CHAPITRE 9

# ENDOMORPHISMES SYMÉTRIQUES DES ESPACES EUCLIDIENS

## I Projections orthogonales

### 1 Rappels

*(Bases orthonormées.)* Tout espace euclidien admet des bases orthonormées ; toute famille orthonormée d'un espace euclidien se complète en une *bon*. Dans un espace préhilbertien réel, une famille orthogonale sans vecteur nul est libre.

*(Orthogonal d'un sous-espace ; contre-exemple en dimension infinie.)* Si $E$ est euclidien, pour tout sous-espace de $V$, on a $V \oplus V^{\perp} = E$. Autrement dit, $V^{\perp}$ est toujours un supplémentaire de $V$ ; c'est *le* supplémentaire orthogonal de $V$. Si $(e_j)_{1 \leqslant j \leqslant n}$ est une *bon* de $V$, la projection orthogonale sur $V$ est $p_V : x \mapsto \displaystyle\sum_{j=1}^{n} \langle e_j |\ x \rangle e_j$. En particulier, $d(x, V) = \|x - p_V(x)\|$.
Nouveau : si $E$ est préhilbertien réel, on n'a *a priori* que $V \oplus V^{\perp} \subset E$. Par exemple, si $E = \mathcal{C}([0,1], \mathbb{R})$ muni du produit scalaire usuel $\displaystyle\int_0^1 fg$ et $V$ est le sous-espace des fonctions polynomiales, $V^{\perp} = \{0\}$, donc $V \oplus V^{\perp} \neq E$.

*(Procédés d'orthonormalisation de Schmidt.)* Soit $(e_j)_{1 \leqslant j \leqslant n}$ une base de $E$ euclidien. Alors il existe une unique *bon* $(u_j)_{1 \leqslant j \leqslant n}$ – appelée orthonormalisée de Schmidt de $(e_j)_{1 \leqslant j \leqslant n}$ – telle que $\mathrm{Vect}(u_j)_{1 \leqslant j \leqslant k} = \mathrm{Vect}(e_j)_{1 \leqslant j \leqslant k}$ et $\langle u_k | e_k \rangle > 0$ pour tout $k \in [\![1, n]\!]$. L'algorithme qui donne les $u_j$ vient d'une succession de projections orthogonales.

*(Endomorphismes orthogonaux.)* Soit $E$ euclidien. On note

$$O(E) = \{f \in \mathcal{L}(E) | \forall x \in E,\ \|f(x)\| = \|x\|\} \text{ et } SO(E) = \{f \in O(E) | \det f = 1\}.$$

Les éléments de $O(E)$ (resp. $SO(E)$) s'appellent des endormorphismes orthogonaux – ou isométries vectorielles – (resp. rotations). D'après les identités de polarisation

$$\begin{aligned}\langle x|y \rangle &= \frac{1}{4}(\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2) = \frac{1}{2}(\|x+y\|^2 - \|x\|^2 - \|y\|^2) \\ &= \frac{1}{2}(\|x\|^2 + \|y\|^2 - \|x-y\|^2),\end{aligned}$$

(auxquelles il faut ajouter l'identité du parallélogramme), $f \in O(E)$ si et seulement si pour tous $x, y \in E$, $\langle f(x)|f(y) \rangle = \langle x|y \rangle$. Ce sont des sous-groupes compacts de $GL(E)$. De même, $O_n(\mathbb{R}) = \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) | {}^tMM = I_n\}$ est un sous-groupe compact de $GL_n(\mathbb{R})$, et si $\mathcal{B}$ *bon* de $E$, $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}} : O(E) \to O_n(\mathbb{R})$ est un isomorphisme de groupe. De plus, $M \in O_n(\mathbb{R})$ si et seulement si ses lignes (ou ses colonnes) forment une *bon.*

**Proposition** *(Théorème de représentation de Riesz) Soit $E$ un espace euclidien et $\varphi$ une forme linéaire sur $E$. Alors il existe un unique $x_0 \in E$ tel que pour tout $x \in E$, $\varphi(x) = \langle x_0 | x \rangle$.*

**Schéma de preuve** ◀ L'application linéaire $y \mapsto \langle y | \cdot \rangle$ est injective entre $E$ et $E^*$, donc bijective. ▶

**Remarque** Toute forme linéaire sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est de la forme $M \mapsto \mathrm{Tr}(AM)$ où $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

## 2 Projections orthogonales sur un sous-espace de dimension finie

Jusqu'à la fin de cette partie, $E$ désigne un espace préhilbertien réel.

**Proposition** *Soit $V$ un sous-espace de dimension finie de $E$. Alors $E = V \oplus V^\perp$. En particulier, il existe une unique projection orthogonale sur $V$.*

**Schéma de preuve** ◀ On choisit une base orthonormée $(e_1, \ldots, e_n)$ de $V$. Alors $x \mapsto \sum_{j=1}^{n} \langle e_j | x \rangle e_j$ est un projecteur orthogonal, d'image $V$. ▶

**Proposition** *Soit $V$ un sous-espace de dimension finie de $E$ et $x \in E$. Alors il existe un unique $y \in V$ tel que $d(x, V) = d(x, y)$. De plus, $y$ est le projeté orthogonal de $x$ sur $V$.*

**Schéma de preuve** ◀ Soit $z$ le projeté orthogonal de $x$ sur $V$. Pour tout $y \in V$, $\|x - y\|^2 = \|x - z\|^2 + \|y - z\|^2$ (Pythagore) car $y - z \in V$ et $x - z \in V^\perp$. D'où $\mathrm{d}(x, y)^2$ est minimal *ssi* $\|y - z\|^2 = 0$. ▶

**Exemple** Calculer $\inf\limits_{a,b \in \mathbb{R}} \displaystyle\int_0^1 (t \ln t - at - b)^2 \, \mathrm{d}t$.

**Proposition** *(Inégalité de Bessel)*

*Soit $(e_1, \ldots, e_n)$ famille orthonormée dans $E$ et $x \in E$. Alors* $\sum_{k=1}^{n} \langle x | e_k \rangle^2 \leqslant \|x\|^2$.

## 3 Suites totales

**Définition** *(Suites totales) Une suite $(e_k)_{k \in \mathbb{N}}$ dans $E$ est dite totale si elle engendre une partie dense de $E$.*

**Proposition** *Soit $(e_k)_k$ est une suite orthonormale totale de $E$ et $x \in E$. On note $p_n$ la projection orthogonale sur* $\mathrm{Vect}(e_0, \ldots, e_n)$. *Alors la suite $(p_n(x))_n$ converge vers $x$ (pour la norme euclidienne de $E$). En particulier, il existe une suite réelle $(\alpha_k)$ telle que $\sum_k \alpha_k u_k$ converge vers $x$ (pour la norme euclidienne).*

**Schéma de preuve** ◀ Soit $V_n = \mathrm{Vect}(e_0, \ldots, e_n)$. Par croissance de la famille $(V_n)_n$, la suite $\|x - p_n(x)\|$ décroît donc converge. Soit $l$ sa limite. Si par l'absurde $l$ était strictement positif. Par densité de $\mathrm{Vect}(e_k)_k$ dans $E$, il existe $y \in \mathrm{Vect}(e_k)_k$ tel que $\|x - y\| \leqslant l/2$. Mais par définition, il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $y \in V_n$. Or $\|x - p_n(x)\| \leqslant \|x - y\|$. Contradiction. ▶

**Remarque** Il est tentant de noter $\sum_{k=0}^{+\infty} \alpha_k u_k$ la limite (pour la norme euclidienne) de $\sum_k \alpha_k u_k$. Cela peut prêter à confusion lorsque les $u_k$ sont des fonctions, pour lesquelles il y a d'autres modes de convergence.

**Exemples**

1. Dans $\mathcal{C}([0,1],\mathbb{R})$ muni du produit scalaire $\langle f|g\rangle = \displaystyle\int_0^1 fg$, la suite $(x^n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite totale. Son orthonormalisée est une suite orthonormale totale. (Le théorème de Müntz en donne beaucoup d'autres.)
2. Une famille orthonormale totale d'un espace euclidien est exactement une base orthonormée.
3. Soit $E = l^2(\mathbb{N},\mathbb{R})$ muni du produit scalaire $\langle (u_k)_k|(v_k)_k\rangle = \displaystyle\sum_{j=0}^{+\infty} u_j v_j$. Alors en notant $u^{(p)}$ la suite telle que $u_k^{(p)} = \delta_{p,k}$, $(u^{(p)})_{p\in\mathbb{N}}$ est une suite orthonormale totale dans $E$.
4. Polynômes orthogonaux. (cf TD n° 7.)
5. On munit l'espace $\mathcal{C}_{2\pi}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ des fonctions continues $2\pi$-périodiques du produit scalaire $\langle f|g\rangle = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} fg$. On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ avec $u_0 = 1$, $u_{2n-1}(t) = \sqrt{2}\cos nt$ si $n \geqslant 1$ et $u_{2n}(t) = \sqrt{2}\sin nt$ si $n \geqslant 1$. Alors $(u_n)$ est orthonormale totale. (*cf* TD n° 6.)
6. On appelle *polynôme trigonométrique complexe* un élément de $\mathrm{Vect}(e^{ikt})_{k\in\mathbb{Z}}$. On appelle *polynôme trigonométrique réel* un élément de $\mathrm{Vect}\left((\cos(kt))_{k\in\mathbb{N}} \cup (\sin(kt))_{k\in\mathbb{N}^*}\right)$.

   **Proposition** *(*Théorème de Weierstrass trigonométrique - HP)
   *Soit $f \in \mathcal{C}_{2\pi}(\mathbb{R},\mathbb{K})$ et $\varepsilon > 0$. Alors il existe $P$ polynôme trigonométrique (réel ou complexe selon que $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$) tel que $\|f-P\|_\infty \leqslant \varepsilon$.*

   (*cf* TD n° 6 pour une démonstration.)

   **Point culture** : Supposons pour simplifier $\mathbb{K} = \mathbb{R}$. On peut considérer la suite $(p_n(f))_n$ où $p_n$ est la projection orthogonale sur $\mathrm{Vect}(u_0,\ldots,u_{2n})$. La fonction $p_n(f)$ est de la forme $t \mapsto a_0 + \displaystyle\sum_{k=1}^n a_k\cos(kt) + \sum_{k=1}^n b_k\sin(kt)$ ; ce sont les sommes partielles de la série de Fourier de $f$. L'inégalité de Bessel signifie que

   $$|a_0|^2 + \frac{1}{2}\sum_{k=1}^n \left(|a_k|^2 + |b_k|^2\right) \leqslant \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f|^2.$$

   Bien noter qu'on a convergence pour la norme euclidienne, et *a priori* même pas convergence simple ! De fait, la question de la convergence simple est compliquée, et à conduit le jeune Cantor qui s'y est intéressé à être emmené plus loin sans doute qu'il ne s'y attendait...

# II Endomorphismes des espaces euclidiens

Dans cette partie, $E$ est un espace euclidien.

## 1 Endomorphismes symétriques

**Définition** *Un endomorphisme $f \in \mathcal{L}(E)$ est symétrique (ou auto-adjoint) si pour tous $x, y \in E$,*

$$\langle f(x)|y\rangle = \langle x|f(y)\rangle.$$

*On note $\mathcal{S}(E)$ l'espace vectoriel des endomorphismes symétriques de $E$.*

**Proposition** *Soit $\mathcal{B}$ une base orthonormée de $E$ et $f \in \mathcal{L}(E)$. Alors $f$ est symétrique si et seulement si* $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}} f$ *est une matrice symétrique.*

**Schéma de preuve** ◀ Les coefficients matriciels sont les $\langle e_i | f(e_j) \rangle$. ▶

**Proposition** *Soit $p \in \mathcal{L}(E)$ un projecteur. Alors $p$ est un projecteur orthogonal si et seulement si $p$ est symétrique.*

**Schéma de preuve** ◀ Pour le sens direct : $\langle p(x)|\ y\rangle = \langle p(x)|y - p(y) + p(y)\rangle = \langle p(x)|\ p(y)\rangle$ qui vaut aussi $\langle x|\ p(y)\rangle$. Pour la réciproque, si $z \in \operatorname{Ker} p$ : $\langle p(y)|\ z\rangle = \langle y|\ 0\rangle = 0$ et on a bien $\operatorname{Im} p \perp \operatorname{Ker} p$. ▶

**Remarque** Si $f \in \mathcal{L}(E)$ est symétrique et stabilise un sous-espace $F$, alors $f_F$ est encore symétrique.

## 2 Le théorème spectral

**Proposition** *Soit $f \in \mathcal{S}(E)$ et $F$ un sous-espace de $E$ stable par $f$. Alors l'orthogonal $F^{\perp}$ de $F$ est stable par $f$.*

**Schéma de preuve** ◀ Soit $y \in F^{\perp}$. Pour tout $x \in F$, $\langle x|\ f(y)\rangle = \langle f(x)|\ y\rangle = 0$, d'où $f(y) \perp F$. ▶

**Théorème spectral** *Soit $f \in \mathcal{S}(E)$. Alors $E$ est somme directe orthogonale des sous-espaces propres de $f$. En particulier, $f$ est diagonalisable dans une base orthonormée.*

**Schéma de preuve** ◀ C'est clair en dimension 1. On suppose $\dim E \geqslant 2$. Par récurrence forte sur $\dim E$, il suffit de prouver que $f$ admet un sous-espace stable strict et non réduit à $\{0\}$.

Preuve 1 : C'est clair si $\dim E = 2$ (polynôme caractéristique scindé sur $\mathbb{R}$) et sinon, $E$ admet un plan ou une droite stable.

Preuve 2 : (Cauchy) Quitte à prendre sa matrice dans une base orthonormée, il suffit de prouver que $M \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ admet une valeur propre réelle. Soit $\lambda$ une valeur propre complexe et $X \in \mathbb{C}^n$ un vecteur propre associé. Alors $\overline{X}^T AX = \lambda \overline{X}^T X$. En transposant, on a aussi $\overline{X}^T AX = \overline{\lambda}\overline{X}^T X$. Donc $\lambda$ est réel.

Preuve 3 : (Maximum de $x \mapsto \langle x|f(x)\rangle$ sur la sphère unité) Soit $S$ la sphère unité de $E$ et $g : S \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \langle x|f(x)\rangle$. Par le théorème des bornes atteintes, $g$ atteint son maximum en $x_0 \in S$. Soit $y \perp x_0$ et $t \mapsto \gamma(t) = (x_0 + ty)/\|x_0 + ty\|$. Alors $t \mapsto g(\gamma(t))$ est dérivable en $t = 0$ et $0 = (g \circ \gamma)'(0) = 2\langle f(x_0)|y\rangle$. Mais alors $f(x_0) \in (x_0^{\perp})^{\perp} = \mathbb{R}x_0$. On a trouvé un vecteur propre. ▶

**Corollaire** *Si $M$ est une matrice symétrique réelle, alors il existe $P \in O_n(\mathbb{R})$ et $D \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ diagonale réelle telles que $M = PD^tP = PDP^{-1}$. On peut même prendre $P \in SO_n(\mathbb{R})$ et les termes diagonaux de $D$ décroissants.*

**Exemple** *Application (HP) : racine carré d'un endomorphisme symétrique à valeurs propres positives.* Soit $f \in S(E)$ à valeurs propres positives. Montrons qu'il existe un unique $u \in S(E)$ à valeurs propres positives tel que $u^2 = f$. Existence : l'endomorphisme $u$ qui vaut l'homothétie de rapport $\sqrt{\lambda_k}$ sur $E_{\lambda_k}(f)$ convient. Unicité : si $v$ convient aussi, alors $v$ stabilise chaque $E_{\lambda_k}(f)$, et l'application induite $v_k$ est symétrique à spectre positif. Mais le carré de ses valeurs propre est $\lambda_k$. D'où $v_k$ est une homothétie, et vaut l'induite $u_k$ de $u$.

## 3 Endomorphismes orthogonaux

**Proposition** *Un automorphisme est orthogonal si et seulement si pour tous $x, y \in E$,*

$$\langle f(x)|y\rangle = \langle x|f^{-1}(y)\rangle.$$

**Schéma de preuve ◀** Si $f$ est orthogonal, $\langle f(x)|f(f^{-1}(y))\rangle = \langle x|f^{-1}(y)\rangle$. Réciproquement, $\langle f(x)|f(y)\rangle = \langle x|f^{-1}(f(y))\rangle = \langle x|y\rangle$, donc $f$ est orthogonal. ▶

**Proposition** *Soit $f \in O(E)$ et $F$ un sous-espace de $E$ stable par $f$. Alors l'orthogonal $F^\perp$ de $F$ est stable par $f$.*

**Schéma de preuve ◀** Déjà, $f^{-1}$ stabilise aussi $F$. Soit $y \in F^\perp$. Pour tout $x \in F$, $\langle f(y)|x\rangle = \langle y|f^{-1}(x)\rangle = 0$ car $f^{-1}(x) \in F$. ▶

**Proposition** *(Réduction des endomorphismes orthogonaux) Soit $f \in O(E)$. Alors il existe une base orthonormée $\mathcal{B}$ de $E$ telle que $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f) = \mathrm{Diag}(R_{\theta_1}, \dots, R_{\theta_r}, I_p, -I_q)$ où $r, p, q \in \mathbb{N}$ et $\theta_1, \dots, \theta_r \in \mathbb{R} \setminus \pi\mathbb{Z}$.*

**Schéma de preuve ◀** Les seules valeurs propres réelles éventuelles sont $\pm 1$. Soit $V$ l'orthogonal de $E_1(f) \oplus E_{-1}(f)$. Il suffit de démontrer que dans une base orthonormée de $V$, l'application induite $f_V$ a une matrice de la forme $\mathrm{Diag}(R_{\theta_1}, \dots, R_{\theta_r})$.

On le montre par récurrence forte. Remarquons déjà que $\dim V$ est paire, car sinon $f_V$ admet une valeur propre réelle, ce qui contredit que les droites propres sont dans $V^\perp$. C'est clair si $\dim V = 0$ ou $\dim V = 2$. Si $\dim V \geqslant 4$, alors $V$ contient un plan stable $V_0$ par $f$. Donc l'orthogonal $V_1$ de $V_0$ dans $V$ est aussi stable par $f$. Par hypothèse de récurrence, dans des bases adaptées de $V_0$ et $V_1$, les matrices respectives de $f_{V_0}$ et $f_{V_1}$ sont de la forme $R_{\theta_1}$ et $\mathrm{Diag}(R_{\theta_2}, \dots, R_{\theta_r})$ où $r = \dim V_1/2$. En concaténant les bases, on a ce qu'on voulait. ▶

**Proposition** *(Réduction des rotations de l'espace) On suppose $E$ de dimension 3. Soit $f \in SO(E)$. Alors il existe une base orthonormée de $E$ dans laquelle la matrice de $f$ est*

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}.$$

**Remarque** Si dans la base précédente, on permute $e_2$ et $e_3$, on peut aussi obtenir la matrice $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & \sin\theta \\ 0 & -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$. Prudence avant de parler de “l'angle” de la rotation.

## 4 Compléments (HP)

**Définition** *Soit $f \in \mathcal{L}(E)$. Il existe un unique endomorphisme $f^* \in \mathcal{L}(E)$, appelé adjoint de $f$, tel que pour tous $x, y \in E$,*

$$\langle f(x)|y\rangle = \langle x|f^*(y)\rangle.$$

**Remarque** Un endomorphisme est symétrique si et seulement si $f = f^*$ et orthogonal si et seulement si $f^* = f^{-1}$. La matrice de $f^*$ dans une base orthonormée est la transposée de la matrice de $f$. Enfin, l'application $f \mapsto f^*$ est linéaire involutive et vérifie $(f \circ g)^* = g^* \circ f^*$.

**Définition** *Un endomorphisme $f \in \mathcal{S}(E)$ est dit positif (resp. défini positif) si ses valeurs propres sont positives (resp. strictement positives).*

**Exemple** Si $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, alors ${}^tMM \in \mathcal{S}^+(E)$. Si $M \in GL_n(\mathbb{R})$, alors ${}^tMM \in \mathcal{S}^{++}(E)$.

**Proposition**
1. *L'endomorphisme $f \in \mathcal{S}(E)$ est positif si et seulement si $\langle f(x)|x\rangle \geqslant 0$ pour tout $x \in E$. On note $\mathcal{S}^+(E)$ l'ensemble des endomorphismes symétriques positifs.*
2. *L'endomorphisme $f \in \mathcal{S}(E)$ est défini positif si et seulement si $\langle f(x)|x\rangle > 0$ pour tout $x$ non nul dans $E$. On note $\mathcal{S}^{++}(E)$ l'ensemble des endomorphismes symétriques définis positifs.*

**Schéma de preuve** ◀ 1. Soient $\lambda_1 \geqslant \lambda_2 \geqslant \cdots \geqslant \lambda_n$ les valeurs propres de $f$ comptées avec multiplicité. Soit $(e_1, \ldots, e_n$ une base orthonormée de diagonalisation. Si $x = x_1e_1 + \cdots + x_ne_n$, alors $\langle f(x)|x\rangle = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k x_k^2$. Si les valeurs propres sont positives, alors $\langle f(x)|x\rangle$ est positif ; réciproquement, en prenant $x = e_j$, on obtient $\lambda_j \geqslant 0$.

2. Par le même calcul, on a $\langle f(x)|x\rangle = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k x_k^2 > 0$ si $x \neq 0$ et $f$défini positif ; réciproquement, $x = e_j$ donne $\lambda_j > 0$. ▶

**Remarque** Une matrice symétrique positive n'est pas une matrice symétrique dont les coefficients sont positifs...

**Proposition** *(Décomposition polaire) Soit $f \in GL(E)$. Alors il existe un unique couple $(u, s) \in O(E) \times \mathcal{S}^{++}(E)$ tel que $f = u \circ s$. De manière équivalente, pour toute matrice $M \in GL_n(\mathbb{R})$, il existe un unique $(U, S) \in O_n(\mathbb{R}) \times \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ tel que $M = US$.*

**Schéma de preuve** ◀ Analyse : si $M = US$, alors ${}^tMM = S^2$. D'où $S$ est racine carrée positive de ${}^tMM$ et $U = MS^{-1}$. D'où l'unicité.

Synthèse : on a déjà ${}^tMM \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$. Si $S$ est la racine carrée positive de ${}^tMM$, on a $S \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$. On pose $U = MS^{-1}$. Alors ${}^tUU = {}^tS^{-1}\,{}^tMMS^{-1} = S^{-1}S^2S^{-1} = I_n$. On a bien l'existence. ▶

**Remarque** Si $u \in \mathcal{L}(E)$, on a encore l'existence de $(u, s) \in O(E) \times \mathcal{S}^{++}(E)$ tel que $f = u \circ s$, mais plus d'unicité. De même pour $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.