Vous traiterez un des deux problèmes, au choix, en indiquant bien clairement sur votre première page le sujet choisi. Le deuxième problème est nettement plus conceptuel que le premier.

Problème n° 1

Rédiger le problème "**Travaux dirigés 1 - autour des suites géométriques matricielles**".

Problème n° 2

Dans tout le problème, n est un entier naturel non nul et F_n désigne l'ensemble des polynômes complexes unitaires de degré n.

L'objectif du problème et de répondre aux deux questions suivantes.

Question 1 *Les racines de $P \in \mathbb{C}[X]$ dépendent-elles continûment de P ?*

Question 2 *Existe-t-il une fonction continue qui à $P \in \mathbb{C}[X]$ associe une de ses racines ?*

La dernière partie en donnera des applications en algèbre linéaire.

I Applications propres

Soit $f : A \to B$ une application où A et B sont deux parties des $\mathbb{C}$-espaces vectoriels normés E et F (ou plus généralement des espaces métriques). On dit que f est propre si elle est continue et que toute image réciproque d'un compact de B est un compact de A. On dit que f est fermée si l'image de tout fermé de A est un fermé de B.

1) Parmi les fonctions continues suivantes de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, lesquelles sont propres ? (Justifier.)
$$x \mapsto x^2 - x \qquad x \mapsto \sin x \qquad x \mapsto \arctan x \qquad x \mapsto e^x.$$
2) Soit E un $\mathbb{C}$-espace vectoriel normé de dimension finie et N une norme sur E. Montrer que N est propre.
3) Soit E et F deux $\mathbb{C}$-espaces vectoriels de dimension finie et $f \in \mathscr{L}(E,F)$. À quelle condition nécessaire et suffisante portant sur $\operatorname{Ker} f$ l'application f est-elle propre ?
4) Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue. Montrer que f est propre si et seulement si $\lim\limits_{x\to+\infty} |f(x)| = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} |f(x)| = +\infty$.
5) Montrer qu'une application propre est fermée. (On rappelle – et on admettra ou démontrera – que si (u_n) est une suite convergente de limite l, alors $\{u_n | n \in \mathbb{N}\} \cup \{l\}$ est compact.)
6) Soit $P \in \mathbb{C}[X]$ non constant. Montrer que l'application polynomiale associée est propre.

II Distance de Hausdorff

Soit $\mathscr{K}$ l'ensemble des parties compactes non-vides de $\mathbb{C}$. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on désigne par $\mathscr{P}_n(\mathbb{C})$ l'ensemble des parties finies de $\mathbb{C}$ de cardinal au plus n.

Pour toute partie non vide A de $\mathbb{C}$ et tout réel $\alpha > 0$, on note
$$A^\alpha = \{x \in \mathbb{C} \,|\, d(x, A) \leqslant \alpha\}.$$
L'ensemble A^α s'appelle l'entourage d'ordre α de A.

7) Soit $A \in \mathscr{K}$ et $\alpha, \beta > 0$. Montrer que :
   (i) $A^0 = A$;
   (ii) $A^\alpha = \cap_{r>\alpha} A^r$;
   (iii) $\left(A^\alpha\right)^\beta \subset A^{\alpha+\beta}$.
8) Soit $A, B \in \mathscr{K}$. On pose $h(A,B) = \inf\{\alpha > 0 | B \subset A^\alpha\}$.
Montrer que pour tout $A, B, C \in \mathscr{K}$, on a $h(A,C) \leqslant h(A,B) + h(B,C)$.
9) Soit $A, B \in \mathscr{K}$. On pose $\delta(A,B) = \max(h(A,B), h(B,A))$. Montrer que δ est une distance sur $\mathscr{K}$.

Pour les deux questions suivantes, on ne soulèvera aucune difficulté due au fait que $(\mathscr{K}, \delta)$ est un espace métrique mais a priori pas une partie d'un espace vectoriel normé.

10) Montrer que $\mathscr{P}_n(\mathbb{C})$ est une partie fermée de $\mathscr{K}$. (Indication : utiliser la bonne caractérisation des fermés.)
11) Soit $\pi : \mathbb{C}^n \to \mathscr{P}_n(\mathbb{C})$ définie par $\pi(x_1, \ldots, x_n) = \{x_1, \ldots, x_n\}$. Montrer que π est continue surjective et propre.

III Dépendance continue des racines d'un polynôme en fonction de ses coefficients

Soit $p \in [\![1, n]\!]$. Pour $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{C}^n$, on note $\|x\| = \max\limits_{1\leqslant j\leqslant n} |x_j|$. On sait que c'est une norme sur $\mathbb{C}^n$.

On note désormais $\sigma_p : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$ la p^e fonction symétrique élémentaire, *i.e.*

$$\sigma_p(x_1, \ldots, x_n) = \sum_{1 \leqslant i_1 < \cdots < i_p \leqslant n} x_{i_1} \cdots x_{i_p} = \sum_{I \subset [\![1,n]\!], |I|=p} \prod_{i \in I} x_i.$$

Soit $S : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$ définie par $S(x) = (\sigma_1(x), \ldots, \sigma_n(x))$ où $x = (x_1, \ldots, x_n)$. On définit aussi l'application $Z : F_n \to \mathscr{P}_n(\mathbb{C})$ qui à un polynôme P associe l'ensemble $Z(P)$ de ses racines.

12) Montrer que S est une application continue surjective.

13) Montrer que pour tout $x \in \mathbb{C}^n$, $\|x\| \leqslant 1 + \|S(x)\|$. En déduire que S est propre.

14) Soit F un espace vectoriel normé et $f : \mathbb{C}^n \to F$ continue. On dit que f est symétrique si pour toute permutation σ dans le groupe symétrique S_n et tout $x \in \mathbb{C}^n$, on a $f(x_1, \ldots, x_n) = f(x_{\sigma(1)}, \ldots, x_{\sigma(n)})$.
Soit $f : \mathbb{C}^n \to F$ continue et symétrique.
    (a) Montrer qu'il existe une unique fonction $g : \mathbb{C}^n \to F$ telle que $f = g \circ S$.
    (b) Montrer que la fonction g précédente est continue.

15) Montrer que $Z : F_n \to \mathscr{P}_n(\mathbb{C})$ est continue.

Ceci démontre que l'ensemble des racines d'un polynôme dépend continûment de ses coefficients, pour la distance de Hausdorff. On a répondu à la question 1.

16) Montrer que la fonction de F_n dans $\mathbb{R}$ qui à tout polynôme associe le maximum des modules de ses racines est continue.

On admet le théorème suivant :

Théorème du relèvement *Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $\varphi : I \to \mathbb{U}$ une application continue. Alors il existe $\theta : I \to \mathbb{R}$ continue telle que pour tout $t \in I$, $\varphi(t) = e^{i\theta(t)}$.*

17) (a) Démontrer qu'il n'existe pas d'application continue $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ continue vérifiant pour tout $z \in \mathbb{C} : \left(f(z)\right)^n = z$.
    (b) En déduire qu'il n'existe pas d'application continue $f : F_n \to \mathbb{C}$ qui associe à P une de ses racines.
On a donc aussi répondu à la question 2.

IV Application au spectre des matrices

18) Montrer que l'application qui à une matrice de $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ associe l'ensemble de ses valeurs propres complexes est continue. (Lorsqu'on munit l'espace d'arrivée de la distance de Hausdorff.)

19) Montrer que l'ensemble des matrices de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ dont toutes les valeurs propres complexes sont réelles est un fermé de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.

20) Montrer qu'il n'existe pas d'application continue qui associe à une matrice de $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ une de ses valeurs propres.

21) On appelle rayon spectral de A le réel $\rho(A) = \max_{\lambda \in \mathrm{Sp}\, A} |\lambda|$. Montrer que l'application $\rho : \mathscr{M}_n(\mathbb{C}) \to \mathbb{R}$ est continue.

22) Montrer que l'ensemble des matrices de $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ qui admettent n valeurs propres distinctes est un ouvert dense de $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$.