CHAPITRE 4

SUITES ET SÉRIES DE FONCTIONS

Dans tout le chapitre, $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, A une partie non vide de $\mathbb{R}$ et I est un intervalle de $\mathbb{R}$.

I Suites de fonctions

L'élément $a \in \mathbb{R}$ est adhérent à la partie A de $\mathbb{R}$ s'il existe une suite d'éléments de A qui converge vers a. De même, $+\infty$ (resp. $-\infty$) est adhérent à $A \subset \mathbb{R}$ si I n'est pas majorée (resp. pas minorée). Si a est adhérent à A et $f : A \to \mathbb{K}$, cela a un sens de considérer l'existence de $\lim_a f$.

1 Convergence simple

Définition *La suite de fonctions $(f_n) \in (\mathbb{K}^A)^{\mathbb{N}}$ converge simplement si pour tout $x \in A$, la suite $(f_n(x))$ converge. En cas de convergence, la fonction $g \in \mathbb{K}^A$ définie par $x \mapsto \lim_n f_n(x)$ s'appelle la limite simple de (f_n).*

Exemple

1. La suite $(x^n)_n$ converge simplement sur $[0, 1]$ vers l'indicatrice du point 1. La limite n'est ni polynomiale, ni continue.
2. La suite $(x^n(1-x))_n$ converge simplement sur $[0, 1]$ vers la fonction nulle.
3. La suite de fonctions $(x \mapsto \sin nx)_n$ ne converge simplement sur aucun intervalle I de $\mathbb{R}$ (sauf éventuellement si I est vide ou réduit à un point).

Remarques

1. La limite simple, si elle existe, est unique.
2. Une limite simple de fonctions continues (même de classe $\mathcal{C}^\infty$, voire polynomiale) peut ne pas être continue.

Proposition *Soit (f_n) une suite de fonctions de A dans $\mathbb{R}$ qui converge simplement vers g.*

1. *Si chaque f_n est croissante (resp. décroissante), alors g aussi.*
2. *Si chaque f_n est convexe (resp. concave), alors g aussi.*
3. *Soit $T \in \mathbb{R}$. Si chaque f_n est T-périodique, alors g aussi.*

Schéma de preuve ◀ On passe à la limite dans les inégalités $f_n(x) \leqslant f_n(y)$, $f_n((1-t)x+ty) \leqslant (1-t)f_n(x)+tf_n(y)$ ou $f_n(x+T) = f_n(x)$. ▶

2 Convergence uniforme

Définition *Soit $(f_n)_n$ une suite de fonctions de A dans $\mathbb{K}$. On dit que la suite $(f_n)_n$ converge uniformément vers $g : A \to \mathbb{K}$ si*

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geqslant N, \forall x \in A, |f_n(x) - g(x)| \leqslant \varepsilon.$$

La fonction g est la limite uniforme de la suite $(f_n)_n$.

Remarque

1. Bien noter la différence avec la convergence simple : c'est la place du terme "$\forall x \in A$".
2. On peut reformuler cette définition : la suite de terme général $\sup\limits_{x\in A} |f_n(x) - g(x)|$ est bien définie à partir d'un certain rang (*i.e.* $f_n - g$ est bornée) et tend vers 0.
3. Si (f_n) converge uniformément vers g, elle converge simplement vers g. En particulier, la limite uniforme, si elle existe, est unique. Pour déterminer si une suite de fonctions converge uniformément, on commence par déterminer son éventuelle limite simple.
4. Graphiquement, pour une suite de fonctions réelles, la convergence uniforme sur I signifie que pour tout $\varepsilon > 0$, on a $g(x) - \varepsilon \leqslant f_n(x) \leqslant g(x) + \varepsilon$ pour tout n assez grand et tout $x \in I$.
5. (Un critère de convergence uniforme.) Si la suite $(\sup\limits_A |f_n - g|)_n$ est dominée par la suite positive $(a_n)_n$ avec $a_n \to 0$, alors (f_n) converge uniformément vers g. Il est essentiel que la majoration de $|f_n(x) - g(x)|$ soit *indépendante de x*.

Notation : Soit $f : A \to \mathbb{K}$. On note, lorsque cela existe, *i.e.* lorsque f est bornée, $\|f\|_\infty = \sup\limits_A |f|$, *i.e.* $\sup\limits_{x\in A} |f(x)|$. On a pour f, g bornées sur A que $\|f+g\|_\infty \leqslant \|f\|_\infty + \|g\|_\infty$ et $\|\lambda f\|_\infty = |\lambda| \|f\|_\infty$.

Exemples

1. Si $f_n(x) = x^n(1-x)$ sur $[0,1]$, alors (f_n) converge uniformément sur $[0,1]$ vers 0.
2. La suite (x^n) ne converge pas uniformément sur $[0,1]$. On ne fait pas disparaître le problème en se restreignant à $[0,1[$: il n'y a pas non plus convergence uniforme sur $[0,1[$.
3. La suite de fonctions $f_n : x \mapsto \dfrac{nx}{1+n^2x^2}$ converge simplement vers 0 sur $\mathbb{R}$ mais ne converge pas uniformément. Elle converge uniformément sur tout intervalle $[a, +\infty[$ où $a > 0$ mais pas sur $[0, \varepsilon]$ si $\varepsilon > 0$.
4. Si $f_n(x) = \left(1 - \dfrac{x}{n}\right)^n$ sur $[0,n]$ et 0 sur $]n, +\infty[$, alors (f_n) converge uniformément sur $\mathbb{R}^+$ vers $x \mapsto e^{-x}$. En effet, si $g_n(x) = e^{-x} - f_n(x)$, on a $\max\limits_{\mathbb{R}^+} g_n = \max\limits_{[0,n]} g_n = g_n(x_n) = \alpha_n$. Mais $g_n'(n) < 0$ implique $0 < \alpha_n < n$. Mais alors $g_n'(x_n) = 0$ et donc $e^{-x_n} = \left(1 - \dfrac{x}{n}\right)^{n-1}$. Donc $g_n(x_n) = \dfrac{x_n}{n} e^{-x_n}$. On conclut en remarquant que $t \mapsto te^{-t}$ est borné sur $\mathbb{R}^+$.

Remarque Si (f_n) converge uniformément vers g, alors les restrictions $(f_{n|B})$ convergent uniformément vers $g_{|B}$.

Proposition *Soit $(f_n)_n$ une suite de fonctions de A dans $\mathbb{K}$ qui converge uniformément vers $g : A \to \mathbb{K}$. Si, à partir d'un certain rang, chaque f_n est bornée, alors g est bornée.*

Schéma de preuve ◀ Il suffit de choisir N assez grand pour avoir simultanément f_N bornée et $\|f_N - g\|_\infty \leqslant 1$. Par l'inégalité triangulaire inversée, pour tout $x \in A$, $|g(x)| \leqslant \|f_N\|_\infty + 1$. ▶

Proposition *Soient $f_n, g_n, f_\infty, g_\infty : A \to \mathbb{K}$ tels que $f_n \overset{CU}{\longrightarrow} f_\infty$, $g_n \overset{CU}{\longrightarrow} g_\infty$ et $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$. Alors $\lambda f_n + \mu g_n$ converge uniformément vers $\lambda f_\infty + \mu g_\infty$.*

Schéma de preuve ◀ Passer au sup dans l'inégalité $|\lambda(f_n(x) - g(x)) + \mu(g_n(x) - g(x))| \leqslant |\lambda| \|f_n\|_\infty + |\mu| \|g_n\|_\infty$ valable pour tout n assez grand. ▶

3 Propriétés des limites uniformes

Lemme *Soit $(u_n)_n$ une suite complexe bornée admettant une unique valeur d'adhérence. Alors (u_n) converge.*

Démonstration ◀ Remarquons qu'elle en admet au moins une par le théorème de Bolzano-Weierstrass. Montrons la contraposée : si elle ne converge pas, elle admet donc au moins deux valeurs d'adhérence. Soit déjà α une valeur d'adhérence obtenue par le théorème de Bolzano-Weierstrass. Par négation de la convergence de (u_n) vers α, il existe $\varepsilon > 0$ tel que $\{n \in \mathbb{N} \,|\, |u_n - \alpha| > \varepsilon\} = I$ est infini. La sous-suite $(u_n)_{n \in I}$ admet elle-même une valeur d'adhérence β, valeur d'adhérence de (u_n) aussi, et par passage à la limite, $|\alpha - \beta| \geqslant \varepsilon$. D'où deux valeurs d'adhérence distinctes. ▶

Proposition (théorème de la double limite) *Soit $(f_n)_n$ une suite de fonctions de A dans $\mathbb{K}$ et $a \in \overline{\mathbb{R}}$ adhérent à A. On suppose que*

1. *$(f_n)_n$ converge uniformément vers une fonction $g : A \to \mathbb{K}$;*
2. *chaque f_n admet une limite en a, notée l_n.*

Alors la suite (l_n) converge, la fonction g admet une limite finie en a et $\lim_n l_n = \lim_a g$. En particulier,

$$\lim_{n \to +\infty} \lim_{x \to a} f_n(x) = \lim_{x \to a} \lim_{n \to +\infty} f_n(x).$$

Schéma de preuve ◀ Étape 1 : convergence de (l_n). Soit $\varepsilon > 0$. Il existe N tel que $n \geqslant N$ implique $|f_n(x) - g(x)| \leqslant \varepsilon/2$ pour tout $x \in A$. Pour $n, m \geqslant N$ et $x \in A$,

$$|f_n(x) - f_m(x)| \leqslant |f_n(x) - g(x)| + |g - f_m(x)| \leqslant \varepsilon/2 + \varepsilon/2.$$

En passant à la limite lorsque x tend vers a, $|l_n - l_m| \leqslant \varepsilon$. Donc (l_n) est bornée, car $|l_n \leqslant |l_N| + \varepsilon$. Elle n'admet qu'une valeur d'adhérence car si $l_{\varphi(n)}$ tend vers α et $l_{\psi(n)}$ tend vers β, $|\alpha - \beta| \leqslant \varepsilon$. Elle converge d'après le lemme précédent. On note l sa limite.
Étape 2 : $\lim_a f = l$. Pour $x \in A$ et $n \in \mathbb{N}$, on a

$$|f(x) - l| \leqslant |f(x) - f_n(x)| + |f_n(x) - l_n| + |l_n - l|.$$

Soit $\varepsilon > 0$. Pour n assez grand, on a simultanément $\|f - f_n\|_\infty \leqslant \varepsilon/3$, $|l_n - l| \leqslant \varepsilon/3$. De plus, par convergence de $f_n(x)$ vers l_n lorsque $x \to a$, on a que sur un voisinage $\mathcal{V}$ de a, $|f_n(x) - l_n| \leqslant \varepsilon/3$. Pour $x \in \mathcal{V}$, on a bien $|f(x) - l| \leqslant \varepsilon$. ▶

Remarques

1. Dans l'énoncé précédent, on n'a pas besoin de la convergence uniforme sur tout A : la convergence uniforme sur un voisinage de a dans A suffit.

2. On peut appliquer ce résultat aux suites doubles : si $(a_{p,q})_{(p,q)\in\mathbb{N}^2}$ est une suite double telle que pour tout p, $(a_{p,q})_q$ converge uniformément vers α_p et que pour tout q, $(a_{p,q})_p$ converge vers β_q. Alors (α_p) et (β_q) convergent vers la même limite.
3. On peut utiliser ce résultat pour prouver la *non-convergence uniforme* d'une suite de fonctions. Par exemple, $f_n(x) = \dfrac{x}{n+x}$ converge simplement vers 0, mais pas uniformément.

Corollaire *Soit $(f_n)_n$ une suite de fonctions de A dans $\mathbb{K}$ qui converge uniformément vers g.*

1. *Soit $a \in A$. Si chaque f_n est continue en a, alors g est continue en a.*
2. *Si chaque f_n est continue, alors g est continue.*

Corollaire *Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$, $(f_n)_n$ une suite de fonctions continues de I dans $\mathbb{K}$ qui converge uniformément sur tout segment inclus dans I vers g. Alors g est continue.*

Proposition *Soit I un intervalle, $x_0 \in I$ et $(f_n)_n$ une suite de fonctions continues de I dans $\mathbb{K}$ qui converge simplement sur I et uniformément sur tout segment vers g. On note pour tout $x \in I$, $F_n(x) = \displaystyle\int_{x_0}^{x} f_n(t)dt$ et $G(x) = \displaystyle\int_{x_0}^{x} g(t)dt$. Alors (F_n) converge uniformément sur tout segment de I vers G.*

Schéma de preuve ◀ Soit $[a,b] \subset I$. Quitte à augmenter $[a,b]$, on peut supposer que $x_0 \in [a,b]$. Mais alors, pour tout $x \in [a,b]$ et n assez grand pour que $f_n - g$ soit bornée :

$$|F_n(x) - G(x)| \leqslant \left|\int_{x_0}^{x} |f_n(t) - g(t)|dt\right| \leqslant \int_a^b \|f_n - g\|_\infty = (b-a)\|f_n - g\|_\infty$$

qui tend vers 0 avec n et est indépendant de x. (Variante : on passe à la borne supérieure sur $x \in [a,b]$ puis on fait $n \to +\infty$.) ▶

Corollaire *Soit $(f_n)_n$ une suite de fonctions continues de $[a,b]$ dans $\mathbb{K}$ qui converge uniformément sur tout segment vers g. Alors $\displaystyle\int_a^b f_n$ converge vers $\displaystyle\int_a^b g$.*

Remarque La convergence uniforme sur tout segment est héritée par intégration.

Corollaire *Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$, $(f_n)_n$ une suite de fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ de I dans $\mathbb{K}$. On suppose que*

1. *$(f_n)_n$ converge simplement vers une fonction g ;*
2. *$(f_n')_n$ converge uniformément sur tout segment vers une fonction $h : I \to \mathbb{R}$.*

Alors g est de classe $\mathcal{C}^1$ et $g' = h$.

Schéma de preuve ◀ Soit H une primitive de h. Alors par ce qui précède, $f_n(x) - f_n(a) \to H(x) - H(a)$ quand $n \to +\infty$. Mais alors $g(x) - g(a) = H(x) - H(a)$ et g est $\mathcal{C}^1$ avec $g' = h$. ▶

Avec une récurrence à peu près immédiate :

Corollaire *Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$, $p \in \mathbb{N}^*$ et $(f_n)_n$ une suite de fonctions de classe $\mathcal{C}^p$ de I dans $\mathbb{K}$. On suppose que*

1. *pour tout $k \in [\![0, p-1]\!]$, $(f_n^{(k)})_n$ converge simplement vers une fonction g_k ;*
2. *$(f_n^{(p)})_n$ converge uniformément (ou uniformément sur tout segment de I) vers une fonction $g_p : I \to \mathbb{R}$.*

Alors g_0 est de classe $\mathcal{C}^p$ et $g^{(k)} = g_k$ pour tout $k \in [\![0, p]\!]$.

Schéma de preuve ◀ La domination uniforme sur tout segment de $(f_n^{(p)})$ et la convergence simple de $(f_n^{(p-1)})$ garantissent la domination uniforme sur tout segment de $(f_n^{(p-1)})$. Par hypothèse de récurrence, g est de classe $\mathcal{C}^{p-1}$ et $g^{(k)} = \lim_n f_n^{(k)}$ si $0 \leqslant k \leqslant p-1$. Puis le théorème au rang 1 permet de conclure. ▶

Remarque Bien prendre garde qu'une limite uniforme de fonction $\mathcal{C}^1$ peut ne pas être dérivable. (Considérer par exemple $f_n(x) = \sqrt{x^2 + 1/n}$ de classe $\mathcal{C}^\infty$ qui converge uniformément sur $[-1, 1]$ vers $|x|$.)

4 Deux théorèmes d'approximation

Proposition *Soit $g : [a, b] \to \mathbb{K}$ continue par morceaux. Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe une fonction $f : [a, b] \to \mathbb{K}$ en escalier telle que $\|f - g\|_\infty \leqslant \varepsilon$.*

Autrement dit : il existe une suite de fonctions (f_n) en escalier de $[a, b]$ dans $\mathbb{K}$ qui converge uniformément vers g.

Proposition (Théorème d'approximation de Weierstrass)
Soit $g : [a, b] \to \mathbb{K}$ continue. Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe une fonction polynomiale $P : [a, b] \to \mathbb{K}$ telle que $\|P - g\|_\infty \leqslant \varepsilon$.

Autrement dit : il existe une suite de fonctions polynomiales (P_n) de $[a, b]$ dans $\mathbb{K}$ qui converge uniformément vers g.

Schéma de preuve ◀ (Non exigible.)

1. Soit $P_n = a_n(1 - X^2)^n$ tel que $\displaystyle\int_{-1}^{1} P_n(t)dt = 1$. Alors $a_n \sim \sqrt{\frac{n}{\pi}}$ (Wallis).
2. On fixe $h \in \mathcal{C}(\mathbb{R}, \mathbb{K})$ tel que $h = 0$ sur $[0, 1]^c$. Pour $x \in [0, 1]$,
$$\varphi_n(x) = \int_{-1}^{1} P_n(t)h(t + x)dt = \int_{-1+x}^{1+x} P_n(u - x)h(u)du = \int_{0}^{1} P_n(u - x)h(u)du$$
car $-1 + x \leqslant 0 < 1 \leqslant 1 + x$.
3. φ_n est une fonction polynomiale sur $[0, 1]$. (Développer $P_n(u - x)$.)
4. (φ_n) converge uniformément vers h sur $[0, 1]$: soit $x \in [0, 1]$ et $\varepsilon > 0$. Par uniforme continuité de h sur $[-2, 2]$, il existe $\eta > 0$ tel que
$$\begin{aligned} |\varphi_n(x) - h(x)| &= \left| \int_{-1}^{1} P_n(t)h(t + x)dt - \int_{-1}^{1} P_n(t)h(x)dt \right| \\ &\leqslant \int_{-1}^{-\eta} P_n(t)|h(t + x) - h(x)|dt + \int_{-\eta}^{\eta} P_n(t)|h(t + x) - h(x)|dt + \int_{\eta}^{1} P_n(t)|h(t + x) - h(x)|dt. \end{aligned}$$
Les deux termes extrêmes sont majorés $2\|f\|_\infty a_n(1 - \eta^2)^n \to 0$.
Le terme du milieu est majoré par $\varepsilon \displaystyle\int_{-1}^{1} P_n(t)dt = \varepsilon$.
5. Soit $g \in \mathcal{C}([a, b], \mathbb{K})$ et $u : [1/4, 3/4] \to [a, b]$ bijection affine. Alors $\varphi_n \circ u \to g \circ u$ uniformément.

▶

Exemple Une application : soit $f \in \mathcal{C}([a, b], \mathbb{R})$ telle que pour tout entier $k \in \mathbb{N}$, $\displaystyle\int_a^b t^k f(t)dt = 0$. Alors $f = 0$. (Car $\displaystyle\int_a^b P_n f \to \int_a^b f^2$.)

II Séries de fonctions

1 Convergence simple et uniforme

Définition *Soit $(f_n)_n$ une suite de fonctions de A dans $\mathbb{K}$.*

1. *La série de fonctions $\sum f_n$ converge simplement si $\left(\sum_{k=0}^{n} f_k\right)_n$ converge simplement.*
2. *La série de fonctions $\sum f_n$ converge uniformément si $\left(\sum_{k=0}^{n} f_k\right)_n$ converge uniformément.*

Proposition *Soit $(f_n)_n$ une suite de fonctions de A dans $\mathbb{K}$. Alors $\sum f_n$ converge uniformément si et seulement si $\sum f_n$ converge simplement et le reste $(R_n)_n$ converge uniformément vers 0. Dans ce cas, on a que $(f_n)_n$ converge uniformément vers 0.*

2 Convergence absolue et normale

Définition *Soit $(f_n)_n$ une suite de fonctions de A dans $\mathbb{K}$.*

1. *La série de fonctions $\sum f_n$ converge absolument si la série de fonctions $\sum |f_n|$ converge simplement, i.e. $(\sum |f_n(x)|)$ converge pour tout $x \in A$.*
2. *La série de fonctions $\sum f_n$ converge normalement si la série numérique positive $\sum \|f_n\|_\infty$ converge.*

Proposition *Soit A une partie de $\mathbb{R}$, $(f_n)_n$ une suite de fonctions de A dans $\mathbb{K}$. Si $\sum f_n$ converge normalement, alors $\sum f_n$ converge uniformément, absolument et simplement.*

Remarque

1. Les convergences normale et absolue sont propres aux séries de fonctions.
2. On a $CN \Rightarrow CA \Rightarrow CS$ et $CN \Rightarrow CU \Rightarrow CS$. Toute autre implication est fausse en général. (Considérer les séries de fonctions de terme général $\frac{(-1)^n}{n+x}$, $\frac{(-1)^n}{n}x$, $\frac{x}{2^n}$ et $\chi_{[n,n+1[}\frac{1}{n+1}$.)

Exemple

1. Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. La série de fonctions $\sum n^\alpha x e^{-nx}$ converge simplement sur $\mathbb{R}^+$ mais ne converge normalement sur $\mathbb{R}^+$ que si $\alpha \geqslant 0$. En revanche, il y a convergence uniforme sur tout intervalle $[a, +\infty[$ avec $a > 0$.
2. La série de fonctions $\sum_{n \geqslant 1} \frac{(-1)^n}{n+x}$ converge simplement et uniformément grâce au théorème des séries alternées. En revanche, il n'y a pas convergence absolue ni normale.

3 Propriété de la somme

Proposition (théorème de permutation des limites) *Soit A une partie de $\mathbb{R}$, $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions de A dans $\mathbb{K}$. On suppose que $\sum f_n$ converge uniformément. Soit S sa limite.*

1. *On suppose que a est adhérent à A et que $\lim_a f_n = l_n \in F$. Alors S converge en a, $\sum l_n$ converge et $\lim_a S = \sum_{n=0}^{+\infty} l_n$.*
2. *Si $a \in A$ et que chaque f_n est continue en a, alors S aussi et $\lim_a S = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(a)$.*
3. *Si chaque f_n est continue, S est continue.*

Corollaire *Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $(f_n)_n$ une suite de fonctions continues de I dans $\mathbb{K}$. On suppose que $\sum f_n$ converge uniformément sur tout segment inclus dans I. Alors $\sum f_n$ converge simplement et sa limite S est continue.*

Proposition *Soit $\sum f_n$ une série de fonctions continues sur $[a, b]$ qui converge uniformément vers S. Alors $\sum_n \int_a^b f_n(t)dt$ converge et*

$$\int_a^b S(t)dt = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_a^b f_n(t)dt.$$

Exemple Soit $r > 0$ et $z \in \mathbb{C}$. Calculer $I(r, z) = \int_0^{2\pi} \frac{1}{z - re^{it}} \mathrm{d}t$ lorsque $|z| \neq r$.

Corollaire *Soit (f_n) une suite de fonction de classe $\mathcal{C}^1$ de I intervalle de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{K}$. On suppose que $\sum f_n$ converge simplement et que $\sum f_n'$ converge uniformément (ou uniformément sur tout segment inclus dans I). Alors en notant $S(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(t)$ et $U(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n'(t)$, S et dérivable et $S' = U$.*

Corollaire *Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$, $p \in \mathbb{N}^*$ et $(f_n)_n$ une suite de fonctions de classe $\mathcal{C}^p$ de I dans $\mathbb{K}$. On suppose que*

1. *pour tout $k \in [\![0, p-1]\!]$, $\sum_n f_n^{(k)}$ converge simplement vers une fonction S_k ;*
2. *$\sum_n f_n^{(p)}$ converge uniformément (ou uniformément sur tout segment de I) vers une fonction $S_p : I \to \mathbb{R}$.*

Alors S_0 est de classe $\mathcal{C}^p$ et $S_0^{(k)} = S_k$ pour tout $k \in [\![0, p]\!]$.

4 Un autre théorème d'intégration d'une série de fonctions

Le théorème suivant est admis. C'est le plus simple d'utilisation pour intégrer la somme d'une série de fonctions.

Proposition (théorème d'intégration terme à terme, ou Fubini $\sum - \int$) *Soit (f_n) une suite de fonctions continues par morceaux sur I à valeurs complexes. On suppose que*

1. *la série de fonction $\sum f_n$ converge simplement vers une fonction S continue par morceaux ;*
2. *chaque f_n est intégrable sur I ;*
3. *la série à termes positifs $\sum \int_I |f_n|$ converge.*

Alors S est intégrable sur I et $\displaystyle\int_I S = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_I f_n$.

Méthode : Pour intégrer la somme d'une série de fonctions, on dispose de trois théorèmes.

L'un nécessite que la série de fonctions soit définie sur un segment et que la convergence soit uniforme. Le théorème d'intégration terme à terme est plus souple et se ramène essentiellement à la convergence d'une série numérique positive. Lorsque ces deux théorèmes ne sont pas applicables, on peut essayer d'utiliser le théorème de convergence dominée.

Exemple (la series mirabili d'Euler) On a $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{t^t} dt = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^n}$. (Poser $u_n(t) = (-1)^n \dfrac{t^n \ln^n t}{n!}$ de sorte que $\displaystyle\frac{1}{t^t} = \sum_{n=1}^{+\infty} u_n(t)$; on peut appliquer les trois théorèmes de permutation $\sum - \int$.)

5 Exemples

Exemple 1. Étude de $\sum \dfrac{e^{-nx}}{\sqrt{n}}$; continuité, caractère $\mathcal{C}^\infty$, monotonie, convexité, limite et équivalent en $+\infty$.

Exemple 2. Étude de la fonction ζ ; continuité, caractère $\mathcal{C}^\infty$, monotonie, convexité, limite et équivalent en $+\infty$.

Exemple 3. Une fonction continue en tout point irrationnel et discontinue en tout point rationnel.

Exemple 4. [Une fonction dérivable très, très loin d'être de classe $\mathcal{C}^1$.] Il existe des fonctions dérivables de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ dont la dérivée est > 0 sur une partie dense et nulle sur une partie dense. (Et aussi de dérivée > 0 sur une partie dense et < 0 sur une partie dense, mais c'est plus difficile.)