CHAPITRE 1

CONVEXITÉ

E est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel réel.

I Ensembles convexes

1 Définition

Définition *Soit $a, b \in E$. Le segment d'extremités a et b est l'ensemble $[a, b] = \{(1-t)a + tb | t \in [0, 1]\}$.*

Définition *Une partie X de E est convexe si pour tous $a, b \in X$, $[a, b] \subset X$.*

Exemples

1. Un sous-espace vectoriel (ou affine) d'un espace vectoriel est convexe.
2. Un disque ouvert ou fermé dans le plan complexe est convexe.
3. Une intersection quelconque de convexes est convexe.
4. Les matrices triangulaires supérieures à coefficients diagonaux strictement positifs forment une partie convexe de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
5. L'image d'un convexe par une application linéaire est convexe.

Proposition *Les convexes de $\mathbb{R}$ sont les intervalles.*

Schéma de preuve ◀ Ces deux propriétés sont équivalentes à : pour tous $a, c \in I$ et $b \in \mathbb{R}$, si $a < b < c$, alors $c \in I$. ▶

2 Barycentres

Définition *Soit $(x_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ une famille de points de E et $(\lambda_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ une famille de réels telle que $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \lambda_i \neq 0$. On appelle barycentre de la famille de points pondérés $(x_i, \lambda_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ le point $g = \dfrac{1}{\sum_{i=1}^{n} \lambda_i} \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i$.*

Remarque

1. On ne change pas le barycentre si on permute les couples (x_i, λ_i).
2. On a la relation d'homogénéité suivante : si on multiplie tous les poids λ_i par un même réel non nul k, alors on ne change pas le barycentre. En particulier, quitte à diviser par $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i$, on peut toujours se ramener à $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 1$.
3. Dans un espace affine, si $(A_i, \lambda_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ est un système de points pondérés avec $\sum_i \lambda_i = 1$, son barycentre est le point G tel que $\overrightarrow{OG} = \sum_i \lambda_i \overrightarrow{OA_i}$; ceci ne dépend pas du point O.

Proposition ***(Associativité des barycentres)*** *Soit $(x_i, \lambda_i)_{i \in I}$ une famille finie de points pondérés de E telle que $\sum_{i \in I}^{n} \lambda_i \neq 0$ et g son barycentre. Soit $J \subset I$ tel que $\sum_{i \in J} \lambda_i \neq 0$. Alors en appelant h le barycentre de la famille de points pondérés $(x_i, \lambda_i)_{i \in J}$, g est le barycentre de la famille $(h, \sum_{i \in J} \lambda_i) \cup (x_i, \lambda_i)_{i \in I \setminus J}$.*

Schéma de preuve ◄ Réduire au même dénominateur. ►

3 Enveloppe convexe

Proposition *Soit $(A_i)_{i \in I}$ une famille de parties convexes de E. Alors $\bigcap_{i \in I} A_i$ est convexe.*

Définition **(Enveloppe convexe)** *Soit X une partie non vide de E. Alors il existe un plus petit convexe dans E qui contient X, appelé enveloppe convexe de E et noté* $\mathrm{Conv}(X)$. *On a* $\mathrm{Conv}(X) = \bigcap_{A \supset X,\, A \text{ convexe}} A$.

Remarque La partie X est convexe si et seulement si $\mathrm{Conv}(X) = X$.

Convenons d'appeler "combinaison convexe dans X" tout barycentre d'une famille de points pondérés de X à coefficients positifs (de somme de poids non nulle).

Proposition *Soit X une partie de E. Alors X est convexe si et seulement si toute combinaison convexe d'éléments de X est encore dans X.*

Schéma de preuve ◄ Le sens réciproque est clair. Pour le sens direct, on raisonne sur le nombre n de points dans la combinaison convexe. On peut supposer que les poids sont non nuls par hypothèse de récurrence, et pour $n \geqslant 3$, on peut faire un barycentre partiel en prenant deux poids non-opposés. ►

II Fonctions convexes

Dans cette partie, I est un intervalle contenant au moins deux points.

1 Fonctions convexes

Définition *La fonction $f : I \to \mathbb{R}$ est convexe si pour tous $x_1, x_2 \in I$ et tout $t \in [0, 1]$,*

$$f((1-t)x_1 + tx_2) \leqslant (1-t)f(x_1) + tf(x_2).$$

Elle est concave si $-f$ est convexe, i.e. sous les mêmes hypothèses, $f((1-t)x_1 + tx_2) \geqslant (1-t)f(x_1) + tf(x_2)$.

Graphiquement, la convexité de f signifie que les cordes sont au-dessus de la courbe représentative de f.

Exemple (Preuve plus bas.) Les fonctions données par les expressions $ax+b$, x^2, e^x sont convexes ; $ax+b$, $\ln x$, $\sqrt{x}$ sont concaves. La fonction $x \mapsto 1/x$ est convexe sur $]0,+\infty[$ et sur $]-\infty, 0[$, mais pas sur $\mathbb{R}^*$, qui n'est d'ailleurs pas un intervalle.

Remarque

1. Une combinaison linéaire à coefficients positifs de fonctions convexes et encore convexe.
2. Si u est convexe croissante et v convexe, alors $u \circ v$ est convexe. Mais une composée de fonctions convexes peut de pas être convexe. (Par exemple, $u : x \mapsto 1/x$ sur $\mathbb{R}_+^*$ et $v : x \mapsto x^2+1$.)
3. Les seules fonctions convexes et concaves sont les fonctions affines.

Proposition *Soit $f : I \to \mathbb{R}$. L'épigraphe de f est la partie du plan située au-dessus de la courbe représentative de f, i.e. $\mathcal{E}_f = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | x \in I \text{ et } y \geqslant f(x)\}$. Alors f est convexe si et seulement si son épigraphe est convexe.*

Schéma de preuve ◀ Écrire la définition et regarder les coordonnées. ▶

Proposition (Inégalités des trois pentes) *Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction. Les propositions suivantes sont équivalentes :*

1. *f est convexe ;*
2. *pour tous $a < b < c \in I$, $\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a} \leqslant \dfrac{f(c)-f(a)}{c-a}$;*
3. *pour tous $a < b < c \in I$, $\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a} \leqslant \dfrac{f(c)-f(b)}{c-b}$;*
4. *pour tous $a < b < c \in I$, $\dfrac{f(c)-f(a)}{c-a} \leqslant \dfrac{f(c)-f(b)}{c-b}$.*

Schéma de preuve ◀ Les trois dernières propriétés sont équivalentes à $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ f(a) & f(b) & f(c) \end{vmatrix} \geqslant 0$. Pour l'équivalence de (1) et (2), on écrit $b = (1-t)a + tc$ et on substitue. ▶

Proposition *Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction. La fonction "pente en x_0" $t \mapsto \dfrac{f(t)-f(x_0)}{t-x_0}$ est croissante pour tout x_0 si et seulement si f est convexe.*

Schéma de preuve ◀ Conséquence de la proposition précédente. ▶

2 Fonctions convexes dérivables

Proposition *Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction.*

1. *On suppose f dérivable. Alors f est convexe si et seulement si f' est croissante.*
2. *On suppose f deux fois dérivable. Alors f est convexe si et seulement si $f'' \geqslant 0$.*

Schéma de preuve ◀ Le sens direct vient de l'égalité des accroissements finis. Le sens réciproque vient de $\dfrac{f(a)-f(x_0)}{a-x_0} \leqslant f'(x_0) \leqslant \dfrac{f(b)-f(x_0)}{b-x_0}$ lorsque $a < x_0 < b$: faire tendre successivement a et b vers 0 dans l'inégalité $\dfrac{f(a)-f(x_0)}{a-x_0} \leqslant \dfrac{f(b)-f(x_0)}{b-x_0}$. ▶

Proposition *Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable convexe. Alors la courbe représentative de f est située au-dessus de ses tangentes, i.e. pour tous $x_0, x \in I$,*

$$f(x) \geqslant f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0).$$

Schéma de preuve ◀ Distinguer suivant $x > x_0$ ou $x < x_0$ avec l'inégalité de la preuve précédente. ▶

3 Inégalités de convexité

Proposition (Inégalité de Jensen) *Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction convexe, $(\lambda_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ une famille de réels positifs de somme non nulle et $x_1, \ldots, x_n \in I$. Alors*

$$f\left(\frac{\sum_{i=1}^n \lambda_i x_i}{\sum_{i=1}^n \lambda_i}\right) \leqslant \frac{\sum_{i=1}^n \lambda_i f(x_i)}{\sum_{i=1}^n \lambda_i}.$$

En particulier, si $\displaystyle\sum_{i=1}^n \lambda_i = 1$, on a

$$f\left(\sum_{i=1}^n \lambda_i x_i\right) \leqslant \sum_{i=1}^n \lambda_i f(x_i).$$

Schéma de preuve ◀ Récurrence sur n. ▶

Exemple La convexité de $x \mapsto x^2$ donne $\displaystyle\left(\sum_{k=1}^n x_i\right)^2 \leqslant n \sum_{k=1}^n x_i^2$.