Exercice 1 : Résoudre sur $\mathbb{C}$ puis sur $\mathbb{R}$ l'équation différentielle

$$y^{(5)}+6y^{(4)}+13y^{(3)}+14y''+12y'+8y=0.$$

Exercice 2 : Résoudre sur $\mathbb{C}$ puis sur $\mathbb{R}$ les systèmes différentiels :

$$\left\{\begin{array}{lcl} x' & = & 3x-z \\ y' & = & -x+2y+z \\ z' & = & x+z \end{array}\right. \qquad \left\{\begin{array}{lcl} x' & = & 5x+2y+2z \\ y' & = & -x-2y-z \\ z' & = & -4x+3y \end{array}\right.$$

Exercice 3 * : Soit $\alpha\in\mathbb{R}$. Résoudre l'équation différentielle $y''+\alpha y=\sin\alpha t$.

Exercice 4 : Résoudre sur $\mathbb{C}$ l'équation différentielle $z'=\alpha z$ où $\alpha\in\mathbb{C}$. En déduire les solutions du système différentiel réel :

$$\left\{\begin{array}{lcl} x'(t) & = & x(t)-y(t) \\ y'(t) & = & x(t)+y(t) \end{array}\right.$$

Exercice 5 * : Soit $A\in\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Donner une condition nécessaire et suffisante sur A pour que toutes les solutions de l'équation différentielle $X'=AX$ soient bornées sur $\mathbb{R}$ (resp. tendent vers 0 en $+\infty$).

Exercice 6 – Équations d'Euler : Résoudre les équations

$$x^2y''-xy'-3y=x^4 \tag{1}$$

$$x^2y''-3xy'+4y=0. \tag{2}$$

Exercice 7 : Déterminer toutes les fonctions deux fois dérivables sur $\mathbb{R}$ telles que pour tous $x,y\in\mathbb{R}$, $f(x+y)+f(x-y)=2f(x)f(y)$.

Exercice 8 : Soit $g:\mathbb{R}^+\to\mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$ telle que $\lim\limits_{+\infty}(g'+g)=0$. Montrer que $\lim\limits_{+\infty}g=0$. Même question avec g seulement dérivable (**).

Exercice 9 : Soit $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ continue et bornée et $a>0$. Montrer que l'équation différentielle $y''-a^2y=f$ possède une unique solution bornée sur $\mathbb{R}$.

Exercice 10 * : Soit $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ deux fois dérivable telle que $f(0)=f(1)=0$ et $f''+2f'+f\geqslant 0$. Montrer que $f\leqslant 0$ sur $[0,1]$.

Exercice 11 (Mines 2017) : Soient $a,b:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ continues et 1-périodiques, et x une solution de $x''+ax'+bx=0$ telles que $x(0)=x(1)=0$. Montrer que x s'annule en tout point de $\mathbb{Z}$.

Exercice 12 * : Soit $f:\mathbb{R}^+\to\mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^2$ telle que $f''+3f'+2f$ tend vers 0 en $+\infty$. Montrer que f, f' et f'' tendent vers 0 en $+\infty$.

Exercice 13 * : Soit $f\in\mathcal{C}^2(\mathbb{R},\mathbb{R})$ telles que $f+f''\geqslant 0$. Montrer que pour tout $x\in\mathbb{R}$, $f(x)+f(x+\pi)\geqslant 0$.

Exercice 14 * : Soient $f,g:[a,b]\to\mathbb{R}$ continues telles que $f\leqslant 0$. Montrer que $y''+fy=g$ admet une unique solution telle que $y(a)=y(b)=0$.

Exercice 15 : Déterminer les couples $(a,b)\in\mathbb{R}^2$ tels que toutes les solutions de $y''+ay'+by=0$ soient bornées sur $\mathbb{R}^+$.

Exercice 16 * : Soient $a,b:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ deux fonctions continues telles que $\lim\limits_{t\to+\infty}b(t)=0$ et pour tout $t\in\mathbb{R}$, on a $a(t)\geqslant 1$. Montrer que toute solution de l'équation différentielle $y'+ay=b$ tend vers 0 en $+\infty$.

Exercice 17 * – Une équation intégrale : En utilisant la formule de Taylor - reste intégrale, résoudre l'équation intégrale dans $\mathcal{C}(\mathbb{R},\mathbb{R})$

$$f(x)=x+\frac{1}{2}\int_0^x (x-t)^2 f(t)dt$$

d'inconnue la fonction continue f.

Exercice 18 * : Soient y_1,y_2 deux solutions linéairement indépendantes de $y''+a(t)y'+b(t)y=0$ où a et b sont des fonctions réelles continues sur l'intervalle I. Montrer que les zéros de y_1 sont isolés et qu'entre deux zéros consécutifs de y_1, il y a un unique zéro de y_2.

Exercice 19 : On considère le système différentiel

$$\left\{\begin{array}{lcl} x'(t) & = & -c(t)y(t)+b(t)z(t) \\ y'(t) & = & c(t)x(t)-a(t)z(t) \\ z'(t) & = & -b(t)x(t)+a(t)y(t) \end{array}\right.$$

où $a,b,c:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ sont trois fonctions continues. Soit $t\mapsto M(t)$ une solution. Montrer qu'il existe un vecteur $\overrightarrow{\Omega}(t)$ tel que $\dfrac{d\overrightarrow{M}}{dt}=\overrightarrow{\Omega}(t)\wedge\overrightarrow{OM}(t)$. En déduire que $M(t)$ varie sur une sphère de centre O.

Exercice 20 ** : Pour tout $x\geqslant 0$, on pose $f(x)=\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\sin t}{x+t}\mathrm{d}t$ et $g(x)=\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{e^{-tx}}{1+t^2}\mathrm{d}t$. Montrer que f et g sont solutions d'une équation différentielle simple et en déduire $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\sin t}{t}\mathrm{d}t$.

Exercice 21 * : Pour $x>0$, on pose $f(x)=\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-xt}\sin\sqrt{t}\mathrm{d}t.$

1. Exprimer f en fonction de $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-xt}\frac{\cos\sqrt{t}}{\sqrt{t}}dt.$
2. Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^1$ et donner sa limite en $+\infty$.
3. Montrer que f est solution d'une équation différentielle linéaire homogène d'ordre 1.
4. Exprimer f en fonction des fonctions usuelles.

Exercice 22 ** : Étudier la convergence et calculer $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\sin(tx)}{t(1+t^2)}\mathrm{d}t.$

Exercice 23 * :

1. Montrer que les trois droites d'équations $y=m_ix+p_i$ $(i=1,2,3)$ sont parallèles ou concourrantes si et seulement si
$$\begin{vmatrix}1 & m_1 & p_1\\ 1 & m_2 & p_2\\ 1 & m_3 & p_3\end{vmatrix}=0.$$
2. Soit J un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$ et $F:J\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$. Soit (E) l'équation différentielle $y'=F(x,y)$.
Montrer que (E) est une équation linéaire si et seulement si pour tout $x_0\in J$, les tangentes en x_0 aux graphes des solutions de (E) sont parallèles ou concourantes.

Exercice 24 * – Géométrie différentielle : Soit f une fonction réelle dérivable sur un intervalle I de courbe représentative $\mathcal{C}$. On suppose que pour tout $M\in\mathcal{C}$, la tangente à $\mathcal{C}$ en M coupe les deux axes de coordonnées, et que M est au milieu de ces deux points. Caractériser f et déterminer I aussi grand que possible.

Exercice 25 * : Résoudre $x'=|t-x|$.

Exercice 26 * – Étude graphique :
Soit l'équation différentielle
$$x'=1-tx. \tag{3}$$
On appelle isocline de pente m l'ensemble I_m des points du plan où la solution à pour pente m.

1. Déterminer la courbe isocline I_0 de (3) ainsi que la courbe des points d'inflexion. (Déterminer x'' et x'''.)
2. Tracer quelques solutions. On donnera en particulier le tableau de variation.
3. Résoudre (1). (On introduira la fonction $t\mapsto\displaystyle\int_0^t e^{s^2/2}ds$.) Ce résultat est-il utilisable pour tracer les courbes intégrales ?

Exercice 27 (Mines 2013)* :**

1. Soit I un intervalle et $f:I\to\mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$. On suppose que $f'(t)>0$ en tout $t\in I$ tel que $f(t)=0$. Montrer que f s'annule au plus une fois.
2. Soit $f\in\mathcal{C}^1(\mathbb{R},\mathbb{R})$ telle que $f(0)=f'(0)=0$ et pour tout $x\in\mathbb{R}$,
$$f(x)\big(1+f'(x)\big)=x^2.$$
Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^2$.

Exercice 28 ** – Groupes à un paramètre : Soit $\varphi:\mathbb{R}\to GL_n(\mathbb{R})$ un morphisme de groupes continu. Déterminer la limite de $\displaystyle\frac{1}{2t}\int_{-t}^t\varphi(s)\mathrm{d}s$. En déduire que φ est de la forme $t\mapsto e^{tA}$ où $A\in\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Exercice 29 ** – Système de Lax : Soit M une application de classe $\mathcal{C}^1$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Montrer que les conditions suivantes sont équivalentes :

1. il existe une application $P:\mathbb{R}\to GL_n(\mathbb{C})$ de classe $\mathcal{C}^1$ telle que
$$\forall t\in\mathbb{R}\quad M(t)=P(t)M(0)P(t)^{-1};$$
2. il existe une application continue $L:\mathbb{R}\to GL_n(\mathbb{C})$ telle que
$$\forall t\in\mathbb{R}\quad M'(t)=L(t)M(t)-M(t)L(t).$$

Travaux dirigés 1 – Autour de l'équation $x''+qx=0$. ♡

Soit $q:\mathbb{R}^+\to\mathbb{R}$ une fonction continue et (E) l'équation $x''+qx=0$.

1. Soient $a,b,g:\mathbb{R}^+\to\mathbb{R}$ trois fonctions continues avec $a\in\mathcal{C}^1$. Montrer que l'équation $y''+a(t)y'+b(t)y=0$ se ramène à une équation du type (E) via le changement de fonction inconnue $x=e^{A/2}y$ où A est une primitive de a.
2. Montrer que le wronskien d'un couple de solutions de (E) est constant.
3. On suppose q intégrable. Soit f une solution bornée de (E). Montrer que f' a pour limite 0 en $+\infty$. En déduire que f admet des solutions non bornées.
4. On suppose $q\leqslant 0$ et x solution non nulle de (E). Montrer que x admet au plus un zéro. (On pourra utiliser x^2.)
5. *Le théorème de Sturm.*

(a) Soient q_1, q_2 continues telles que $q_1 \leqslant q_2$. Soit x_1 une solution non nulle de $x'' + q_1 x = 0$, $\alpha < \beta$ dans I deux zéros consécutifs de x_1. Soit x_2 une solution de $x'' + q_2 x = 0$. Montrer que x_2 s'annule sur $[\alpha, \beta]$. (Indication : considérer $x_1 x_2' - x_2 x_1'$.)

(b) On suppose qu'il existe deux réels strictement positifs $m \leqslant M$ tels que $m \leqslant q \leqslant M$. Soit x une solution de (E) et α, β deux zéros consécutifs de x solution non nulle de (E). Montrer que $\dfrac{\pi}{\sqrt{M}} \leqslant \beta - \alpha \leqslant \dfrac{\pi}{\sqrt{m}}$.

(c) On suppose que $\lim\limits_{+\infty} q = 1$. Montrer que l'on peut ranger les zéros de x solution non nulle en une suite $(t_n)_n$ strictement croissante et que $t_{n+1} - t_n \to \pi$.

6. On suppose q de classe $\mathcal{C}^1$ croissante et strictement positive. Soit x une solution de (E).
   (a) Montrer que x est bornée.
   (b) Soient $t_2 \geqslant t_1 \geqslant 0$ tels que $x'(t_1) = x'(t_2) = 0$. Montrer que $|x(t_1)| \geqslant |x(t_2)|$.
   (c) Soient $t_1 < t_2 < t_3$ trois zéros consécutifs de x. Montrer que $t_3 - t_2 \leqslant t_2 - t_1$.
7. On suppose q T-périodique avec $T > 0$. Montrer qu'une solution de (E) a soit aucune, soit une, soit une infinité de zéros.

Travaux dirigés 2 – Le lemme de Gronwall

1. Soit $t_0, T \in \mathbb{R}$ avec $T \geqslant t_0$, u et v deux applications continues de $[t_0, t_0 + T]$ dans $\mathbb{R}^+$ et $C > 0$ tels que pour tout $t \in [t_0, t_0 + T]$, $u(t) \leqslant C + \displaystyle\int_{t_0}^{t} u(s)v(s)\mathrm{d}s$.
   Montrer que pour tout $t \in [t_0, t_0 + T]$, $u(t) \leqslant C \exp \displaystyle\int_{t_0}^{t} v(s)\mathrm{d}s$. *(Lemme de Gronwall.)*
2. Soit $A : \mathbb{R}^+ \to \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ continue et intégrable. Montrer que toute solution de $X' = A(t)X$ est bornée sur $\mathbb{R}^+$ et admet une limite en $+\infty$.
3. Application : Soit l'équation différentielle $y'' + \dfrac{1}{t^2} y' + y = 0$. Montrer que pour toute solution f sur $]0, +\infty[$, il existe α, $\beta \in \mathbb{R}$ tels que
$$\lim_{t \to +\infty} (f(t) - \alpha \cos t - \beta \sin t) = 0.$$
   (Indication : poser $P(t) = \left(\begin{smallmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$ et $R = \left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{smallmatrix}\right)$ et résoudre une équation de la forme $Y'(t) - RY(t) = -\dfrac{1}{t^2} PY(t)$.)

Travaux dirigés 3 – Le lemme de Hochschild

Soit $E = \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. Pour tout $f \in E$ et tout $\tau \in \mathbb{R}$, on note f_τ la fonction $x \mapsto f(x + \tau)$ de E. On note $V_f = \mathrm{Vect}(\{f_\tau | \tau \in \mathbb{R}\})$.

1. On suppose que f est solution d'une équation différentielle linéaire homogène à coefficients constants. Montrer que V_f de dimension finie.
2. Soit V un sous-espace vectoriel de E de dimension finie. Montrer qu'il existe un segment I de $\mathbb{R}$ tel que $\|f\|_I = \sup\limits_{t \in I} |f(t)|$ soit une norme sur V.
3. Montrer que si V_f est de dimension finie, alors $f' \in V_f$. En déduire les fonctions $f \in E$ telles que V_f est de dimension finie.

Travaux dirigés 4 – (Centrale 2012) Autour de $y'' + y = f$

Soit $f \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ et (E) l'équation différentielle $y'' + y = f$.

1. Trouver la forme générale des solutions de (E).
2. Montrer qu'il existe une unique solution φ_0 de (E) telle que $\varphi_0(0) = \varphi_0'(0) = 0$ et la déterminer.
3. Que dire de φ_0 si f est paire ? impaire ?
4. Trouver les solutions paires de (E) lorsque f est paire.
5. Si f est 2π-périodique, à quelle condition φ_0 l'est-elle aussi ?
6. On suppose f intégrable sur $\mathbb{R}$.
   (a) Montrer que les solutions de (E) sont bornées.
   (b) Montrer qu'une seule d'entre elles a une limite en $+\infty$.
7. On suppose f monotone sur $\mathbb{R}$, de limite finie en $+\infty$.
   (a) Montrer que les solutions de (E) sont bornées sur $\mathbb{R}^+$.
   (b) Montrer qu'une seule d'entre elles a une limite en $+\infty$. Déterminer cette solution.
8. On suppose f à support compact. À quelle condition nécessaire et suffisante existe-t-il une solution à support compact ?

Indications

Exercice 3. On pourra remarquer que $\sin t$ est la partie imaginaire de e^{it}.

Exercice 4. On pourra considérer $x(t) + iy(t)$, ou dériver une fois de plus, au choix.

Exercice 7. Raisonner par analyse/synthèse et commencer par étudier la parité de f. On pourra ensuite considérer $\alpha = \dfrac{f''(x_0)}{f(x_0)}$.

Exercice 8. Méthode du facteur fantôme.

Exercice 9. On dispose d'un expression explicite.

Exercice 10. Méthode du facteur fantôme, mais un peu cachée.

Exercice 11. On peut utiliser le wronskien. Mais aussi remarquer que les solutions vérifiant $z(0) = 0$ forment une droite vectorielle.

Exercice 12. On dispose d'un expression explicite.

Exercice 13. On dispose d'un expression explicite.

Exercice 14. Commencer par l'unicité. Ensuite, une matrice 2×2 injective est surjective.

Exercice 15. On dispose d'un expression explicite.

Exercice 16. Méthode du facteur fantôme.

Exercice 17. Reconnaitre un reste dans la formule de Taylor-reste intégral. On dispose de deux DL de f en 0.

Exercice 18. Utiliser le lemme de Rolle et le wronskien.

Exercice 20. Dériver sous le signe somme pour g. Effectuer un changement de variable pour f. Calculer à la fin la limite en $+\infty$.

Exercice 25. Régionner le plan. On pourra simplifier un peu la situation en posant $y = x - t$.

Solutions

Exercice 5. Montrons que toutes les solutions de l'équation différentielle $X' = AX$ sont bornées sur $\mathbb{R}$ si et seulement si A est diagonalisable et sp$A \subset i\mathbb{R}$.

$\boxed{\Leftarrow}$ D'après le cours, il existe une base de vecteurs propres $X_1, .., X_n$ de A associés respectivement aux valeurs propres $\lambda_1, .., \lambda_n$. En notant $\varphi_k(t) = e^{\lambda_k t} X_k$, $(\varphi_1, .., \varphi_n)$ est un système fondamental de solutions de $X' = AX$. Mais chaque φ_k est bornée sur $\mathbb{R}$ car $t \mapsto e^{ibt}$ est borné si $b \in \mathbb{R}$.

$\boxed{\Rightarrow}$ Montrons d'abord que sp$A \subset i\mathbb{R}$. Soit $\lambda = a + ib$ $(a, b \in \mathbb{R})$ une valeur propre de A et X un vecteur propre associé. Puisque $t \mapsto e^{\lambda t} X$ est une solution bornée, on a en passant à la norme (norme complexe quelconque), que $e^{at}\|X\|$ est borné. Donc $a = 0$.

Montrons maintenant que A est diagonalisable. Puisque χ_A est scindé, on a

$$\chi_A = \prod_{k=1}^{r} (X - \lambda_k)^{m_k}.$$

Par le lemme des noyaux, on a

$$\mathbb{C}^n = \bigoplus_{k=1}^{r} \mathrm{Ker}(A - \lambda_k I_n)^{m_k}.$$

Supposons par l'absurde que A n'est pas diagonalisable. On a naturellement $\mathrm{Ker}(A - \lambda_k I_n) \subset \mathrm{Ker}(A - \lambda_k I_n)^{m_k}$. On ne peut pas avoir pas avoir égalité pour tout k, sinon $\mathbb{C}^n$ serait somme directe d'espaces propres. Donc il existe $k \in [\![1, r]\!]$ tel que

$$\mathrm{Ker}(A - \lambda_k I_n) \subsetneq \mathrm{Ker}(A - \lambda_k I_n)^{m_k}.$$

On fixe un tel k et on note pour alléger les notations $\lambda = \lambda_k$, $m = m_k \geqslant 2$. On ne peut pas avoir $\mathrm{Ker}(A - \lambda I_n) = \mathrm{Ker}(A - \lambda_k I_n)^2$, car sinon par récurrence immédiate, on aurait $\mathrm{Ker}(A - \lambda I_n) = \mathrm{Ker}(A - \lambda_k I_n)^n$ pour tout entier $n \geqslant 1$ (argument central des noyaux itérés) ; or c'est faux pour m. On peut donc choisir X_2 dans $\mathrm{Ker}(A - \lambda_k I_n)^2 \setminus \mathrm{Ker}(A - \lambda I_n)$. On pose $X_1 = (A - \lambda I_n) X_2$. On a donc $X_1 \neq 0$, et ensuite $\mathcal{B} = (X_1, X_2)$ libre dans $\mathbb{C}^n$. Remarquons que $e^{t(A - \lambda I_n)} X_2 = \big(I_n + t(A - \lambda I_n)\big) X_2$ par définition de X_2. On peut conclure par un petit calcul :

$$\begin{aligned} e^{tA} X_2 &= e^{t\lambda I_n} e^{t(A - \lambda I_n)} X_2 = e^{\lambda t}(I_n + t(A - \lambda I_n)) X_2 \\ &= e^{\lambda t} X_2 + t e^{\lambda t} X_1. \end{aligned}$$

Les termes $e^{\lambda t} X_2$ et $e^{\lambda t} X_1$ sont de normes constantes non nulles car $\lambda \in i\mathbb{R}$. Donc $e^{\lambda t} X_1 + t e^{\lambda t} X_1$ est non borné, comme somme d'un borné et d'un non borné.

Exercice 11. On peut supposer $x'(0)$ et $x'(1) \neq 0$, sinon $x = 0$ (unicité de Cauchy-Lipschitz). On pose $\lambda = x'(1)/x'(0)$. La fonction $t \mapsto y(t) = x(t+1)$ est solution de l'équation avec condition initales $y(0) = x(1) = 0$ et $y'(0) = \lambda x'(0)$. La solution λx aussi. $x(t+1) = \lambda x(t)$ toujours par unicité de Cauchy-Lipschitz. Donc $x(t+k) = \lambda^k x(t)$ pour tout t et tout $k \in \mathbb{Z}$.

Exercice 17. Analyse. On commence par vérifier qu'une solution est de classe $\mathcal{C}^3$. Puis, vu que le terme intégrale dans la formule Taylor à l'ordre 3 est un $o(x^2)$, on dispose de deux DL de f. Par unicité, $f(0) = 0$, $f'(0) = 1$ et $f''(0) = 0$, puis $f'''(t) = f(t)$ pour tout t. Donc $f(t) = \alpha e^{-t} + A e^{-t/2} \cos(\sqrt{3}t/2) + B e^{-t/2} \sin(\sqrt{3}t/2)$. On en déduit un système linéaire sur α, A et B.

Exercice 2. (TD 2)

1. On pose $w(t) = C + \displaystyle\int_{t_0}^{t} u(s)v(s)\mathrm{d}s$. En multipliant l'inégalité proposée par $v(t)$, on trouve pour tout $t \in [t_0, t_0 + T]$:
$$w'(t) \leqslant v(t)w(t).$$
On pose $V(t) = \displaystyle\int_{t_0}^{t} v(s)\mathrm{d}s$. En multipliant par $e^{-V(t)}$, on a
$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\big(w(t)e^{-V(t)}\big) = e^{-V(t)}(w'(t) - v(t)w(t)) \leqslant 0.$$
On intègre de t_0 à t, ce qui donne $w(t)e^{-V(t)} - C \leqslant 0$ compte-tenu de $w(t_0) = C$. CQFD.
2. On choisit une norme sur $\mathbb{R}^n$ et la norme subordonnée sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Soit $X(t)$ une solution. En intégrant entre 0 et $t \geqslant 0$ l'équation différentielle, on a $X(t) = X(0) + \displaystyle\int_0^t A(s)X(s)\mathrm{d}s$. En passant aux normes et par l'inégalité de la moyenne,
$$\|X(t)\| \leqslant \|X(0)\| + \int_0^t \|A(s)\|\|X(s)\|\mathrm{d}s.$$
D'après le lemme de Gronwall (avec $u(t) = \|X(t)\|$ et $C = \|X(0)\|$), on a
$$\|X(t)\| \leqslant C \exp \int_0^t \|A(s)\|\mathrm{d}s \leqslant C \exp \int_0^{+\infty} \|A(s)\|\mathrm{d}s$$
car A est intégrable sur $\mathbb{R}^+$. Donc X est bornée. Mais alors $t \mapsto A(t)X(t)$ est intégrable sur $\mathbb{R}^+$, car produit continu d'une fonction intégrable et d'une fonction bornée. En particulier, $\displaystyle\int_0^t A(s)X(s)\mathrm{d}s$ converge en $+\infty$, et donc X aussi.

3. (Idée) Soit $Y=(y,y')$, solution de $Y'=RY+B(t)$ avec $B(t)=(0,-y'(t)/t^2)$. En résolvant,

$$Y(t)=e^{tR}Y(0)+e^{tR}\int_0^t e^{-sR}B(s)ds=R_{-t}Y(0)+R_{-t}\int_0^t R_sB(s)ds.$$

Il suffit donc de prouver que $s\mapsto R_s(B(s))$ est intégrable. En écrivant $Y'-RY=\dfrac{1}{t^2}PY$, puis $V(t)=e^{-tR}Y(t)$, on obtient $V'(t)=\dfrac{1}{t^2}e^{tR}Pe^{-tR}V(t)$. Vu que e^{tR} est orthogonale, on a l'intégrabilité en $+\infty$ de $t\mapsto\dfrac{1}{t^2}e^{tR}Pe^{-tR}$. La question précédente permet de conclure.