affirme que les courbes représentatives des $|f_n|$ sont en-dessous d'une fonction intégrable fixée.
2. En considérant des sommes partielles, ce théorème s'applique aussi aux séries de fonctions.
3. La condition "$g$ c.m.“ n'a pas l'importance de l'hypothèse de domination : elle est due au cadre limité du programme.

**Exemple**

1. (Domination par une fonction constante) Soit $I_n = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n t\mathrm{d}t$. Alors $I_n \to 0$.
2. Un contre-exemple : si $f_n(x) = n^2 x e^{-nx}$ pour $x \geqslant 0$, alors $f_n \xrightarrow{CS} 0$ mais $\displaystyle\int_{\mathbb{R}^+} f_n \to 1$.
3. (Domination par la limite) Montrons que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \int_0^n \left(1-\frac{x}{n}\right)^n dx = \int_0^{+\infty} e^{-x}dx = 1$.
4. (Intégrale de Gauss) Pour la même raison, $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \int_0^n \left(1-\frac{x^2}{n}\right)^n \mathrm{d}x = \int_0^{+\infty} e^{-x^2}\mathrm{d}x$.
   Or $\displaystyle\int_0^n \left(1-\frac{x^2}{n}\right)^n \mathrm{d}x = \sqrt{n}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2n+1} t \ \mathrm{d}t \sim \sqrt{\pi}/2$. D'où $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} \ \mathrm{d}x = \sqrt{\pi}$.

**Proposition (Théorème de convergence dominée − version continue)**
*Soit $I$ un intervalle de $\mathbb{R}$, $A$ une partie de $\mathbb{R}$, $(f_\lambda)_{\lambda\in A}$ une famille de fonctions complexes continues par morceaux sur $I$ et $a \in \overline{\mathbb{R}}$ adhérent à $A$. On suppose que*

1. *$(f_\lambda)$ converge simplement vers une fonction $g$ continue par morceaux lorsque $\lambda \to a$ ;*
2. *il existe une fonction $\varphi : I \to \mathbb{R}^+$ intégrable sur $I$ telle que pour tout $\lambda \in A$ et tout $t \in I$, $|f_\lambda(t)| \leqslant \varphi(t)$.*

*Alors $g$ est intégrable sur $I$ et $\displaystyle\int_I g(t)dt = \lim_{\lambda\to a} \int_I f_\lambda(t)dt$.*

**Schéma de preuve ◀** On utilise la caractérisation séquentielle de la continuité, qui permet de se ramener au théorème de convergence dominée précédent. ▶

## 2 Continuité d'une intégrale à paramètre

**Proposition (Théorème de continuité sous l'intégrale)**
*Soit $I$ un intervalle, $A$ une partie de $\mathbb{R}$ et $f : A \times I \to \mathbb{C}$. On suppose*

1. *pour tout $x \in A$, $t \mapsto f(x,t)$ est continue par morceaux ;*
2. *pour tout $t \in I$, $x \mapsto f(x,t)$ est continue ;*
3. *(hypothèse de domination) il existe une fonction $\varphi : I \to \mathbb{R}^+$ intégrable telle que pour tout $(x,t) \in A \times I$, $|f(x,t)| \leqslant \varphi(t)$.*

*Alors l'application $h : A \to \mathbb{C}$ définie par $h(x) = \int_I f(x,t)dt$ est continue sur $A$.*

**Schéma de preuve** ◀ On applique le théorème de convergence dominée (version continue) à $f_x : t \mapsto f(x,t)$. Lorsque $x \to x_0 \in A$, on a $\int_I f(x,t)\mathrm{d}t \to \int_I f(x_0,t)\mathrm{d}t$. ▶

### Remarques

1. Bien remarquer que la fonction de domination est *indépendante de $x$*.
2. La continuité étant une propriété locale, on peut remplacer le 3. par :
   3 bis. pour tout $x_0 \in A$, il existe une fonction $\varphi : I \to \mathbb{R}^+$ intégrable et un $h > 0$ tel que, en posant $V = A \cap [x_0 - h, x_0 + h]$, pour tout $(x,t) \in V \times I$, $|f(x,t)| \leqslant \varphi(t)$.

**Exemple** Soit $x_0 \geqslant 0$ et $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ c.m. telle que $t \mapsto f(t)e^{-x_0 t}$ est intégrable sur $\mathbb{R}^+$. On note $\mathcal{L}(f)(x) = \int_0^{+\infty} f(t)e^{-xt}\mathrm{d}t$ (Transformée de Laplace de $f$). Alors $\mathcal{L}(f)$ est bien définie et continue sur $[x_0, +\infty[$.

## 3 Dérivabilité d'une intégrale à paramètre

**Proposition (Théorème de dérivabilité sous l'intégrale)**
*Soit $I, J$ des intervalles de $\mathbb{R}$, $f : J \times I \to \mathbb{C}$. On suppose que*

1. *pour tout $x \in J$, $t \mapsto f(x,t)$ est intégrable (et en particulier c.m.) ;*
2. *pour tout $t \in I$, $x \mapsto f(x,t)$ est de classe $\mathcal{C}^1$ ;*
3. *pour tout $x \in J$, $t \mapsto \frac{\partial f}{\partial x}(x,t)$ est continue par morceaux ;*
4. *il existe $\varphi : I \to \mathbb{R}^+$ intégrable sur $I$ telle que pour tout $(x,t) \in J \times I$,*

$$\left|\frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\right| \leqslant \varphi(t).$$

*Alors $h : x \mapsto \int_I f(x,t)dt$ est de classe $\mathcal{C}^1$ et $h'(x) = \int_I \frac{\partial f}{\partial x}(x,t)dt$.*

**Démonstration** ◀ Soit $x_0 \in J$ et posons

$$g(x,t) = \begin{cases} \dfrac{f(x,t) - f(x_0,t)}{x - x_0} & \text{si } x \neq x_0 \\ \dfrac{\partial f}{\partial x}(x_0,t) \text{ si } x = x_0. \end{cases}$$

Montrons que $x \mapsto \int_I g(x,t)\mathrm{d}t$ est continue sur $J$.
— $t \mapsto g(x,t)$ est c.m. ;
— $x \mapsto g(x,t)$ est continue en $x \neq x_0$, et aussi en $x_0$ ;

— on a la domination
$$|g(x,t)| \leqslant \sup_{c\in J} \left|\frac{\partial f}{\partial x}(c,t)\right| \leqslant \varphi(t)$$
par le théorème des accroissements finis.

Par le théorème de continuité sous l'intégrale, $x \mapsto \int_I g(x,t)\mathrm{d}t$ est continue. De plus
$$\frac{h(x)-h(x_0)}{x-x_0} = \int_I g(x,t) \underset{x\to x_0}{\longrightarrow} \int_I g(x_0,t)\mathrm{d}t = \int_I \frac{\partial f}{\partial x}(x_0,t)\mathrm{d}t.$$
De plus, $h'$ est continue par application du théorème de continuité sous l'intégrale. ▶

**Exemple**

1. Soit $f \in \mathcal{CM}(\mathbb{R}^+,\mathbb{C})$ telle que $t \mapsto e^{-x_0 t}f(t)$ est intégrable sur $\mathbb{R}^+$. Alors $x \mapsto \mathcal{L}(f)(x) = \int_0^{+\infty} e^{-xt}f(t)\mathrm{d}t$ est dérivable sur $]x_0,+\infty[$ de dérivée $x \mapsto -\int_0^{+\infty} te^{-xt}f(t)\mathrm{d}t$. On a de même $\mathcal{L}(f)$ de classe $\mathcal{C}^\infty$.
2. (Intégrale de Gauss) Soit $h(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-xt^2}}{1+t^2}\mathrm{d}t$ où $x \geqslant 0$. Alors $h$ est solution de $y' = y - \frac{C}{\sqrt{x}}$ avec $C = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2}\mathrm{d}t$. De $h(0)=\pi$, on déduit que $C = \sqrt{\pi}$.

**Proposition** *Soit $I, J$ des intervalles de $\mathbb{R}$, $f : J\times I \to \mathbb{C}$ et $p \in \mathbb{N}^*$. On suppose que*

1. *pour tout $t\in I$, $f(\cdot,t)$ est de classe $\mathcal{C}^p$ ;*
2. *pour tout $x \in J$ et tout $k \in [\![0,p-1]\!]$, $\frac{\partial^k f}{\partial x^k}(x,\cdot)$ est intégrable ;*
3. *pour tout $x\in J$, $\frac{\partial^p f}{\partial x^p}(x,\cdot)$ est continue par morceaux ;*
4. *pour tout segment $[a,b]$ inclus dans $J$, il existe $\varphi : I \to \mathbb{R}^+$ intégrable sur $I$ telle que pour tout $(x,t) \in [a,b]\times I$,*
$$\left|\frac{\partial^p f}{\partial x^p}(x,t)\right| \leqslant \varphi(t).$$

*Alors $h : x \mapsto \int_I f(x,t)dt$ est de classe $\mathcal{C}^p$ et $h^{(k)}(x) = \int_I \frac{\partial^k f}{\partial x^k}(x,t)dt$ pour tout $k\in [\![0,p]\!]$.*

**Schéma de preuve** ◀ Par récurrence sur $p$. Si c'est vrai au rang $p-1 \geqslant 1$, alors l'inégalité des accroissements finis sur $[a,x]\subset[a,b]$ donne
$$\forall (x,t)\in[a,b]\times I \quad \left|\frac{\partial^{p-1} f}{\partial x^{p-1}}(x,t) - \frac{\partial^{p-1} f}{\partial x^{p-1}}(a,t)\right| \leqslant (b-a)\varphi(t).$$
D'où une domination de $\left|\frac{\partial^{p-1} f}{\partial x^{p-1}}(x,t)\right|$ par $\psi(t) = \left|\frac{\partial^{p-1} f}{\partial x^{p-1}}(a,t)\right| + (b-a)\varphi(t)$ indépendante de $x$ et intégrable. Par hypothèse de récurrence, $h$ est de classe $\mathcal{C}^{p-1}$ et
$$h^{(p-1)}(x) = \int_I \frac{\partial^{p-1} f}{\partial x^{p-1}}(x,t)\ dt.$$
Par application du théorème de dérivation sous le signe $\int$, on a le résultat. ▶

**Exemple**

1. (Moyenne de Cesàro continue) À toute fonction $f\in\mathcal{C}(\mathbb{R},\mathbb{R})$, on associe $f^*(x) = \frac{1}{x}\int_0^x f(t)\mathrm{d}t$. En posant $t=ux$, $f^*(x) = \int_0^1 f(ux)\mathrm{d}u$. D'après le théorème précédent, $f^*$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ et $f^{*(k)} = \int_0^1 u^k f^{(k)}(ux)\mathrm{d}u$.

2. (La fonction $\Gamma$) Pour tout $x > 0$, la fonction $t \mapsto t^{x-1}e^{-t}$ est intégrable sur $]0, +\infty[$. On pose

$$\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} t^{x-1}e^{-t}dt.$$

La fonction $\Gamma$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]0, +\infty[$ et pour tout $k \in \mathbb{N}$,

$$\Gamma^{(k)}(x) = \int_0^{+\infty} (\ln t)^k t^{x-1}e^{-t}dt.$$

Pour tout $x > 0$, $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$. En particulier, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\Gamma(n+1) = n!$.