CHAPITRE 7

ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES LINÉAIRES

Ici, $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, I est un intervalle de $\mathbb{R}$ et E est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie.

I Équation différentielles linéaires d'ordre un

1 Le théorème de Cauchy-Lipschitz linéaire

Définition *Une équation différentielle linéaire* résolue *définie sur I et à valeurs dans E est une équation de la forme*

$$x'(t) = a(t)\big(x(t)\big) + b(t) \qquad (\mathcal{E})$$

où $a : I \to \mathcal{L}(E)$, $b : I \to E$ sont deux fonctions. Une solution de $(\mathcal{E})$ est une fonction dérivable $f : I \to E$ telle que pour tout $t \in I$, $f'(t) = a(t)\big(f(t)\big) + b(t)$.

Théorème de Cauchy-Lipschitz linéaire *Soit $a : I \to \mathcal{L}(E)$ et $b : I \to E$ continues. Soit $x_0 \in E$, $t_0 \in I$. Alors le problème de Cauchy*

$$\begin{cases} x' &= a(t)x + b(t) \\ x(t_0) &= x_0 \end{cases}$$

admet une unique solution définie sur I ; elle est de classe $\mathcal{C}^1$.

Démonstration ◂

1. La fonction $x : I \to E$ est solution du problème de Cauchy si et seulement si x est continue et que pour tout $t \in I$:
$$x(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} \big(a(s)\big(x(s)\big) + b(s)\big)ds.$$
2. On définit une suite de fonctions continues par $x_0(t) = x_0$ et
$$x_{n+1}(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} \big(a(s)\big(x_n(s)\big) + b(s)\big)ds.$$
3. Si $S \subset I$ est un segment, on note $C_S = \|x_1 - x_0\|_{\infty,S}$ et $M_S = \sup_{u \in S} |||a(s)|||$. Alors pour tout $n \in \mathbb{N}$,
$$\|x_{n+1} - x_n\|_{\infty,S} \leqslant C_S \frac{M_S^n |t - t_0|^n}{n!}.$$
4. La suite (x_n) converge uniformément sur S, simplement sur I, vers une fonction g. Alors g est solution du problème de Cauchy.

5. Unicité : si h est une autre solution. Pour $S \subset I$ segment, on pose $K_S = \|g-h\|_{\infty,S}$. Alors pour tout $n \in \mathbb{N}$,
$$\|g-h\|_{\infty,S} \leqslant K_S \frac{M_S^n |t-t_0|^n}{n!}.$$
Donc $g = h$.

▶

2 Systèmes différentiels d'ordre 1

Proposition *Soit $(\mathcal{E})$ $x' = a(t)x$ où $a : I \to \mathcal{L}(E)$ est continue. On note $\mathcal{S}_\mathcal{E}$ l'ensemble des solutions de $\mathcal{E}$. Alors $\mathcal{S}_\mathcal{E}$ est un espace vectoriel de dimension* $\dim E$. *De plus, pour tout $t_0 \in I$, l'application*
$$\begin{cases} \mathcal{S}_\mathcal{E} & \longrightarrow & E \\ x & \longmapsto & x(t_0) \end{cases}$$
est un isomorphisme de $\mathbb{K}$-espace vectoriel.

Remarque Il n'existe pas de méthode générale pour résoudre une équation différentielle linéaire de cette forme. En particulier, si $A(t)$ est une primitive de $a(t)$, *on n'a pas* $\frac{d}{dt}e^{A(t)} = A'(t)e^{A(t)}$.

Définition *On choisit une base $\mathcal{B}$ de E. Soit $(\mathcal{E})$: $x' = a(t)x$ où $a : I \to \mathcal{L}(E)$ est continue. On note $\mathcal{S}_\mathcal{E}$ l'ensemble des solutions de $\mathcal{E}$. Une base $(x_1, \dots, x_n)$ de $\mathcal{S}_\mathcal{E}$ s'appelle un système fondamental de solutions. Si $(x_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ une famille d'éléments de $\mathcal{S}_\mathcal{E}$, on dispose de l'application de I dans $\mathbb{R}$ donnée par $w(t) = \det_\mathcal{B}(x_1(t), \dots, x_n(t))$ appelé wronskien de la famille $(x_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$.*

Remarque Si $E = \mathbb{R}^n$, on prend systématiquement la base canonique.

Proposition *Soit $(x_1, \dots, x_n)$ une famille de solution de l'équation $(\mathcal{E})$ $x' = a(t)x$ où $a : I \to \mathcal{L}(E)$ est continue. Alors*

1. *soit $w(t)$ est nul pour un certain $t \in I$ et ceci équivaut à ce que $(x_1, \dots, x_n)$ soit liée ; a fortiori, $w(t)$ est nul pour tout $t \in i$;*
2. *soit w ne s'annule pas et ceci équivaut à ce que la famille $(x_1, \dots, x_n)$ est un système fondamental de solution de $\mathcal{E}$.*

Schéma de preuve ◀ Si w s'annule en t_0, il existe des scalaires $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{K}$ non tous nuls tels que $\lambda_1 x_1(t_0) + \cdots \lambda_n x_n(t_0) = 0$. Mais alors $x = \lambda_1 x_1 + \cdots \lambda_n x_n$ est une solution de $(\mathcal{E})$ qui s'annule en t_0, donc identiquement nulle. Donc $x(t)$ est nulle pour tout t. On a l'implication directe de (1).

Si w ne s'annule pas : soit $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{K}$ une famille de scalaires telle que $x = \lambda_1 x_1 + \cdots \lambda_n x_n = 0$. En évaluant en un $t \in I$, on obtient que les λ_i sont tous nuls. D'où l'implication directe de (2).

Vu que les termes de droites et de gauches sont mutuellement exclusifs, on a l'équivalence. ▶

Remarques

1. Le wronskien est soit identiquement nul, soit ne s'annule jamais.
2. Dans le cas où $E = \mathbb{K}^n$, on a un système fondamental de solution en résolvant dans $\mathcal{C}^1(I, \mathcal{M}_n(\mathbb{K}))$ le système linéaire $R'(t) = A(t)R(t)$ avec la condition initiale $R(t_0) = I_n$ d'inconnue R (appelée matrice résolvante). Les colonnes de R forment un système fondamental de solution.

Proposition (Principe de superposition) *Soient $a : I \to \mathcal{L}(E)$, $b_1, b_2 : I \to E$ continues. Si x_i est une solution de $x' = a(t)x + b_i$, alors $\lambda x_1 + \mu x_2$ est solution de $x' = a(t)x + (\lambda b_1(t) + \mu b_2(t))$.*

Proposition (Structure de l'espace des solutions) *Soit* $(\mathcal{E}) : x' = a(t)x + b(t)$ *où* $a : I \to \mathcal{L}(E)$ *et* $b : I \to E$*. Soit* $(\mathcal{H}) : x' = a(t)x$ *l'équation homogène associée. On suppose que* x_0 *est solution de* $\mathcal{E}$*. Alors les solutions de* $\mathcal{E}$ *sont exactement les* $x_0 + y$ *où* y *est solution de* $\mathcal{H}$*. Autrement dit,* $\mathcal{S}_{\mathcal{E}}$ *est un espace affine de direction* $\mathcal{S}_{\mathcal{H}}$*.*

Proposition (Méthode de la variation des constantes pour les systèmes linéaires) *Soit* $a : I \to \mathcal{L}(E)$ *et* $b : I \to E$ *continues. Soit* $(x_1, \dots, x_n)$ *un système fondamental de solutions de* $x' = a(t)x$*. Alors le système système différentiel d'inconnues* $\lambda_1, \dots, \lambda_n$

$$\lambda_1'(t)x_1 + \cdots + \lambda_n'(t)x_n = b(t)$$

admet n *fonctions de classe* $\mathcal{C}^1$ $\lambda_1, \dots, \lambda_n : I \to \mathbb{R}$ *solutions et les solutions de* $x' = a(t)x+b$ *sont exactement les* $\lambda_1 x_1 + \cdots + \lambda_n x_n$*.*

Schéma de preuve ◀ Quitte à choisir une base $\mathcal{B}$ de E, on se ramène au cas où $A : I \to M_n(\mathbb{K})$, $B : I \to E$ et $(X_1, \dots, X_n)$ est un système fondamental de solutions de $X' = A(t)X$. En notant $W(t)$ (matrice wronskienne) la matrice dont la j-ème colonne est X_j, et $\Lambda(t)$ la matrice colonne dont la j-ème coordonnée est λ_j, on a $\lambda_1'(t)X_1(t) + \cdots + \lambda_n'(t)X_n(t) = W(t)\Lambda'(t)$. De même, $A(t)W(t) = W'(t)$.
D'abord, le système différentiel d'ordre 1 $W\Lambda' = B$ d'inconnue Λ admet une solution de classe $\mathcal{C}^1$: prendre une primitive de $t \mapsto W(t)^{-1}\Lambda(t)$. Ensuite, on a que

$$\begin{aligned} W\Lambda \text{ est solution de } \mathcal{E} &\iff (W\Lambda)' = A(W\Lambda) + B \\ &\iff W'\Lambda + W\Lambda' = AW\Lambda + B \iff W\Lambda' = B. \end{aligned}$$

▶

Remarque

1. La preuve précédente est le schéma pratique de résolution.
2. On pouvait donner une autre preuve plus rapide mais moins constructive en remarquant que les $\lambda_j'(t)$ existent pour tout t par les formules de Cramer. Et sont continues car $\det W(t)$ ne s'annule pas.

Exemple Résolution du système

$$\begin{cases} (t^2+1)x' &= tx + y + 2t^2 - 1 \\ (t^2+1)y' &= -x + ty + 3t \end{cases}$$

On remarque (sic) que les fonctions $t \mapsto (t, 1)$ et $t \mapsto (-1, t)$ sont solutions. La matrice wronskienne associée est $W(t) = \begin{pmatrix} t & -1 \\ 1 & t \end{pmatrix}$. Si $\lambda = \begin{pmatrix} \lambda & \mu \end{pmatrix}$, alors $\Lambda'(t) = W(t)^{-1}B(t)$ où $B(t) = \begin{pmatrix} 2t^2 - 1 & 3t \end{pmatrix}$. Par intégration, on trouve $\lambda(t) = \ln(1+t^2) + \alpha$, $\mu(t) = \arctan t + \beta$. On a les solutions par la méthode de la variation des constantes.

3 Systèmes différentiels linéaires à coefficients constants

Dans cette section, $a \in \mathcal{L}(E)$, donc ne dépend pas de t.

Proposition *Soit* $t_0 \in \mathbb{R}$*,* $x_0 \in E$ *et* $(\mathcal{C})$ *le problème de Cauchy*

$$\begin{cases} x' = ax \\ x(t_0) = x_0. \end{cases}$$

Alors l'unique solution de $(\mathcal{C})$ *est* $x : t \mapsto e^{(t-t_0)a}x_0$ *(exponentielle d'un endomorphisme).*

Schéma de preuve ◀ C'est bien une solution, unique d'après Cauchy-Lipschitz. ▶

Proposition *Soit $a \in \mathcal{L}(E)$, $b : I \to E$ continue, $t_0 \in I$ et $x_0 \in E$. Alors le problème de Cauchy*

$$\left\{ \begin{array}{rcl} x' &=& ax + b(t) \\ x(t_0) &=& x_0 \end{array} \right.$$

admet une unique solution φ, donnée par

$$\begin{aligned} \varphi(t) &= e^{(t-t_0)a}x_0 + \int_{t_0}^{t} e^{(t-s)a} b(s)\mathrm{d}s \\ &= e^{(t-t_0)a}\left(x_0 + \int_{t_0}^{t} e^{(t_0-s)a} b(s)\mathrm{d}s\right). \end{aligned}$$

Remarque Dans la pratique, on ne calcule que rarement e^{ta} pour résoudre un système différentiel homogène. On applique plutôt la méthode qui suit.

Proposition *Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, X_0 un vecteur propre de A de valeur propre associé λ. Alors $t \mapsto \mathrm{e}^{\lambda t} X_0$ est solution de $X' = AX$.*

De plus, si $(X_1, \ldots, X_n)$ est une base de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ formée de vecteurs propres associés respectivement aux valeurs propres $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$. Alors $(t \mapsto \mathrm{e}^{\lambda_k t} X_k)_{1 \leqslant k \leqslant n}$ est un système fondamental de solutions de $X' = AX$.

Exemples

1. Résoudre $(\mathcal{E}) : X' = AX + B$ où $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$ et $B(t) = \begin{pmatrix} e^{3t} \arctan(3t) \\ 2e^{3t} \arctan(3t) \end{pmatrix}$.
2. Résoudre le système
$$\left\{ \begin{array}{rcl} x' &=& 2x + 2y + 3z \\ y' &=& x + 3y + 3z \\ z' &=& -x - 5y - 5z \end{array} \right.$$
(On pourra trouver explicitement la décomposition de Dunford.)

II Équations différentielles linéaires scalaires

1 Le théorème de Cauchy-Lipschitz pour les équations scalaires

Définition *Une équation différentielle linéaire scalaire d'ordre $n \geqslant 1$ définie sur I à valeurs dans $\mathbb{K}$ est une équation $\mathcal{E}$ de la forme*

$$\alpha_n(t)x^{(n)} + \alpha_{n-1}(t)x^{(n-1)} + \cdots + \alpha_0(t)x = b(t)$$

où $\alpha_0, \ldots, \alpha_0, b : I \to \mathbb{K}$.

Une solution de $\mathcal{E}$ est une fonction n fois dérivable $f : I \to E$ telle que pour tout $t \in I$,

$$\alpha_n(t)f^{(n)}(t) + \alpha_{n-1}(t)f^{(n-1)}(t) + \cdots + \alpha_0(t)f(t) = b(t).$$

Remarques

1. Si α_n ne s'annule pas, l'équation précédente se ramène à une équation résolue
$$x^{(n)} = -a_{n-1}(t)x^{(n-1)} - \cdots - a_0(t)x + b_0(t).$$
2. On a encore le principe de superposition.

3. (Très important : méthode de l'espace des phases.) On considère le système différentiel (avec les a_i et b continues)

$$(S) \quad \begin{cases} x_1' = x_2 \\ x_2' = x_3 \\ \vdots \\ x_{n-1}' = x_n \\ x_n' = -a_0(t)x_1 - \cdots - a_{n-1}(t)x_n + b(t) \end{cases}$$

Alors la fonction vectorielle $X : t \mapsto \begin{pmatrix} x_1(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{pmatrix}$ est solution de classe $\mathcal{C}^1$ de (S) si et seulement si $y = x_1$ est solution de $(\mathcal{E})$.

Théorème de Cauchy-Lipschitz linéaire *Soient $a_0, \ldots, a_{n-1}, b : I \to \mathbb{K}$ continues, $t_0 \in I$ et $x_0, \ldots, x_{n-1} \in \mathbb{K}$. Alors le problème de Cauchy*

$$\begin{cases} x^{(n)} + a_{n-1}(t)x^{(n-1)} + \cdots + a_0(t)x = b(t) \quad (\mathcal{E}) \\ x^{(k)}(t_0) = x_k \qquad \forall k \in [\![0, n-1]\!] \end{cases}$$

admet une unique solution φ ; φ est de classe $\mathcal{C}^n$.

De plus, les solutions de $x^{(n)} + a_{n-1}(t)x^{(n-1)} + \cdots + a_0(t)x = b(t)$ sont de classe $\mathcal{C}^n$ et forment un espace affine de dimension n dont la direction est l'espace des solutions de l'équation homogène associée.

Schéma de preuve ◀ On a l'existence par la méthode de l'espace des phases. Par superposition, il suffit de prouver que $x \mapsto X = (x, x', \ldots x^{(n-1)})$ est un isomorphisme entre les solutions de $(\mathcal{E})$ et celles de (S). Ce qui est clair. ▶

2 Équations différentielles linéaires scalaires à coefficients constants

Proposition *Soient $a_0, \ldots, a_{n-1} \in \mathbb{K}$ et $\mathcal{E}$ l'équation différentielle $x^{(n)} + a_{n-1}x^{(n-1)} + \cdots + a_0x = 0$. On appelle* polynôme caractéristique *de $\mathcal{E}$ le polynôme $P = X^n + a_{n-1}X^{n-1} + \cdots + a_0$. Soient $\lambda_1, \ldots, \lambda_r \in \mathbb{C}$ les racines de P de multiplicités respectives $m_1, \ldots, m_r$. Alors les solutions de $\mathcal{E}$ sont les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par*

$$t \longmapsto Q_1(t)e^{\lambda_1 t} + \cdots + Q_r(t)e^{\lambda_r t}$$

où Q_k est un polynôme de degré $\leqslant m_k - 1$.

Exemple Résoudre sur $\mathbb{C}$ $y''' = 3y' - 2y$.

Proposition *Soient $a_0, \ldots, a_{n-1} \in \mathbb{R}$ et $\mathcal{E}$ l'équation différentielle $x^{(n)} + a_{n-1}x^{(n-1)} + \cdots + a_0x = 0$ et $P = X^n + a_{n-1}X^{n-1} + \cdots + a_0$ son polynôme caractéristique. Soient $r_1, \ldots, r_p \in \mathbb{R}$ ses racines réelles de multiplicités respectives $m_1, \ldots, m_p$ et $\lambda_k = \alpha_k + i\beta_k \in \mathbb{C}$, $1 \leqslant k \leqslant q$ ses racines non réelles de multiplicités respectives $n_1, \ldots, n_q$ Alors les solutions de $\mathcal{E}$ sont les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par*

$$t \longmapsto \sum_{j=1}^{p} Q_j(t)e^{\lambda_j t} + \sum_{k=1}^{q} \big(R_k(t)e^{\alpha_k t}\cos(\beta_k t) + S_k(t)e^{\alpha_k t}\sin(\beta_k t)\big)$$

où Q_j est un polynôme de degré $\leqslant m_j - 1$ et R_k, S_k sont des polynômes de degré $\leqslant n_k - 1$.

Exemple Résoudre sur $\mathbb{R}$ $y'''' - 2y''' + 3y'' - 2y' + y = 0$.

3 Équations différentielles linéaires scalaires d'ordre 1 et 2

Exemple *(Utilisation de la formule explicite d'une solution de $x' = a(t)x + b(t)$ sur $\mathbb{R}$, i.e. méthode de l'inconnue connue.)* Soit $k \in]0, +\infty[$ et $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$ telle que $f' + kf$ est bornée. Montrer que f est bornée.

Proposition *Soit $(\mathcal{E})$ l'équation $x'' = a(t)x' + b(t)x$ et (x_1, x_2) un couple de solution. On appelle wronskien de (x_1, x_2) la fonction $w = x_1x_2' - x_1'x_2$. Alors w est soit identiquement nulle, soit jamais nulle, et dans ce deuxième cas (x_1, x_2) est un système fondamental de solutions.*

Schéma de preuve ◀ (Méthode de l'espace des phases) Soit $X_i = \begin{pmatrix} x_i \\ x_i' \end{pmatrix}$. Alors (x_1, x_2) est libre *ssi* (X_1, X_2) est libre *ssi* $w(t) \neq 0$ pour tout t. ▶

Proposition (Méthode de la variation des constantes pour l'ordre 2) *Soit $(\mathcal{E})$ l'équation $x'' = a_1(t)x' + a_0(t)x + b(t)$ avec $a_1, a_0, b : I \to \mathbb{K}$ continues et (x_1, x_2) un système fondamental de solutions de l'équation homogène associée. Alors les solutions de $(\mathcal{E})$ forment un espace affine de dimension 2 et sont de la forme $\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2$ avec*

$$\begin{cases} \lambda_1' x_1 + \lambda_2' x_2 &= 0 \\ \lambda_1' x_1' + \lambda_2' x_2' &= b(t) \end{cases}$$

où $\lambda_1, \lambda_2 : I \to \mathbb{K}$ sont de classe $\mathcal{C}^1$.

Exemple Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation $y'' + y = \tan t$.

4 Quelques techniques usuelles

a Raccordements des solutions

Résoudre sur $\mathbb{R}$ les équations $tx' - x = 0$ et $t^2x' - x = 0$.

b Méthode de la variation de la constante

Méthode de la variation de **la** *constante* pour une équation différentielle linéaire d'ordre 2 définie sur I

$$(\mathcal{E}) \quad x'' + a_1(t)x' + a_0(t)x = b(t).$$

On suppose connue g_0 une solution de l'équation homogène associée et qui ne s'annule pas. On peut trouver toute les solutions de $(\mathcal{E})$ en les cherchant de la forme $y(t) = \lambda(t)g_0(t)$; on est conduit à une équation différentielle d'ordre 1. (Il s'agit en fait d'un changement de fonction inconnue.)

Application : équation d'Euler $t^2x'' + atx' + bx = d(t)$ où $a, b \in \mathbb{R}$ et $d : I \to \mathbb{R}$ continue : chercher les solutions sur $]-\infty, 0[$ et $]0, +\infty[$ de la forme $|t|^\alpha$. Exemple : résoudre $t^2x'' + 5tx' + 4x = t^2$.

c Expression explicite des solutions

(*cf* TD n° 4.) Soit φ est une fonction continue à support compact. L'équation $(\mathcal{E})$: $x'' - x = \varphi$ admet-elle des solutions à support compact ?

d Utilisation du wronskien

(*cf* TD n° 1.)

e Étude qualitative

Étude graphique de $x' = t + x$. Isoclines, points d'inflexions.