Autour des suites géométriques matricielles

Ici, $\mathbb{K}$ désigne le corps $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ et p un entier $\geqslant 2$.

1) Déterminer successivement l'ensemble des $z \in \mathbb{C}$ tels que
   (a) $(z^n)_n$ converge ;
   (b) $\sum z^n$ converge ;
   (c) $\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} z^k$ converge.
2) Soit $A, B \in \mathcal{M}_p(\mathbb{K})$ semblables. Montrer que $(A^n)_n$ converge (resp. est bornée) si et seulement si $(B^n)_n$ converge (resp. est bornée).
3) On suppose que $M \in \mathcal{M}_p(\mathbb{C})$ admet une seule valeur propre λ, que $|\lambda| = 1$ et que $(M^n)_n$ est bornée. Montrer que M est une matrice scalaire. (On pourra commencer par le cas $p = 2$, puis se ramener à ce cas.)
4) Caractériser à l'aide de leur spectre les matrices $M \in \mathcal{M}_p(\mathbb{K})$ telles que (M^n) converge vers 0.
5) (a) Soit $M \in \mathcal{M}_p(\mathbb{R})$ telle que $(M^k)_k$ converge. Montrer que sa limite est un projecteur qui commute à M.
   (b) Montrer que $(M^n)_n$ converge si et seulement si $\mathrm{Sp}_{\mathbb{C}}(M) \subset D(0,1) \cup \{1\}$, et que $\dim E_1(M) = m(1)$ où $m(1)$ est la multiplicité de 1 en tant que valeur propre. Exprimer l'image et le noyau de la limite P en fonction des espaces propres de M.
6) Caractériser les matrices $M \in \mathcal{M}_p(\mathbb{K})$ telles que $(M^n)_n$ est bornée.
7) Soit $A \in \mathcal{M}_p(\mathbb{C})$ telle que la suite $(A^n)_n$ soit bornée. On pose

$$B_n = \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n} A^k.$$

   (a) Montrer que (B_n) admet une valeur d'adhérence B. Montrer que B est un projecteur et que $AB = BA = B$.
   (b) Montrer que $\mathrm{Ker}\, B = \mathrm{Im}(I_p - A)$ et que $\mathrm{Im}\, B = \mathrm{Ker}(I_p - A)$.
   (c) Montrer que (B_n) converge.
   (d) Déterminer les matrices $M \in \mathcal{M}_p(\mathbb{C})$ telles que $(\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} M^k)$ converge.
8) Déterminer les matrices $M \in \mathcal{M}_p(\mathbb{C})$ telles que $(\sum M^p)$ converge.

Corrigé

1) D'après le cours sur les suites géométriques, $(z^n)_n$ converge si et seulement si $|z| < 1$ ou $z = 1$; $\sum z^n$ converge si et seulement si $|z| < 1$. D'autre part, pour $z \neq 1$,

$$S_n = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} z^k = \frac{1}{n}\frac{z^n - 1}{z-1}.$$

Si $|z| > 1$, cette suite diverge car $|S_n| \sim \frac{1}{n}\frac{|z|^n}{|\lambda - 1|}$ qui tend vers $+\infty$. Si $|z| \leqslant 1$ et $z \neq 1$, (S_n) tend vers 0 car le terme $\frac{z^n-1}{z-1}$ est borné. Si $z = 1$, S_n vaut constamment 1. En résumé, (S_n) converge si et seulement si $|z| \leqslant 1$.

2) Soit $P \in GL_n(\mathbb{C})$ telle que $B = PBP^{-1}$. Alors $B^n = PA^nP^{-1}$. Par continuité de $M \mapsto PMP^{-1}$ sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, la suite (B^n) converge dès que (A^n) converge. Par symétrie des rôles de A et B, c'est une équivalence. De même, par linéarité et continuité de $M \mapsto PMP^{-1}$ sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, la suite (B^n) est bornée dès que (A^n) est bornée. Par symétrie des rôles de A et B, c'est une équivalence.

3) Puisque χ_M est scindé (polynôme complexe) et qu'il admet une unique racine (car les racines de χ_M sont exactement les valeurs propres), on a $\chi_M = (X-\lambda)^p$. D'après le théorème de Cayley-Hamilton, $N^p = 0$ où $N = M - \lambda I_p$. Mais alors $M = \lambda I_p + N$ avec N nilpotente. Soit $d \leqslant n-1$ son indice de nilpotence. Montrons que $d = 1$, *i.e.* N est nulle.

   Vu que N et I_p commutent, on a d'après la formule du binôme pour $n \geqslant p$

$$M^n = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\lambda^{n-k}N^k = \sum_{k=0}^{d-1}\binom{n}{k}\lambda^{n-k}N^k.$$

   Vu que N^{d-1} est non nul, il existe $i, j \in [\![1,p]\!]$ tels que $\alpha = [N^{d-1}]_{i,j} \neq 0$. On a donc

$$[M^n]_{i,j} = \sum_{k=0}^{d-2}\binom{n}{k}\lambda^{n-k}[N^k]_{i,j} + \alpha\lambda^{n-d+1}\binom{n}{d-1}.$$

   Mais pour k fixé, la suite $\binom{n}{k}$ est équivalente à $n^k/k!$. On a donc

$$[M^n]_{i,j} = \alpha\lambda^{n-d+1}\binom{n}{d-1} + o(n^{d-1}).$$

   La suite étant bornée, $d - 1 = 0$, *i.e.* $d = 1$.

4) Montrons que (M^n) converge vers 0 si et seulement si $\operatorname{Sp} M \subset D(0,1)$, *i.e.* $\max_{\lambda\in\operatorname{Sp} M} |\lambda| < 1$.

Cas nº 1 : si M a une unique valeur propre λ. En reprenant les notations de la question précédente, on a encore $M = \lambda I_n + N$ avec N nilpotente d'indice d. On a donc

$$|[M^n]_{i,j}| \sim |\alpha||\lambda|^{n-d+1}\binom{n}{d-1}.$$

Puisque ce terme tend vers 0, on a que $|\lambda^{n-d+1}|$ tend vers 0, *i.e.* $|\lambda| < 1$.

Cas nº 2 : d'après le cours, puisque χ_M est scindé, M est sembable à une matrice diagonale par blocs $D = \operatorname{Diag}(M_1, \dots, M_r)$ où M_r est de la forme $\lambda I_q + N$ avec N nilpotente. Or $D^k = \operatorname{Diag}(M_1^k, \dots, M_r^k)$ tend vers 0 d'après la question 2, car les coefficients de M_j^k sont aussi des coefficients de D. Ainsi, d'après la question précédente, $|\lambda_j| < 1$. On a prouvé le sens direct. *(On pouvait aussi considérer un vecteur propre X de M de valeur propre λ. On a $\|M^nX\| = |\lambda|^n\|X\|$. Par continuité de $A \mapsto AX$, la suite $(\|M^nX\|)_n$ tend vers 0, et donc $|\lambda| < 1$.)*

Réciproquement, supposons que $|\lambda| < 1$ pour toute $\lambda \in \operatorname{Sp} M$. Avec les notations précédentes, il suffit de prouver que si M est sembable à la matrice diagonale par blocs $D = \operatorname{Diag}(M_1, \dots, M_r)$, alors M_j^n tend vers 0 pour tout $j \in [\![1, r]\!]$. La formule

$$M^n = \sum_{k=0}^{d-1}\binom{n}{k}\lambda^{n-k}N^k$$

appliquées aux blocs $M_1, \dots, M_r$ alliée aux croissances comparées de λ^n et n^k, qui assure que $\binom{n}{k}\lambda^{n-k}$ tend vers 0 lorsque n tend vers $+\infty$, garantit que M^n tend vers 0.

5) (a) Si (M^n) converge vers A, la sous-suite (M^{2n}) converge aussi vers A. Mais par continuité de $M \mapsto M^2$, $(M^n)^2$ converge vers A^2. Donc $A = A^2$, et donc est un projecteur.

(b) $\boxed{\Longrightarrow}$ On suppose que $(M^n)_n$ converge. Soit $\lambda \in \operatorname{Sp} M$ et X un vecteur propre associé. Alors $M^nX = \lambda^nX$ converge. Si x_j est une coordonnée non nulle de X, λ^nx_j converge. Donc $\lambda \in D(0,1)$ ou $\lambda = 1$. Montrons que $\dim E_1(M) = m(1)$. On suppose que 1 est valeur propre, sinon il n'y a plus rien à montré.

On sait que M est semblable à $D = \operatorname{Diag}(M_1, M_2)$ où $M_1 = \lambda I_{m(1)} + N_1$ avec N_1 nilpotente, et que $1 \notin \operatorname{Sp} M_2$. D'après la question 3 et puisque M^n converge, $N_1 = 0$. Les $m(1)$ premiers vecteurs de la base canonique sont dans $E_1(M)$, ce qui assure que $\dim E_1(M) \geqslant m(1)$. Mais on a l'autre inégalité d'après le cours. Donc $\dim E_1(M) = m(1)$. Remarquons que D^n converge vers $\operatorname{Diag}(I_{m(1)}, 0)$ qui est le projecteur sur $E_1(M)$ parallèlement à $\bigoplus_{\lambda\in\operatorname{Sp}\lambda\setminus\{1\}} \operatorname{Ker}(M - \lambda I_p)^{m(\lambda)}$.

$\boxed{\Longleftarrow}$ Soit tout d'abord A de la forme $\lambda I_p + N$ où $N \in \mathscr{M}_p(\mathbb{C})$ est nilpotente et $\lambda \in D(0,1)$. Alors A^n tend vers 0 d'après la question précédente, donc converge. Donc si D est une matrice diagonale par blocs $D = \operatorname{Diag}(M_1, \dots, M_r)$ où chaque bloc M_j est soit de la forme $\lambda I_q + N$ (où $N \in \mathscr{M}_q(\mathbb{C})$ est nilpotente et $\lambda \in D(0,1)$), soit une matrice identité, alors D^n converge. Soit maintenant M telle que $\operatorname{Sp}_{\mathbb{C}}(M) \subset D(0,1) \cup \{1\}$ et que $\dim E_1(M) = m(1)$. On a M semblable à $D = \operatorname{Diag}(M_1, \dots, M_r)$ où chaque bloc est soit un bloc identité, soit de la forme $\lambda I_p + N$ avec N nilpotente. Mais alors, chaque suite M_j^n converge, et donc D^n converge. Donc M^n aussi.

6) Montrons que $(M^n)_n$ est bornée si et seulement si $\operatorname{Sp} M \subset D_f(0,1)$ et que si λ est une valeur propre de module 1, $m(\lambda) = \dim E_\lambda(M)$.

$\boxed{\Longrightarrow}$ Quitte à trigonaliser comme précédemment, on peut supposer que $M = \operatorname{Diag}(M_1, \dots, M_r)$ avec comme précédemment $\operatorname{Sp} M_j = \{\lambda_j\}$. On a encore M_j^n bornée. Si $|\lambda_j| = 1$, d'après la question 3, $M_j = \lambda_j I_{m(\lambda_j)}$. Si $|\lambda_j| \geqslant 1$, la suite M_j^n n'est bornée car tend vers 0.

$\boxed{\Longleftarrow}$ Soit maintenant M telle que $\operatorname{Sp}_{\mathbb{C}}(M) \subset D_f(0,1)$ et que $\dim E_\lambda(M) = m(\lambda)$ si $|\lambda| = 1$. On a M semblable à $D = \operatorname{Diag}(M_1, \dots, M_r)$ où chaque bloc est soit un bloc identité, soit de la forme $\lambda I_p + N$ avec N nilpotente. Mais alors, soit $|\lambda_j| < 1$ et M_j^n converge, donc est bornée, soit $|\lambda_j| = 1$ et $M_j^n = \lambda_j^n I_p$ est bornée. Donc D^n est bornée, et donc M^n est bornée.

7) (a) Fixons $R \geqslant 0$ tel que la suite bornée (A^n) reste dans la boule fermée $B_f(0,R)$. Alors

$$\|B_n\| \leqslant \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n}\|A^k\| \leqslant \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n} R = 1.$$

La suite (B_n) est donc bornée dans $\mathscr{M}_p(\mathbb{C})$ qui est un espace vectoriel de dimension finie. Elle admet donc une valeur d'adhérence B. Soit donc $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ une extractrice telle que $(B_{\varphi(n)})$ converge vers B.

Or,

$$AB_n - B_n = \frac{1}{n+1}\left(\sum_{k=0}^{n} A^{k+1} - \sum_{k=0}^{n} A^k\right) = \frac{1}{n+1}(A^{n+1} - I_p).$$

Vu que la suite (A^n) est bornée, $AB_n - B_n$ tend vers 0. D'autre part, par continuité du produit matriciel, $AB_{\varphi(n)}$ converge vers AB. Donc $AB = B$. De même, $BA = B$.

Ainsi, par récurrence immédiate, on a $A^kB = B = BA^k$ pour tout $k \in \mathbb{N}$. Donc pour tout polynôme $P \in \mathbb{C}[X]$, on a $P(A)B = B = BP(A)$. Vu que $B_{\varphi(n)}$ est un polynôme en A, $B_{\varphi(n)}B = B$ pour tout n. En passant à la limite et grâce à la continuité du produit matriciel, $B^2 = B$. Donc B est un projecteur.

(b) Par la question précédente, $(I_p - A)B = 0 = B(I_p - A)$. D'où les inclusions $\operatorname{Im} B \subset \operatorname{Ker}(I_p - A)$ et $\operatorname{Im}(I_p - A) \subset \operatorname{Ker} B$. Soit $X \in \operatorname{Ker}(I_p - A)$, *i.e.* $AX = X$. Alors (continuité du produit matriciel)

$$BX = \lim B_{\varphi(n)}X = \lim \frac{1}{\varphi(n)+1}\sum_{k=0}^{\varphi(n)} A^k X = X.$$

Donc $X \in \operatorname{Im} B$ et on a l'égalité $\operatorname{Im} B = \operatorname{Ker}(I_p - A)$. Par le théorème du rang et l'inclusion $\operatorname{Im}(I_p - A) \subset \operatorname{Ker} B$, on a aussi l'égalité $\operatorname{Im}(I_p - A) = \operatorname{Ker} B$.

(c) D'après la question précédente, la suite bornée B_n admet une seule valeur d'adhérence, à savoir le projecteur sur $\operatorname{Ker}(I_p - A)$ parallèlement à $\operatorname{Im}(I_p - A)$. Donc dans l'espace vectoriel de dimension finie $\mathcal{M}_p(\mathbb{C})$, la suite (B_n) converge.

(d) Montrons que $\sum M^n$ converge si et seulement si (M^n) est bornée, *i.e.* $\operatorname{Sp} M \subset D_f(0,1)$ et si $\lambda \in \operatorname{Sp} M$ est de module 1, la multiplicité $m(\lambda)$ de la valeur propre λ vaut $\dim E_\lambda(M)$.

On a déjà montré le sens réciproque dans la question précédente. Montrons le sens direct.

Montrons que $\operatorname{Sp} M \subset D_f(0,1)$. Par l'absurde, si X est un vecteur propre associé à la valeur propre λ de module > 1. Alors

$$B_n X = \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n+1} A^k X = \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n+1} \lambda^k X = \frac{1}{n+1}\,\frac{\lambda^{n+1}-1}{\lambda - 1} X.$$

Donc $\|B_n X\| = \dfrac{1}{n+1}\left|\dfrac{\lambda^{n+1}-1}{\lambda-1}\right| \|X\|$. Mais par croissance comparées de $(|\lambda|^n)$ et $\dfrac{1}{n+1}$, cette suite tend vers $+\infty$, donc ne converge pas. Contradiction avec la convergence de $(B_n X)$ (qui résulte de la continuité de $M \mapsto MX$ et de la convergence de B_n).

Supposons que $\lambda \in \operatorname{Sp} M$ est de module 1 et montrons par l'absurde que $m(\lambda) = \dim E_\lambda(M)$, c'est-à-dire $\operatorname{Ker}(M - \lambda I_p) = \operatorname{Ker}(M - \lambda I_p)^{m(\lambda)}$. Par l'absurde : d'après le lemme des noyaux itérés, on a $\operatorname{Ker}(M - \lambda I_p) \subsetneq \operatorname{Ker}(M - \lambda I_p)^2$ puisque $\operatorname{Ker}(M - \lambda I_p) \subsetneq \operatorname{Ker}(M - \lambda I_p)^{m(\lambda)}$. Prenons donc X_2 dans $\operatorname{Ker}(M - \lambda I_p)^2 \setminus \operatorname{Ker}(M - \lambda I_p)$ et posons $X_1 = (M - \lambda I_p)X_2$. Alors $MX_1 = \lambda X_1$ (car $M - \lambda I_p$ envoie $\operatorname{Ker}(M - \lambda I_p)^2$ dans $\operatorname{Ker}(M - \lambda I_p)$) et $MX_2 = \lambda X_2 + X_1$. D'où (binôme) $M^n X_2 = \lambda^n X_2 + n\lambda^{n-1} X_1$. Donc

$$\frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n} A^k X_2 = \frac{1}{n+1}\,\frac{\lambda^{n+1}-1}{\lambda-1} X_2 + \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n} k\lambda^{k-1} X_1.$$

Le terme à droite $\dfrac{1}{n+1}\,\dfrac{\lambda^{n+1}-1}{\lambda-1} X_2$ tend vers 0 puisque (λ^n) est bornée. Si $\lambda = 1$, le deuxième terme de droite vaut $\dfrac{1}{n+1}\,\dfrac{n(n+1)}{2} X_1$ et tend en norme vers $+\infty$, contradiction. Sinon, il s'écrit $\dfrac{1}{n+1} P'(\lambda) X_1$ où

$$P(\lambda) = \sum_{k=0}^{n} \lambda^{k-1} = \frac{\lambda^{n+1}-1}{\lambda-1}.$$

Or,

$$P'(\lambda) = \frac{(n+1)\lambda^n(\lambda-1) - (\lambda^{n+1}-1)}{(\lambda-1)^2}.$$

Donc $\dfrac{1}{n+1} P'(\lambda) = \dfrac{\lambda^n}{\lambda - 1}$, qui ne converge pas. Donc le terme de droite diverge, contradiction.

8) Montrons que $\sum M^n$ converge si et seulement si $\operatorname{Sp} M \subset D(0,1)$.

$\boxed{\Longrightarrow}$ Soit X un vecteur propre pour $\lambda \in \operatorname{Sp} M$. Alors $\sum M^n X = \sum \lambda^n X$ converge par continuité de l'application $M \mapsto MX$. Donc $\sum \lambda^n$ converge et $|\lambda| < 1$.

$\boxed{\Longleftarrow}$ Quitte à trigonaliser comme précédemment, on peut supposer que $M = \operatorname{Diag}(M_1, \dots, M_r)$ avec comme précédemment $\operatorname{Sp} M_j = \{\lambda_j\}$. On écrit chaque bloc M_j sous la forme $\lambda_j I_q + N_j$ avec N_j nilpotente. On a donc par la formule du binôme que les coefficients de M_j^n sont de la forme $\displaystyle\sum_{k=0}^{d-1}\binom{n}{k}\lambda^{n-k}\alpha_k$.

Choisissons $\varepsilon > 0$ tel que $|\lambda_j| + \varepsilon < 1$. Par croissances comparées de $(|\lambda| + \varepsilon)^n$ et de $\alpha\lambda^n\dbinom{n}{k}$, chaque $\dbinom{n}{k}\lambda^{n-k}\alpha_k$ est le terme général d'une série absolument convergente. Donc $\sum M^n$ converge.