Dans tout le problème, I désigne un intervalle non majoré de $\mathbb{R}$. Le but du problème est l'étude des solutions de l'équation différentielle

$$E_f \ : \ y' - y + f(x) = 0$$

où f est une application continue définie sur I et à valeurs réelles ou complexes. On verra que l'espace des solutions contient une solution f_1 ayant un comportement particulier en $+\infty$. Les parties I et II portent sur deux exemples. La partie III met en place l'application $\Phi : f \mapsto f_1$ dans un cadre général. Les Parties IV et V envisagent diverses propriétés de la fonction f et sont largement indépendantes.

Partie I - Étude d'un premier exemple

I.A - Pour $x \in \mathbb{R}$, montrer l'existence et donner la valeur des expressions suivantes :

$$e^x \int_x^{+\infty} e^{-t} \cos t \, dt, \ e^x \int_x^{+\infty} e^{-t} \sin t \, dt$$

I.B - On considère l'équation différentielle

$$y' - y + \cos x = 0, \ x \in \mathbb{R}.$$

Déterminer une fonction Y_0 bornée et une fonction g telles que la solution générale sur $\mathbb{R}$ de cette équation différentielle puisse se mettre sous la forme

$$Y_\lambda(x) = \lambda g(x) + Y_0(x), \text{ où } \lambda \in \mathbb{R}.$$

Donner sans démonstration le résultat analogue relatif à l'équation différentielle $y' - y + \sin x = 0$.

I.C - Soit Π le plan vectoriel engendré par les fonctions *cosinus* et *sinus* dans l'espace vectoriel des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, c'est-à-dire l'ensemble des fonctions de la forme

$$x \mapsto \alpha \cos x + \beta \sin x$$

où α et β sont des nombres réels. Pour tout $f \in \Pi$, on définit f_1 par la formule

$$\forall x \in \mathbb{R}, f_1(x) = e^x \int_x^{+\infty} e^{-t} f(t) \, dt.$$

I.C.1) Montrer que la transformation $f \mapsto f_1$ définit une application $\Phi : \Pi \to \Pi$. La linéarité de Φ étant considérée comme évidente, donner la matrice de Φ dans la base de Π constituée des fonctions *cosinus* et *sinus*.

I.C.2) On munit Π de la norme

$$\|f\|_\infty = \sup_{x \in \mathbb{R}} |f(x)|.$$

Déterminer une constante $k > 0$ telle que, pour tout $f \in \Pi$, on ait

$$\|f_1\|_\infty \leqslant k \|f\|_\infty.$$

Pour $f \in \Pi$, on définit par récurrence la suite $(f_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ où $f_1 = \Phi(f)$ et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $f_{n+1} = \Phi(f_n)$.

Étudier l'existence de la limite de cette suite relativement à la norme définie sur Π et déterminer la valeur de cette limite.

Partie II - Étude d'un deuxième exemple

On donne, pour $x > 0$, l'équation différentielle

$$y' - y + \frac{1}{x} = 0.$$

II.A - Montrer qu'il existe sur l'intervalle $]0, +\infty[$ une unique solution Y_0 bornée quand x tend vers l'infini et exprimer $Y_0(x)$ sous forme d'une intégrale.

Quelle expression donner à la solution générale Y_λ, où $\lambda \in \mathbb{R}$, l'indexation étant telle que pour $\lambda = 0$, on ait la solution bornée Y_0 ? Étudier le comportement de $Y_\lambda(x)$ lorsque x tend vers 0 par valeurs positives.

On note $\mathcal{C}_\lambda$ la courbe représentative de la solution Y_λ.

II.B - Pour tout point $m\,(x_m, y_m)$ du demi-plan $x > 0$, on note Y_m la solution de l'équation vérifiant $Y_m\,(x_m) = y_m$ et $\mathcal{C}_m$ sa courbe représentative.

II.B.1) Déterminer l'ensemble $\mathcal{H}$ des points m tels que $Y'_m(x_m) = 0$. Même question pour l'ensemble $\mathcal{I}$ des m tels que $Y''_m(x_m) = 0$. Donner sans démonstration une interprétation géométrique pour chacun des ensembles $\mathcal{H}$ et $\mathcal{I}$.

II.B.2) Quelle est la place de la courbe $\mathcal{C}_0$ représentative de la solution Y_0 par rapport aux courbes $\mathcal{H}$ et $\mathcal{I}$?

(on pourra faire des intégrations par parties sur $Y_0(x) = e^x \displaystyle\int_x^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t} \, dt$).

II.B.3) Tracer sans explication sur un même dessin des ébauches des courbes $\mathcal{H}$, $\mathcal{I}$, $\mathcal{C}_0$, $\mathcal{C}_{\lambda_1}$, $\mathcal{C}_{\lambda_2}$, où λ_1 et λ_2 sont des réels respectivement négatif et positif.

Partie III - La transformation Φ

On suppose maintenant que I est un intervalle ouvert de la forme $]a, +\infty[$, a pouvant être égal à $-\infty$.

Dans le $\mathbb{C}$-espace vectoriel $\mathcal{C}^0(I, \mathbb{C})$ des fonctions continues sur I à valeurs complexes, on considère le sous-ensemble

$$\mathcal{E} = \left\{ f \mid \exists \alpha \in \mathbb{R}, \lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x^\alpha} = 0 \right\}.$$

Autrement dit, $\mathcal{E}$ est l'ensemble des fonctions f négligeables en $+\infty$ devant une certaine fonction puissance $x \mapsto x^\alpha$ (α dépendant de f).

III.A - Montrer que $\mathcal{E}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{C}^0(I, \mathbb{C})$.

Étant donné $f \in \mathcal{E}$ et $x \in I$, on considère l'équation différentielle

$$E_f : y' - y + f(x) = 0.$$

III.B - Montrer que E_f admet une unique solution $f_1 \in \mathcal{E}$ définie par la formule

$$\forall x \in \mathbb{R}, f_1(x) = e^x \int_x^{+\infty} e^{-t} f(t)\, dt.$$

On définit l'application $\Phi : \mathcal{E} \to \mathcal{E}$ par $\Phi(f) = f_1$; elle est évidemment linéaire.

III.C - Soit Φ^n la composée n fois de Φ avec elle-même. Pour $f \in \mathcal{E}$, on pose $f_n = \Phi^n(f)$ (avec $f_0 = f = \Phi^0(f)$). Montrer que les conditions suivantes sont équivalentes :

(i) la suite (f_n) converge uniformément sur tout compact de I,

(ii) la suite (f_n) converge uniformément vers une constante sur tout compact de I,

(iii) la série $\sum f_n'$ converge uniformément sur tout compact de I.

III.D - Montrer que

$$\forall x \in I, \forall n \in \mathbb{N}^*, f_{n+1}(x) = e^x \int_x^{+\infty} \frac{(t-x)^n}{n!} f(t) e^{-t}\, dt = \int_0^{+\infty} \frac{u^n}{n!} f(x+u) e^{-u}\, du$$

(on pourra raisonner par récurrence en écrivant $f_{n+1} = \Phi^n(f_1)$ et intégrer par parties).

III.E - L'application linéaire

$$\Phi : \mathcal{E} \to \mathcal{E}, f \mapsto f_1$$

est-elle injective ? Montrer que l'image de Φ est l'ensemble des applications $g \in \mathcal{C}^1(I, \mathbb{C})$ telles que $g \in \mathcal{E}$ et $g' \in \mathcal{E}$.

Partie IV - Fonctions bornées

Soit $\mathcal{B}$ l'espace des fonctions continues bornées sur $\mathbb{R}$ à valeurs complexes.

$\mathcal{B}$ étant un sous-espace vectoriel de $\mathcal{E}$ (défini au III), l'application Φ est définie sur $\mathcal{B}$.

IV.A - Montrer que pour tout $f \in \mathcal{B}$, l'équation différentielle E_f a une unique solution bornée f_1.

IV.B - On munit $\mathcal{B}$ de la norme

$$\|f\|_\infty = \sup \{|f(t)|, t \in \mathbb{R}\}.$$

L'application Φ est-elle continue pour cette norme ?

IV.C - Soit $\mathcal{L}$ (resp. $\mathcal{L}_0$) le sous-espace de $\mathcal{B}$ des fonctions ayant une limite (resp. une limite nulle) en $+\infty$, $\mathcal{K}$ le sous-espace des fonctions constantes.

Montrer que $\mathcal{L}_0$ et $\mathcal{K}$ sont des sous-espaces supplémentaires de $\mathcal{L}$.

Montrer que ces sous-espaces sont stables par Φ.

IV.D - Montrer, à l'aide du III.D, que pour tout $f \in \mathcal{L}$, la suite (f_n) converge uniformément sur tout intervalle $[a, +\infty[$ vers une constante que l'on précisera (couper l'intervalle d'intégration en exprimant que f a une limite en $+\infty$).

IV.E - Montrer que l'application linéaire $\Phi : f \mapsto f_1$ est une injection de $\mathcal{B}$ dans le sous-espace des fonctions bornées de classe C^1 sur $\mathbb{R}$.

L'application $x \mapsto \sin(x^2)$ est-elle dans l'image de Φ ? Préciser l'image de Φ.

Partie V - Fonctions polynomiales

Soit d un entier naturel et $\mathcal{FP}_d$ le $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension $d+1$ des fonctions polynomiales de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$ à coefficients complexes de degré inférieur ou égal à d.

V.A - Soit une famille $\xi = (\xi_0, \ldots, \xi_d)$ de $d+1$ nombres réels distincts. Pour tout $f \in \mathcal{FP}_d$, on pose

$$N_\xi(f) = \sup_{0 \leqslant i \leqslant d} |f(\xi_i)|.$$

Montrer que c'est une norme sur $\mathcal{FP}_d$.

V.B - Soit une suite de fonctions polynomiales de $\mathcal{FP}_d$

$$x \mapsto f_n(x) = a_{d,n} x^d + a_{d-1,n} x^{d-1} + \ldots + a_{0,n}.$$

Montrer que les conditions suivantes sont équivalentes :

(i) la suite (f_n) converge simplement sur $\mathbb{C}$,

(ii) la suite (f_n) converge uniformément sur tout compact de $\mathbb{C}$,

(iii) il existe $d+1$ nombres réels distincts $\xi_0, \ldots, \xi_d$ tels que, pour tout indice $0 \leqslant i \leqslant d$, la suite $(f_n(\xi_i))$ converge.

(iv) chacune des $d+1$ suites numériques $(a_{i,n})_{n \in \mathbb{N}}$, pour $0 \leqslant i \leqslant d$, converge.

V.C - Pour tout $f \in \mathcal{FP}_d$, montrer que l'équation différentielle E_f a une unique solution $f_1 = \Phi(f)$ dans $\mathcal{FP}_d$.

On note encore $\Phi : f \mapsto f_1$; Φ est considéré ici comme un endomorphisme de $\mathcal{FP}_d$.

V.D - Pour f fonction polynomiale de degré d, on forme la suite de fonctions polynomiales (f_n) où $f_n = \Phi^n(f)$. Cette suite vérifie-t-elle les conditions équivalentes de VI.B ?

●●● FIN ●●●