SUJET N°1 (Centrale MP 1985)

On note V le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des applications continues f de $]0,1]$ dans $\mathbb{R}$, intégrables sur $]0,1]$. On note W le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des applications continues f de $]0,1]$ dans $\mathbb{R}$, telles que f^2 soit intégrable sur $]0,1]$.

Lorsque $(E, \langle .|.\rangle)$ est un espace préhilbertien réel, un endomorphisme $\varphi \in \mathscr{L}(E)$ est dit auto-adjoint si pour tous $u, v \in E$, $\langle \varphi(u)|v\rangle = \langle u|\varphi(v)\rangle$.

L'endomorphisme $\varphi \in \mathscr{L}(E)$ est dit positif s'il est auto-adjoint et que pour tout $u \in E$ $\langle \varphi(u)|u\rangle \geqslant 0$; il est défini positif s'il est auto-adjoint et que pour tout $u \in E$ non nul $\langle \varphi(u)|u\rangle > 0$.

1 Un espace préhilbertien

1. Montrer que W est un sous-espace vectoriel de V.
2. Montrer que si l'on pose, pour f et g appartenant à W, $\langle f|g\rangle = \int_0^1 f(x)g(x)\mathrm{d}x$, on définit un produit scalaire sur W ; W sera désormais muni de cette structure.
3. Étudier l'appartenance à V et l'appartenance à W des restrictions à $]0,1]$ des fonctions suivantes (où $\alpha > 0$) :

$$f_1 : x \mapsto \ln x; \qquad f_2 : x \mapsto x^{-\alpha} \qquad f_3 : x \mapsto \frac{1}{x(1-\ln x)^{\alpha}}.$$

2 …et un opérateur autoadjoint

Soit f un élément de V.

1. On pose, pour tout $x \in]0,1]$:

$$F(x) = \ln x \int_0^x f(t)\mathrm{d}t + \int_x^1 f(t)\ln t \,\mathrm{d}t.$$

   (a) Montrer que $F(x)$ existe pour tout $x \in]0,1]$.

   (b) Montrer que F est de classe $\mathscr{C}^2$ sur $]0,1]$.

   (c) Établir la relation, valable pour tout $x \in]0,1]$:

$$xF''(x) + F'(x) = f(x).$$

2. On garde la fonction F définie comme ci-dessus.

   (a) Quelle est la valeur de $F(1)$?

   (b) Quelle est la limite de $xF'(x)$ lorsque x tend vers 0 ?

   (c) Donner un exemple d'élément f de V tel que F ne soit pas bornée ; on pourra utiliser une fonction du type $f(x) = \dfrac{1}{x(1-\ln x)^{\alpha}}$ avec α convenablement choisi.

3. Dans cette question, f désigne toujours une fonction de V et F la fonction définie au début de cette partie.

   (a) Établir l'existence d'une constante $A > 0$ telle que, pour tout $x \in]0,1]$, l'on ait $|F'(x)| \leqslant \dfrac{A}{x}$.

   (b) Établir que $F \in W$.

4. À tout élément f de V on associe ainsi F qui appartient aussi à V, ce qui définit donc une application T de V dans V, manifestement linéaire. L'application T est-elle injective ?
5. On suppose ici que f appartient à W ; $T(f)$ a-t-elle une limite en 0 ? $T(f)$ est-elle bornée ? (On pourra établir : $\forall x \in]0,1]$, $|F'(x)| \leqslant \sqrt{\dfrac{\langle f|f\rangle}{x}}$.)
6. (a) Montrer que la restriction de T à W est un endomorphisme autoadjoint de W.

   (b) Montrer que la restriction de $-T$ à W est un endomorphisme autoadjoint positif de W. Est-il défini positif ?

3 Éléments propres de T

1. Démontrer que les valeurs propres de T, s'il en existe, sont strictement négatives et que les vecteurs propres de T appartiennent en fait à W.

2. Soit λ un nombre réel strictement positif. Montrer que, si f est vecteur propre de T pour la valeur propre $-\lambda$, alors l'application de $\left]0, \frac{1}{\lambda}\right]$ dans $\mathbb{R}$ qui à x associe $f(\lambda x)$ est, dans son intervalle de définition, solution de l'équation différentielle

$$(E) \qquad xy'' + y' + y = 0.$$

3. Montrer que (E) admet une et une seule solution h développable en série entière, de la forme $h(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$, avec $a_0 = 1$, et de rayon de convergence $R > 0$. On donnera l'expression de a_n et la valeur de R. Quelle est la dérivée de $x \mapsto xh'(x)$?
4. (a) Établir qu'il existe r_1 réel tel que $h(r_1) = 0$ et que, pour tout $x < r_1$, $h(x) > 0$. (On pourra commencer par étudier le signe de $h'(x)$ sur $[0,2]$.)
   (b) Justifier de façon rigoureuse l'encadrement $1,4 < r_1 < 1,5$.
5. (a) Soient $b \in]0, r_1[$. Soit y une application de $]0, r_1[$ dans $\mathbb{R}$, solution de (E) ; établir à l'aide de la fonction $z = \frac{y}{h}$ l'existence de deux constantes A et B telles que

$$\forall x \in]0, r_1[, \quad y(x) = Ah(x) + Bh(x)\int_b^x \frac{\mathrm{d}t}{t\,h(t)^2}.$$

   (Indication : on pourra, pour simplifier les calculs finaux, dériver $x \mapsto xh(x)^2 z'(x)$.)
   (b) Étudier la limite de $y(x)$ quand x tend vers 0.
6. Déduire de ce qui précède que, si f est vecteur propre de T pour la valeur propre $-\lambda$, alors il existe μ réel tel que

$$\forall x \in]0,1], \quad f(x) = \mu h\left(\frac{x}{\lambda}\right).$$

7. Soit inversement un nombre réel $\lambda > 0$; donner une condition nécessaire et suffisante pour que l'application de $]0,1]$ dans $\mathbb{R}$ qui à x associe $h\left(\frac{x}{\lambda}\right)$ soit vecteur propre de T. Quel lien existe-t-il entre les zéros de h et les valeurs propres de T ?
8. Établir qu'à chaque valeur propre de T correspond un sous-espace propre de dimension 1 et que ces sous-espaces propres sont deux à deux orthogonaux.

4 La fonction de Bessel et ses zéros

1. Soit y une solution de (E) dans un intervalle I inclus dans $]0, +\infty[$. Mettre sous une forme aussi simple que possible les dérivées premières des fonctions qui à x associent respectivement $xy'(x)^2 + y(x)^2$ et $x^2y'(x)^2 + xy(x)^2$.
2. (a) Montrer que, lorsque x tend vers $+\infty$, $xh'(x)^2 + h(x)^2$ tend vers une limite $L \geq 0$.
   (b) En déduire que h est bornée dans $\mathbb{R}_+$ et que h' tend vers 0 lorsque x tend vers $+\infty$.
3. (a) Établir l'existence des quatre intégrales suivantes, où a désigne un réel strictement positif quelconque :

$$\int_a^{+\infty} h'(x)^2 \mathrm{d}x; \quad \int_a^{+\infty} h(x)h''(x)\mathrm{d}x; \quad \int_a^{+\infty} \frac{h(x)h'(x)}{x}\mathrm{d}x, \quad \int_a^{+\infty} \frac{h(x)^2}{x}\mathrm{d}x$$

   (b) En déduire que $L = 0$ (on pourra raisonner par l'absurde).
   (c) Montrer que les fonctions h'^2, hh'', $x \mapsto \frac{h(x)h'(x)}{x}$ et $x \mapsto \frac{h(x)^2}{x}$ sont intégrables sur $[a, +\infty[$.
4. On suppose, dans cette seule question, qu'il existe $r > 0$ tel que $h(r) = 0$ et que, pour tout $x \geq r$, l'on a $h(x) \geq 0$.
   (a) Que dire du sens de variation de $xh'(x)$ pour $x \geq r$?
   (b) On suppose que l'on connait une valeur $c > r$ telle que $h'(c) < 0$; trouver une fonction majorant h sur $[c, +\infty[$ et en tirer une contradiction.
   (c) En déduire que h est croissante sur $[r, +\infty[$. Est-ce possible ?
5. Montrer que h admet une infinité de zéros.
6. Soit r un zéro de h.

(a) Démontrer l'existence d'au moins un zéro de h' sur $]r,+\infty[$.

(b) Soit q un zéro de h'. Établir que

$$\forall x > r, \quad |h'(x)| \leqslant |h'(r)|.$$

En déduire une majoration de $\left|\int_r^q h(x)\mathrm{d}x\right|$.

(c) À l'aide de l'intégrale précédente, établir l'inégalité

$$q \geq r + \sqrt{2r}.$$

7. (a) Démontrer que, pour tout entier $n > 0$, l'intervalle $[n, n+1[$ contient au plus un zéro de h.

   (b) Établir que l'on peut ranger les zéros de h en une suite strictement croissante (r_n), de limite infinie, et telle que

$$\lim_{n\to\infty} (r_{n+1} - r_n) = +\infty.$$

   (c) Trouver une constante $K > 0$ telle que pour tout entier $n \geq 1$ on ait $r_n \geq Kn^2$.

8. Donner l'allure de la courbe représentative de h. On établira que, dans chaque intervalle $[r_n, r_{n+1}]$, h' s'annule une fois et une seule et que la suite qui à n associe $M_n = \max\{|h(x)| \ / \ x \in [r_n, r_{n+1}]\}$ est décroissante et tend vers 0.