Par convention, t est une variable réelle, z une variable complexe.

Exercices d'application :

1. Soit $(a_n) \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$. Parmi les 3 ensembles
$$A = \{r \geqslant 0 \mid (a_n r^n)_n \text{ est bornée}\}, \quad B = \{r \geqslant 0 \mid (a_n r^n)_n \to 0\},$$
$$C = \{r \geqslant 0 \mid \sum a_n r_n^n \text{ est convergente}\}$$
montrer que deux au moins sont égaux.

2. Soit $z_0 \in \mathbb{C}$ de module r. On suppose que $\sum a_n z_0^n$ est semi-convergente. Que dire du rayon de convergence de $\sum a_n z^n$?

3. On suppose $f(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n t^n$ paire (resp. impaire) et de rayon de convergence > 0. Que dire de la suite (a_n) ?

4. On suppose $f(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n t^n$ de rayon de convergence > 0. Donner un développement limité à l'ordre p de f en 0.

5. Déterminer le rayon de convergence des séries entières suivantes où $\alpha > 0$ et $k \in \mathbb{N}^*$:
$$\sum \frac{1}{\operatorname{ch} n} z^n, \quad \sum \frac{1+i}{n} z^{n^2}, \quad \sum \frac{1}{\ln n!} z^n, \quad \sum \lfloor \sqrt{n} \rfloor z^n, \quad \sum n! z^{n^2},$$
$$\sum \frac{(kn)!}{(n!)^k} z^n, \quad \sum \frac{n^{n+1}}{n!} z^n, \quad \sum \left(1 + \frac{\alpha}{n}\right)^{-n^2} z^{2n}, \quad \sum \ln^n n \; z^n,$$
$$\sum \cos 2^n \; z^n, \quad \sum \frac{\sin n}{n^2} z^n \quad \sum H_n^{\ln n} z^n, \quad \sum \frac{(-2)^n}{n + \arctan n} z^{2n}, \quad \sum \alpha^n z^{n!}.$$

6. Justifier que les fonctions suivantes sont développables en série entière :
$$\frac{1}{(2t+3)^2}, \quad \frac{1}{(t-1)^2(t-2)}, \quad \ln(1+t+t^2).$$

7. Déterminer la somme des séries entières suivantes :
$$\sum_{n \geqslant 0} \frac{n}{n+1} t^n, \quad \sum_{n \geqslant 0} \frac{n^2}{(n-1)(n-2)} t^n, \quad \sum (-1)^{n+1} n \, t^{2n+1}, \quad \sum_{n \geqslant 0} \frac{1}{(3+(-1)^n)^n} t^n.$$

8. Montrer que $\displaystyle\int_0^1 \frac{\ln t \ln(1-t)}{t} \mathrm{d}t = \sum_{n \geqslant 1} \frac{1}{n^3}$.

9. Soit (F_n) la suite de Fibonacci définie par $F_0 = 0$, $F_1 = 1$ et vérifiant $F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$. Montrer que $\displaystyle\sum_{n \geqslant 0} \frac{F_n}{10^n}$ est un nombre rationnel.

10. Déterminer le développement en série entière de $x \mapsto e^{x^2} \displaystyle\int_0^x e^{-t^2} \mathrm{d}t$ par la méthode de l'équation différentielle.

11. Donner le développement en série entière de $f : x \mapsto \dfrac{1}{(1-x)^p}$ sur $\mathbb{R}$ où $p \in \mathbb{N}^*$.

12. Montrer que les solutions de l'équation différentielle $x'' - tx = 0$ sont développables en séries entières sur $\mathbb{R}$.

Exercice 1 * : Soit $(a_n)_n$ une suite de nombres complexes et R le rayon de convergence de la série entière $\displaystyle\sum_n a_n z^n$.

1. Soit (a_n) définie par récurrence par $a_0 = a_1 = 1$ et $a_{n+2} = 2a_{n+1} + a_n$. Déterminer le rayon de convergence et la somme de $\sum a_n z^n$.
2. Déterminer le rayon de convergence de $\displaystyle\sum_n 4^n a_n z^n$ et $\displaystyle\sum_n a_n^2 z^n$.
3. Soient $0 < \alpha < \beta$, et $a_{2n} = \alpha^n$, $a_{2n+1} = \beta^n$. Déterminer le rayon de convergence de $\sum a_n z^n$.
4. Déterminer le rayon de convergence de $\displaystyle\sum_n e^{\sqrt{n}} a_n z^n$.
5. Déterminer le rayon de convergence de $\displaystyle\sum_n a_n z^{n^2}$.

Exercice 2 * :

1. Calculer $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(2n+1)}$.
2. Exprimer en fonction des fonctions usuelles $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^{3n}}{(3n)!}$.

Exercice 3 * : Déterminer la somme et le rayon de convergence de la série entière $\displaystyle\sum_n H_n z^n$.

Exercice 4 ** – Critère d'Hadamard : Si $(a_n)_n$ est une suite positive bornée, on note $\overline{\lim}\ a_n$ la limite de la suite $(\sup_{p \geq n} a_p)_n$. Justifier l'existence de cette limite et montrer que la rayon de convergence de $\sum_n u_n z^n$ est $1/\overline{\lim}\sqrt[n]{|u_n|}$. Comment en déduire le critère de d'Alembert ?

Application : donner le rayon de convergence de $\sum e^{n\sin n} z^n$ et de $\sum \left(1+\frac{(-1)^n}{n}\right)^{n^2} z^n$.

Exercice 5 * – Utilisation d'un développement en série entière :

1. En cherchant une solution développable en série entière, résoudre sur $]0,+\infty[$ puis sur $\mathbb{R}$: $x^2(1-x)y''-x(1+x)y'+y=0$.
2. En cherchant une solution développable en série entière, résoudre : $xy''+3y'-4x^3y=0$.

Exercice 6 * – Fonctions de Bessel :

1. Montrer que l'équation différentielle $xy''+y'+xy=0$ admet des solutions non nulles développables en série entière que l'on explicitera.
2. Soit $g(x)=\int_0^\pi \cos(x\sin t)\mathrm{d}t$. Montrer que g est solution de l'équation précédente et que g est développable en série entière autour de 0. Déterminer les coefficients de ce développement.

Exercice 7 * : Soit $g(x)=\exp\left(\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{x^n}{n^2}\right)$. Montrer que g est développable en série entière sur $]-1,1[$.

Exercice 8 * : Déterminer le développement en série entière de $\arctan(1+x)$ en 0.

Exercice 9 * : Soit $(u_n)_n$ la suite vérifiant $u_0=1$ et $u_n=\sum_{k=1}^n u_{n-k}/k!$.

1. Montrer que la série entière $\sum u_n x^n$ est de rayon de convergence non-nul.
2. Déterminer f.

Exercice 10 * : Soit $(a_n)\in\mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ telle que $\sum |na_n| < +\infty$.

1. Montrer que le rayon de convergence R de $\sum a_n z^n$ est $\geqslant 1$. On note $f(z)=\sum a_n z^n$.
2. On suppose $a_1\neq 0$ et $\sum_{n=2}^{+\infty} n|a_n|\leqslant |a_1|$. Montrer que f est injective.

Exercice 11 (Centrale 2017) : On note $p(n)$ le nombre de triplets (x,y,z) d'entiers naturels tels que $x+2y+3z=n$. On note $G(t)=\sum_{n=0}^{+\infty}p(n)t^n$.

1. Montrer que G est bien définie.
2. Montrer que $G(t)=\frac{1}{(1-t)(1-t^2)(1-t^3)}$.
3. En déduire une expression de $p(n)$.

Exercice 12 : Calculer le rayon de convergence de la série entière $\sum_n x^{2^n}$ et déterminer un équivalent en 1 de sa somme.

Exercice 13 *– Un logarithme complexe : Pour tout $z\in\mathbb{C}\setminus\mathbb{R}^-$, on note $\theta(z)$ l'unique argument dans $]-\pi,\pi[$ de z. On pose aussi $\log z=\ln|z|+i\theta(z)$.

1. Déterminer lorsque cela a un sens $\log e^z$ et $e^{\log z}$.
2. On se propose de montrer que si $|z|<1$, alors $\log(1+z)=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}z^n$.
   On fixe z et on considère la fonction définie sur $[0,1]$ par $t\mapsto(1+tz)e^{-S(t)}$ où $S(t)=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}z^nt^n$. Calculer sa dérivée et conclure.
3. En réutilisant les idées précédentes, déterminer les sommes $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\cos(nx)}{n}$ et $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\sin(nx)}{n}$ pour x convenable.

Exercice 14 : Développer en série entière $f: t\mapsto\frac{1}{1+t+t^2+t^3}$ d'abord en décomposant en éléments simples puis en considérant $f(t)/(1-t)$.

Exercice 15 * : Soit (a_n) une suite strictement positive décroissante. Montrer que $f: z\mapsto\sum_{n\geqslant 0}a_nz^n$ ne s'annule pas sur le disque unité ouvert.

Exercice 16 ** – Théorèmes taubériens : Soit $(a_n)_n$ une suite complexe et $\sum a_nx^n$ une série entière de rayon de convergence 1 dont on note $f:]-1,1[\to\mathbb{R}$ la somme. On suppose que $\lim_{x\to 1^-}f(x)=l\in\mathbb{C}$.

1. Donner un exemple où $\sum a_n$ diverge.
2. On suppose que $a_n\geqslant 0$. Montrer que $\sum a_n$ converge vers l.

3. On suppose que $a_n = o(1/n)$. Montrer que $\sum a_n$ converge vers l. (On pourra introduire un $x \in]0,1[$ assez proche de 1, mais pas trop.)

Exercice 17 * : Soit $S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} e^{-n} \cos n^2 x$. Montrer que S est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ et que sa série de Taylor en 0 a un rayon de convergence nul.

Exercice 18 – Série majorante : Soit (a_n) une suite complexe telle que $a_0 = 1$ et $|a_n| \leqslant 1$ si $n \geqslant 1$. On suppose qu'un des a_n est de module < 1.

1. Montrer que la série entière $\sum_{n\geqslant 0} a_n z^n$ a un rayon de convergence $R \geqslant 1$ et que sa somme f ne s'annule pas sur $[-1/2, 1/2]$.
2. Montrer qu'il existe une série entière $\sum_{n\geqslant 0} b_n z^n$ de rayon de convergence $R' \geqslant 1/2$ telle que
$$\left(\sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n\right)\left(\sum_{n=0}^{+\infty} b_n z^n\right) = 1.$$

Exercice 19 * – Centrale 2013 : Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. On s'intéresse à la somme $\sum_{k\geqslant 1} \frac{\operatorname{Tr} A^k}{k}$. Dans le cas où il y a convergence, on note $s = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\operatorname{Tr} A^k}{k}$ sa somme. Le but de l'exercice est de montrer que $e^s = \dfrac{1}{\det(I_n - A)}$ $(*)$.

1. Établir $(*)$ pour une matrice nilpotente.
2. On note $\rho(A)$ le rayon spectral de A. On suppose $\rho(A) \leqslant 1$ et que $1 \notin \operatorname{Sp}(A)$. Montrer que
$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\operatorname{Tr} A^k}{k} = -\int_0^1 \frac{P_A'(t)}{P_A(t)} \mathrm{d}t$$
où $P_A(t) = t^n \chi_A\left(\frac{1}{t}\right)$.
3. Conclure

Exercice 20 ** : Soit N le sous-ensemble des matrices triangulaires supérieures strictes de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et T les sous-ensemble des matrices triangulaires n'ayant que des 1 sur la diagonale. Montrer que $\exp : \mathcal{N} \to T$ est un homéomorphisme (*i.e.* continue bijective de réciproque continue). (Utiliser la fonction $f : x \mapsto \ln(1+x)$.)

Travaux dirigés 1 – La formule de Cauchy ♡

1. Soit $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$ une série entière complexe de rayon de convergence $R > 0$ (éventuellement $R = +\infty$) et $f(z)$ sa somme.
   (a) Soit $r \in [0, R[$. Montrer la formule de Cauchy : pour tout entier n,
   $$a_n r^n = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(re^{i\theta}) e^{-in\theta} \mathrm{d}\theta.$$
   (En particulier, f est caractérisée par ses valeurs sur n'importe quel cercle centré en 0 inclus dans le disque de convergence.)
   (b) Montrer que si $g_r(\theta) = f(re^{i\theta})$ et $m_r = \sup_{[0,2\pi]} |g_r(\theta)|$, alors $|a_n| r^n \leqslant m_r$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout $r \in [0, R[$.
2. Soit $f : D_f(0,1) \to \mathbb{C}$ continue et somme d'une série entière sur $D(0,1)$, *i.e.* $f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$ si $|z| < 1$.
   (a) Soit $r \in [0,1[$. Montrer que
   $$\sum_{n=0}^{+\infty} r^{2n} |a_n|^2 = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \left|f(re^{it})\right|^2 \mathrm{d}t.$$
   (b) En déduire que $\sum_{n=0}^{+\infty} |a_n|^2 = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \left|f(e^{it})\right|^2 \mathrm{d}t$. (Égalité de Parseval.)
   (c) Montrer que le résultat précédent est encore vrai si on remplace "f continue sur $D_f(0,1)$" par "f bornée sur $D(0,1)$".
3. On suppose ici $R = +\infty$ et f bornée sur $\mathbb{C}$. Montrer que f est constante.
4. Soit D le disque ouvert unité. Soit $f : \overline{D} \to \mathbb{C}$ continue et développable en série entière sur D.
   (a) On suppose f nulle sur le cercle unité $\mathbb{U}$. Montrer que f est nulle.
   (b) On suppose f nulle sur un arc de cercle unité de longueur $\alpha > 0$. Montrer que f est nulle.

Travaux dirigés 2 – Séries génératrices

1. Soit B_n le nombre de partition d'un ensemble à n éléments. On convient que $B_0 = 1$.

(a) Montrer que pour tout entier n, $B_{n+1} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} B_k$.

(b) On pose $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{B_n}{n!} x^n$. Montrer que la rayon de convergence R de cette série entière n'est pas nul. Exprimer $f(x)$ en fonction des fonctions usuelles pour $|x| < R$.

(c) Montrer que $B_n = \frac{1}{e} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{k^n}{k!}$.

2. Soit d_n le nombre de permutations sans point fixe d'un ensemble à n éléments.

(a) Simplifier $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} d_k$.

(b) On considère la série entière $\sum_k \frac{d_k}{k!} z^k$. Soit D sa somme. Minorer son rayon de convergence R et calculer $D(z)$ pour $|z| < R$.

(c) En déduire que $d_k = E\left(\frac{k!}{e} + \frac{1}{2}\right)$ et $\lim d_k/k!$.

Travaux dirigés 3 – Principe des zéros isolés

Soit $f(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n t^n$ de rayon de convergence $R > 0$.

1. On suppose qu'il existe une suite $(u_n)_n$ non stationnaire dans $]-R, R[$ qui tend vers 0 telle que $f(u_n) = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Montrer que f est nulle.
2. Montrer que f est développable en série entière au voisinage de tout point de $]-R, R[$.
3. En déduire que si f admet une infinité de zéros dans un compact de $]-R, R[$, alors f est nulle.
4. Reprendre les trois questions précédentes avec $f(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$ en remplaçant $]-R, R[$ par $D(0, R)$.

Travaux dirigés 4 – Le théorème de réalisation de Borel

On se propose de démontrer que pour toute suite $(a_n)_n$ de nombres réels, il existe une fonction $f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ telle que pour tout entier n, on ait $f^{(n)}(0) = a_n$. Soit donc $(a_n)_n \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.

1. Peut-on définir f par une série entière ?
2. (Existence de fonctions plateau.) Montrer que la fonction définie par $f(x) = e^{-1/x}$ si $x > 0$ et $f(x) = 0$ sinon est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$. En déduire pour tous réels $a < b < c < d$ l'existence d'une fonction φ de classe $\mathcal{C}^\infty$ positive telle que φ est nulle en dehors de $]a, d[$ et vaut 1 sur $[b, c]$.
3. Soit désormais $\varphi \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ positive, identiquement égale à 1 sur $[-1/2, 1/2]$ et nulle en dehors de $[-1, 1]$ et $(\lambda_n)_n$ une suite de nombres réels tels que $\lambda_n \geqslant \max(1, |a_n|)$ pour tout n. On pose pour tout x réel
$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a_n}{n!} x^n \varphi(\lambda_n x).$$
Montrer que f est définie et continue sur $\mathbb{R}$.
4. Montrer que f répond à la question.

Travaux dirigés 5 – Le théorème d'Abel

Soit $\sum a_n z^n$ un série entière de rayon de convergence $R > 0$. Soit $z_0 = Re^{i\theta}$ un point du cercle de convergence. On suppose que la série $\sum a_n z_0^n$ converge.

1. Montrer que la série $\sum_n a_n z^n$ converge uniformément sur le segment $[0, z_0]$.

   (Indication : utiliser une certaine transformation avec $\sum_{k=n}^{+\infty} t^k a_k$.)
2. On suppose maintenant $R = 1$. Soit D le disque unité ouvert et $\overline{D}$ le disque unité fermé. Montrer l'équivalence entre :
   (a) la série converge uniformément sur $\overline{D}$;
   (b) la série converge uniformément sur D ;
   (c) la série converge uniformément sur $\mathbb{U}$.

Travaux dirigés 6 – Fonctions analytiques

Soit I un intervalle ouvert non vide et $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^\infty$. On dit que f est analytique si pour tout $x_0 \in I$, il existe un $\eta > 0$ tel que la série de Taylor de f en x_0 converge vers f sur $]x_0 - \eta, x_0 + \eta[$.

1. Donner un exemple de fonction de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ mais pas analytique.
2. On suppose f analytique sur $\mathbb{R}$. Le rayon de convergence de la série de Taylor en 0 de f est-il nécessairement $+\infty$?
3. Soient deux réels $a < b$ et $f :]a, b[\to \mathbb{R}$ analytique. On suppose qu'il existe un segment $K \subset]a, b[$ qui contient une infinité de zéros de f. Montrer que f est nulle. (Principe des zéros isolés.)

4. Montrer l'équivalence entre
   (a) f est analytique ;
   (b) pour tout segment $K \subset I$, il existe $C, r > 0$ telles que pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $x \in K$, on a $|f^{(n)}(x)| \leqslant Cn!r^n$. On commencera par rappeler la formule de Taylor-reste intégral.
5. Soient deux réels $a < b$ et $f :]a, b[\to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^\infty$. On dit que f est absolument monotone si pour tout entier n, $f^{(n)} \geqslant 0$.
   (a) Montrer que exp, tan et arcsin sont absolument monotones sur des intervalles à déterminer.
   (b) Montrer qu'une fonction absolument monotone est analytique.

Indications

Exercice 1. 1) Distinguer selon que $r^2 > R$ et $r^2 < R$. 2) Couper la somme en deux. 4) Commencer par le cas $R \in]0, +\infty[$.

Exercice 2. 1. Considérer la série génératrice associée.
2. Utiliser une équation différentielle.

Exercice 3. On reconnaît un produit de Cauchy.

Exercice 4. Si $l = \overline{\lim} \sqrt[n]{|u_n|}$ et que $rl < 1$, alors il existe $\varepsilon > 0$ tel que $r(l+\varepsilon) < 1$. Faire de même si $rl > 1$.

Exercice 7. Encore la méthode de l'équation différentielle.

Exercice 8. Attention à ne pas faire n'importe quoi en se précipitant.

Exercice 9. 1. Majorer $|u_n|$ pour minorer le rayon de convergence.
2. Reconnaître un produit de Cauchy.

Exercice 12. Encore et toujours la comparaison série-intégrale.

Exercice 15. Utiliser une transformation d'Abel.

Exercice 17. On pourra minorer $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} e^{-n} n^{4p}$ par son plus grand terme.

Exercice 20. Remarquer que exp et f sont en fait polynomiales sur N. Il s'agit de construire une réciproque polynomiale à exp "modulo X^n".

Solutions

Exercice 13. 1. Facile.

2. On pose $\varphi(t) = \ln(1+tz)$ pour $t \in [0,1]$ et $|z| < 1$ avec $z = x+iy$. Alors en décomposant en partie réelle et imaginaire, puis en dérivant :

$$\begin{aligned}\varphi'(t) &= \frac{1}{2}\frac{2tx+2x^2t^2+2y^2t^2}{(1+tx)^2+(ty)^2} + i\frac{y(1+tx)-xyt}{1+\left(\frac{ty}{1+tx}\right)^2} \times \frac{1}{(1+tx)^2}\\ &= \frac{tx+(x^2+y^2)t^2}{(1+tx)^2+(ty)^2} + i\frac{y}{(1+tx)^2+(ty)^2}\\ &= \frac{z+t|z|^2}{|1+tz|^2} = \frac{z(1+t\bar{z}}{(1+tz)(1+t\bar{z})} = \frac{z}{1+tz}.\end{aligned}$$

D'autre part, si $\psi(t) = \sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n-1}\frac{t^n z^n}{n}$, alors en dérivant :

$$\psi'(t) = \sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n-1}z^n t^{n-1} = \frac{z}{1+tz}.$$

On a donc $\varphi' = \psi'$ sur un intervalle et $\varphi(0) = 0 = \psi(0)$, donc $\varphi = \psi$.

3. On a

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\cos nx}{n} = -\operatorname{Re}\log(1-e^{ix}) = -\ln|e^{ix/2}-e^{-ix/2}| = -\ln 2 - \ln|\sin(x/2)|.$$

Exercice 16. 1. Prendre $a_n = (-1)^n$.

2. On a convergence normale sur $[0,1]$, d'où f est en fait définie et continue sur $[0,1]$.

3. On a $|l - \sum_{k=0}^n a_k| \leqslant |l - f(x)| + |\sum_{k=n+1}^{\infty} a_k x^k| + \sum_{k=0}^n |a_k|(1-x^k)$. En prenant $x = 1-1/n$, le premier terme tend vers 0. Le dernier aussi car

$$|a_k||x^k-1| \leqslant k|a_k|(1-x) = \frac{1}{n}\varepsilon_k$$

où $\varepsilon_k = o(1)$. Mais alors par sommation des relations de comparaison, $\sum_{k=0}^n \varepsilon_k = o(n)$, ce qu'on voulait. Enfin, le terme du milieu est majoré par

$$\sum_{k=n+1}^{\infty}\frac{k|a_k|}{n}x^k \leqslant \frac{1}{n}\sup_{k\geqslant n}|ka_k|\sum_{k=n+1}^{\infty}x^k = \frac{1}{n}\sup_{k\geqslant n}|ka_k|nx^{n+1} \leqslant \sup_{k\geqslant n}|ka_k|$$

qui tend vers 0.

Exercice 19. 1. Si A est nilpotente, $\det(I_n - A) = 1$. (Trigonaliser, ou évaluer le polynôme caractéristique en 1.) D'autre part, $\operatorname{Tr} A^k = 0$ pour tout $k \geqslant 1$ (trigonaliser). Gagné.

2. Montrons la convergence de $\sum_k \frac{1}{k}\operatorname{Tr} A^k$. En trigonalisant, il suffit de montrer la convergence de $\sum_k \frac{1}{k}z^k$ pour tout $|z| \leqslant 1$, $z \neq 1$.

Méthode 1 : Une transformation d'Abel en intégrant z^k donne la convergence.
Méthode 2 (plus dans le programme) : On pose $u_k(t) = t^{k-1}z^k$ pour $t \in [0,1[$. On a $\int_0^1 u_k = \frac{1}{k}z^k$. En posant $S_n(t) = \sum_{k=1}^n u_k(t)$, on a $\sum_{k=1}^n \frac{1}{k}z^k = \int_0^1 S_n(t)\mathrm{d}t$. Or $S_n(t) = z\frac{1-t^nz^n}{1-tz}$. Pour tout $t \in [0,1[$, on a convergence simple $S_n(t) \to \frac{z}{1-tz} = f(t)$ qui est bien continue sur $[0,1[$. De plus, par continuité sur le compact $[0,1]$ de $t \mapsto 1-tz$, qui ne s'annule pas, il existe $m > 0$ tel que $|1-tz| \geqslant m$ pour tout $t \in [0,1[$. On a donc la domination $|S_n(t)| \leqslant 2|z|/m$, fonction intégrable sur $[0,1[$. Par le théorème de convergence dominée, $\int_0^1 S_n \to \int_0^1 f$. En particulier, $\sum_k \frac{1}{k}z^k$ converge et $\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{k}z^k = \int_0^1 \frac{z}{1-tz}\mathrm{d}t$.

On a $\frac{P'(t)}{P(t)} = \sum_{\lambda \text{ racine de } P}\frac{m_\lambda}{t-\lambda}$ où m_λ est la multiplicité de λ. On a $r \in \mathbb{C}$ racine de P_A si et seulement si $1/r$ racine de χ_A.

3. Il suffit, après trigonalisation, de voir que $e^{-\int_0^1 \frac{z}{1-tz}\mathrm{d}t} = 1-z$. On dérive $x \mapsto e^{-\int_0^x \frac{z}{1-tz}\mathrm{d}t}$ et l'équation différentielle qui en sort permet de conclure.