1 Exemples de pré-algèbres de $\mathscr{L}(E)$

1.1 Exemples de pré-algèbres de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$

1. Le cours assure que $\mathscr{T}_n(\mathbb{K})$ et $\mathscr{T}_n^+(\mathbb{K})$ sont des sous-espaces vectoriels stables par produits, donc sont des pré-algèbres.

2. $\mathscr{S}_n(\mathbb{K})$ n'est pas une pré-algèbre : si $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, le produit $AB = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ est un produit de matrices symétriques qui n'est pas symétrique. De même, $\mathscr{A}_2(\mathbb{K})$ n'est pas une pré-algèbre car si $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, alors $A^2 = -I_2$ et A^2 n'est pas antisymétrique.

3. On garde les notations de la question précédentes. Par produit par blocs dans $\mathscr{S}_n(\mathbb{K})$, le produit $\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} B & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} AB & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ est un produit de matrices symétriques qui n'est pas symétrique car AB ne l'est pas. De même, $\mathscr{A}_n(\mathbb{K})$ n'est pas une pré-algèbre : si $M = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in \mathscr{A}_n(\mathbb{K})$ avec $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, alors M^2 n'est pas antisymétrique car $M^2 = \begin{pmatrix} -I_2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

1.2 Exemples de pré-algèbres de $\mathscr{L}(E)$

4. Si $x \in F$, $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$ et $u, v \in \mathscr{A}_F$, alors $(\lambda u + \mu v)(x) = \lambda u(x) = \mu v(x) \in F$ car c'est un espace vectoriel. De même, $u \circ v(x) \in F$ car $u(x) \in F$ puis $v(u(x)) \in F$. De plus $\mathrm{Id}_E(F) = F$ donc $\mathrm{Id}_E \in \mathscr{A}_F$.

5. Soit $M = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(u) = (m_{i,j})_{i,j}$. Alors $u \in \mathscr{A}_F$ si et seulement si pour tout $i \in [\![1,p]\!]$, $u(e_i) \in \mathrm{Vect}(e_1, .., e_p)$. Or $u(e_j) = \sum\limits_{1 \leq k \leq n} m_{k,j} e_k$. Donc $u \in \mathscr{A}_F$ si et seulement si $m_{i,j} = 0$ pour tout couple $(i,j) \in [\![p+1,n]\!] \times [\![1,p]\!]$.
   D'après la question précédente, et puisque $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}$ est un isomorphisme, il suffit de déterminer la dimension de l'espace vectoriel des matrices ayant les coefficients $(i,j) \in [\![p+1,n]\!] \times [\![1,p]\!]$ nuls. C'est immédiatement $\mathrm{Vect}(E_{i,j})_{(i,j) \in [\![1,n]\!]^2 \setminus [\![p+1,n]\!] \times [\![1,p]\!]}$ qui est donc de dimension $n^2 - p(n-p) = n^2 - np + p^2$.

6. En étudiant $t \mapsto n^2 - nt + t^2$ sur $[1, n-1]$, on s'aperçoit que cette fonction est maximale en $t = 1$ et $t = n-1$. D'où $\max\limits_{1 \leq p \leq n-1} (n^2 - pn + p^2) = n^2 - n + 1$. (On peut aussi remarquer que c'est un trinôme minimal en $p/2$, donc qui atteint son maximum en une des bornes de $[1, n-1]$.)

1.3 Exemples de pré-algèbres de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ diagonalisables et non diagonalisables

7. On peut faire le calcul. Mais aussi remarquer que le sous-ensemble considéré est $\mathrm{Vect}(I_2, J)$ où $J = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. C'est donc un espace vectoriel, et vu que $J^2 = -I_2$, on a $(aI_2 + bJ)(a'I_2 + b'J) = (aa' - bb')I_2 + (ab' + ba')J$ qui est bien de la forme souhaitée.

8. La matrice $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \in \Gamma(\mathbb{R})$ n'est pas diagonalisable sur $\mathbb{R}$ car son polynôme caractéristique est $X^2 + 1$ (car de trace nulle et de déterminant 1), qui n'est pas scindé sur $\mathbb{R}$.

9. En revanche, $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ est diagonalisable sur $\mathbb{C}$ car annulé (théorème de Cayley-Hamilton) par son polynôme caractéristique $X^2 + 1$ scindé à racines simples sur $\mathbb{C}$. Toute base de diagonalisation de A est aussi une base de diagonalisation de I_2, donc de $aI_2 + bJ$, donc de toute matrice de $\Gamma(\mathbb{C})$.

2 Une pré-algèbre commutative de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$

10. Par définition,

$$J = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Pour $n=2$, $J^2=I_2$. Si $n>2$, J^2 envoie e_j sur e_{j+2} si $j\leq n-2$, e_{n-1} sur e_1 et e_n sur e_2, donc

$$J^2=\begin{pmatrix}0&0&\cdots&0&1&0\\0&0&\cdots&0&0&1\\1&0&\cdots&0&0&0\\0&1&\cdots&0&0&0\\\vdots&\vdots&\ddots&\vdots&\vdots&\vdots\\0&0&\cdots&1&0&0\end{pmatrix}.$$

11. Soit $A=\mathrm{Vect}(J^k)_{k\in\mathbb{N}}$. Montrons que $\mathscr{B}=(J^k)_{0\leq k\leq n-1}$ est une base de A.
    $\mathscr{B}$ est génératrice : il suffit de montrer que $J^k\in\mathrm{Vect}(J^k)_{0\leq k\leq n-1}$ pour tout $k\in\mathbb{N}$. Puisque $J^n e_k=e_k$, $J^n=I_n$ et donc la suite $(J^k)_{k\in\mathbb{N}}$ est périodique de plus petite période n.
    $\mathscr{B}$ est libre : soient $a_0,\ldots,a_{n-1}\in\mathbb{R}$ tels que $a_0I_n+a_1J+\cdots a_{n-1}J^{n-1}=0$. (Remarquons pour plus tard qu'il s'agit de la matrice M ci-dessous.) Par définition de J, la première colonne de cette matrice est la colonne ${}^t(a_0,\ldots,a_{n-1})$, qui est nulle, et donc tous les a_j sont nuls.
12. Par définition, $A=\mathbb{K}[J]$, dont les éléments sont les $P(J)$ où $P\in\mathbb{R}[X]$. Puisque $P_1(J)P_2(J)=(P_1P_2)(J)=(P_2P_1(J)=P_2(J)P_2(J)$, A est commutatif.
13. On a vu à la question 11 que $J^n=I_n$. Donc X^n-1 annule J. Puisque X^n-1 est simplement scindé sur $\mathbb{C}$, J est diagonalisable sur $\mathbb{C}$. De plus, on a vu que $a_0I_n+a_1J+\cdots a_{n-1}J^{n-1}=0$ implique que les a_k sont nuls. Donc J n'est annulé par aucun polynôme non nul de degré strictement inférieur à n. Donc μ_J est de degré supérieur ou égal à n. Mais d'après le théorème de Cayley-Hamilton, $\deg\mu_J\leq n$ car μ_J divise χ_J qui est de degré n. Donc $\deg\mu_J=n=\deg X^n-1$. Puisque les deux annulent J, μ_J divise X^n-1. Les deux étant unitaires de même degré, ils sont égaux. De même, μ_J divise χ_J. Les deux étant unitaires de même degré, $\mu_J=\chi_J$.
14. Si $n=2$, $\mu_J=X^2-1$ est simplement scindé, donc J est diagonalisable. Si $n>2$, $\mu_J=X^n-1$ n'est pas scindé sur $\mathbb{R}$ (par exemple parce que $e^{i2\pi/n}\notin\mathbb{R}$ est une racine complexe). Donc J n'est pas diagonalisable sur $\mathbb{R}$.
15. D'après la question 13, en notant $\omega=e^{i2\pi/n}$, les valeurs propres complexes de J sont les ω^k pour $k\in[\![0,n-1]\!]$. Or $x=(x_1,\ldots,x_n)$ non nul est vecteur propre pour la valeur propre ω^k si et seulement si $x_{j+1}=\omega^kx_j$ si $j<n$ et $x_1=\omega^kx_n$. Donc $u_k=(1,\omega^k,\omega^{2k},\ldots,\omega^{(n-1)k})$ est vecteur propre. Puisque J admet n valeurs propres, les espaces propres sont tous de dimension 1. Donc $E_{\omega^k}(J)=\mathrm{Vect}\,u_k$. On a trouvé tous les vecteurs propres.
16. Soit $P\in GL_n(\mathbb{C})$ telle que $P^{-1}JP=D$ est diagonale. Alors $P^{-1}J^kP=(P^{-1}JP)^k=D^k$ est aussi diagonale. Donc les J^k sont simultanément diagonalisables. A fortiori, les éléments de $A=\mathrm{Vect}(J^k)$ aussi.
17. On a vu que $M=\sum_{k=0}^{n-1}a_kJ^k$. Si on prend pour P la matrice dont les colonnes sont dans l'ordre $u_0,u_1,\ldots,u_{n-1}$, alors $P^{-1}JP=D=\mathrm{Diag}(1,\omega,\omega^2,\ldots,\omega^{n-1})$ d'après le cours. Si $Q=\sum_{p=0}^{n-1}a_kX^k$, alors $M=Q(J)$.

    $$M=Q(J)=Q(PDP^{-1})=P\,\mathrm{Diag}(Q(1),\ldots,Q(\omega^{n-1}))P^{-1}.$$

    Puisque M est semblable à la matrice diagonale $\mathrm{Diag}(Q(1),\ldots,Q(\omega^{n-1}))$, ses valeurs propres sont les $Q(\omega^k)$.

3 Pré-algèbres de $\mathscr{L}(E)$ de dimension maximale

18. Soit $(e_1,..,e_{n^2-r})$ une base de $\mathscr{A}$ que l'on complète en $(e_1,..,e_{n^2})$ une base de $\mathscr{L}(E)$. Soit $(e_1^*,..,e_{n^2}^*)$ la base duale. Soit $f\in\mathscr{L}(E)^*$, et donc f s'écrit $\sum_{1\leq j\leq n^2}\lambda_je_j^*$. Alors $f\in\mathscr{A}^\perp$ si et seulement si pour tout $k\in[\![1,n^2-r]\!]$, on a $f(e_k)=0$, *i.e.* $\lambda_1=\cdots=\lambda_{n^2-r}=0$. Donc $\mathscr{A}^\perp=\mathrm{Vect}(e_{n^2-r+1}^*,..,e_{n^2}^*)$ Comme cette famille est libre, c'est une base et donc $\dim\mathscr{A}^\perp=r$.
19. Déjà $\mathrm{Tr}(E_{i,j}B)=0$ (prendre $M=E_{i,j}$). On écrit $B=\sum_{1\leq k,l\leq n}b_{k,l}E_{k,l}$. On a donc

    $$\begin{aligned}E_{i,j}B&=\sum_{1\leq k,l\leq n}b_{k,l}E_{i,j}E_{k,l}\\&=\sum_{1\leq k,l\leq n}b_{k,l}\delta_{j,k}E_{i,l}=\sum_{1\leq l\leq n}b_{j,l}E_{i,l}.\end{aligned}$$

Donc $\mathrm{Tr}(E_{i,j}B) = \sum_l b_{j,l} \mathrm{Tr}\, E_{i,l} = b_{j,i}$ qui est donc nul pour tout couple (i, j).

20. Déjà ϕ_v est bien une forme linéaire sur $\mathscr{L}(E)$. Montrons que Φ est linéaire. Si $v, v', u \in \mathscr{L}(E)$ et $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$ alors

$$\phi_{\lambda v+\mu v'}(u) = \mathrm{Tr}(u(\lambda v + \mu v')) = \lambda\,\mathrm{Tr}(uv) + \mu\,\mathrm{Tr}(uv').$$

Puisque $\mathscr{L}(E)$ et son dual ont même dimension finie, il suffit de montrer que Φ est injective. Or par définition, $v \in \mathrm{Ker}\,\Phi$ est équivalent à ce que pour tout $u \in \mathscr{L}(E)$, on a $\mathrm{Tr}(vu) = 0$. En passant aux matrices dans une base $\mathscr{B}_0$ et en notant $B = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}_0}(v)$, ceci équivaut à ce que pour tout matrice M, $\mathrm{Tr}(MB) = 0$. D'après la question précédente B= 0 et donc $v = 0$. Donc $\Phi : v \mapsto \phi_v$ est un isomorphisme de $\mathscr{L}(E)$ sur son dual.

21. D'après la question précédente et la question 18, il existe $v_1,..,v_r$ tels que $e^*_{n^2-r+i} = \phi_{v_i}$. Comme Φ est un isomorphisme, elle envoie une famille libre sur une famille libre, et la famille $(v_1,..,v_r)$ est encore libre. Par définition des ϕ_{v_i}, $a \in \mathscr{A}$ si et seulement si pour tout $i \in [\![1,r]\!]$, on a $\phi_{v_i}(u) = \mathrm{Tr}(uv_i) = 0$.

22. Pour tout $u \in \mathscr{A}$ et tout $i \in [\![1,r]\!]$, on a $\phi_{av_i}(u) = \mathrm{Tr}(uav_i) = 0$ car $ua \in \mathscr{A}$. Donc ϕ_{av_i} s'annule sur $\mathscr{A}$, donc appartient à $\mathscr{A}^{\perp}$. Donc $\phi_{av_i} \in \mathrm{Vect}(\phi_{v_1},..,\phi_{v_r})$ et en appliquant Φ^{-1}, on obtient $av_i \in \mathrm{Vect}(v_1,..,v_r)$.

23. Comme $v_1 \neq 0$, il existe $x \in E$ qui n'appartient pas au noyau de v_1. Soit $F = \mathrm{Vect}(v_1(x),..,v_r(x))$. Déjà F est de dimension $\leqslant r$ et $\geqslant 1$ car $v_1(x) \neq 0$. D'après la question précédente, F est stable par $\mathscr{A}$. D'après la première partie du problème, $\mathscr{A}$ est inclus dans $\mathscr{A}_F$ et donc est de dimension $\leqslant n^2 - n + 1$, contradiction.

On en déduit que la dimension maximale d'une pré-algèbre de $\mathscr{L}(E)$ est $n^2 - n + 1$, car d'après la question 6, il existe des pré-algèbres de dimension $n^2 - n + 1$.

(Remarque : on n'a pas démontré que toutes les sous-algèbres strictes stabilisent un sous-espace strict $\neq \{0\}$: considérer par exemple $\Gamma(\mathbb{R})$.)

4 Réduction d'une algèbre nilpotente de $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$

24. Si $n = 1$, le seul endomorphisme nilpotent de $\mathscr{L}(E)$ est l'endomorphisme nul. Sa matrice est diagonale en toute base.

25. Par l'absurde : s'il n'en existe pas, d'après le théorème de Burnside, $\mathscr{A} = \mathscr{L}(E)$ (car $\dim E \geqslant 2$). Mais $\mathscr{L}(E)$ contient des éléments non nilpotents, par exemple Id_E.

26. Si $(\varepsilon_1,\dots,\varepsilon_r)$ est une base de V que l'on complète en une base $\mathscr{B}$ de E, la matrice de tout élément $u \in \mathscr{A}$ est de la forme $\mathrm{M}at_{\mathscr{B}}(u) = \begin{pmatrix} A(u) & B(u) \\ 0 & D(u) \end{pmatrix}$, car u stabilise V.

27. Vu que $\mathrm{M}at_{\mathscr{B}}(\lambda u + \mu v) = \lambda \mathrm{M}at_{\mathscr{B}}(u) + \mu \mathrm{M}at_{\mathscr{B}}(v)$, les applications $A : u \mapsto A(u)$ et $D : u \mapsto D(u)$ sont linéaires. Donc $\{A(u) \mid u \in \mathscr{A}\}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{M}_r(\mathbb{C})$. De même $\{D(u) \mid u \in \mathscr{A}\}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{M}_s(\mathbb{C})$.
De plus, $\mathrm{M}at_{\mathscr{B}}(u \circ v) = \mathrm{M}at_{\mathscr{B}}(u)\mathrm{M}at_{\mathscr{B}}(v)$, donc, par produit par blocs, $A(u \circ v) = A(u)A(v)$ et de même pour D. Ce sont bien des sous-algèbres. Enfin,

$$\mathrm{M}at_{\mathscr{B}}(u^p) = (\mathrm{M}at_{\mathscr{B}}(u))^p = \begin{pmatrix} A(u) & * \\ 0 & D(u) \end{pmatrix}^p = \begin{pmatrix} A(u)^p & * \\ 0 & D(u)^p \end{pmatrix}$$

par produit par blocs. Mais si p est l'indice de nilpotence de u, on a que $A(u)^p$ et $D(u)^p$ sont nulles, donc $A(u)$ et $D(u)$ sont nilpotentes d'indice $\leqslant p$.

28. Quitte à choisir une base de E, le théorème de Burnide se réécrit : si $\mathscr{A}$ est une sous-algèbre de $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ et si les seuls sous-espaces vectoriels de $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{C})$ stables par tous les endomorphismes canoniquement associés aux $M \in \mathscr{A}$ sont $\{0\}$ et $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{C})$, alors $\mathscr{A} = \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$. On applique l'hypothèse de récurrence à la sous-algèbre $\{A(u) \mid u \in \mathscr{A}\}$ de $\mathscr{M}_r(\mathbb{C})$. (On a bien $r \leqslant n-1$ car r et s sont strictement positifs.) Il existe donc $P \in GL_r(\mathbb{C})$ telle que pour tout $u \in \mathscr{A}$, $PA(u)P^{-1}$ est triangulaire supérieure. De même, il existe $Q \in GL_s(\mathbb{C})$ telle que pour tout $u \in \mathscr{A}$, $QD(u)Q^{-1}$ est triangulaire supérieure.

Mais alors, en posant $R = \begin{pmatrix} P & 0 \\ 0 & Q \end{pmatrix}$, on a R inversible (car d'inverse $\begin{pmatrix} P^{-1} & 0 \\ 0 & Q^{-1} \end{pmatrix}$ en vertu du produit par blocs) et pour tout $u \in \mathscr{A}$, $R\,\mathrm{M}at_{\mathscr{B}}(u)R^{-1} = \begin{pmatrix} PA(u)P^{-1} & * \\ 0 & PD(u)P^{-1} \end{pmatrix}$ qui est bien triangulaire supérieure car les deux blocs diagonaux le sont.

En interprétant R comme une matrice de passage et d'après la formule du changement de base pour les matrices, il existe une base $\mathscr{B}'$ de E telle que pour tout $u \in \mathscr{A}$, $\mathrm{M}at_{\mathscr{B}'}(u) = R\mathrm{M}at_{\mathscr{B}}(u)R^{-1}$; $\mathscr{A}$ est donc trigonalisable.

29. D'après ce qui précède, il existe une base $\mathscr{B}'$ de E telle $\mathrm{M}at_{\mathscr{B}'}(u)$ est triangulaire supérieure pour tout $u \in \mathscr{A}$. Mais alors les valeurs propres de u sont les termes diagonaux de $\mathrm{M}at_{\mathscr{B}'}(u)$, qui sont alors nuls car la seule valeur propre d'un endomorphisme nilpotent est 0.

5 Le théorème de Burnside

5.1 Recherche d'un élément de rang 1

30. Soit φ_x l'application de $\mathscr{L}(E)$ dans E définie par $u \mapsto u(x)$. Cette application est linéaire. Alors $\mathrm{I}m\,\varphi_x$ est un sous-espace vectoriel de E. Il est stable par $\mathscr{A}$ car si $z \in \mathrm{I}m\,\varphi_x$, z s'écrit $u(x)$ pour un $u \in \mathscr{A}$. Ainsi, pour tout $v \in \mathscr{A}$, $v(z) = v \circ u(x) = \varphi_x(v \circ u)$ qui appartient à $\mathrm{I}m\,\varphi_x$.

    S'il est réduit à $\{0\}$, alors la droite $\mathbb{C}x$ est stable par tout $u \in \mathscr{A}$, ce qui est absurde. Par irréductibilité, c'est E.

    A fortiori, il existe $u \in \mathscr{A}$ tel que $\varphi_x(u) = y$, c'est-à-dire $u(x) = y$.

31. L'application $v \circ u$ envoie $\mathrm{I}m\,v$ dans $\mathrm{I}m\,v$. L'application induite admet donc une valeur propre complexe λ. En particulier, l'application induite $(v \circ u)_{\mathrm{I}m\,v} - \lambda \mathrm{I}d_{\mathrm{I}m\,v}$ sur $\mathrm{I}m\,v$ n'est pas surjective, et son image est un sous-espace strict de $\mathrm{I}m\,v$. C'est aussi l'image de $v \circ u \circ v - \lambda v$. Enfin, elle n'est pas réduite à $\{0\}$ car $(v \circ u \circ v - \lambda v)(x) = v(y) - \lambda v(x)$ qui est non nul car combinaison linéaire à coefficients non tous nuls de la famille libre $(v(x), v(y))$. On a donc $0 < \mathrm{rg}(v \circ u \circ v - \lambda v) < \mathrm{rg}\,v$.

32. Vu que $\mathscr{A}$ n'est pas réduit à $\{0\}$, il existe un élément de rang $r \geqslant 1$ dans $\mathscr{A}$. En appliquant de manière répétée le résultat de la question précédente, il existe un élément de rang 1 dans $\mathscr{A}$, noté u_0.

5.2 Conclusion

33. Par l'absurde. S'il existe un sous-espace stable par toute $M \in \mathscr{M}^T$, alors il existe $P \in GL_n(\mathbb{C})$ telle que $P^{-1}\mathscr{M}^T P = \{P^{-1}MP | M \in \mathscr{M}^T\}$ est inclus dans une pré-algèbre de la forme $\begin{pmatrix} * & * \\ 0 & * \end{pmatrix}$. Mais alors, $(P^{-1})^T \mathscr{M} P^T = \left(P\mathscr{M}^T P^{-1}\right)^T$ est inclus dans un $\begin{pmatrix} * & 0 \\ * & * \end{pmatrix}$, et donc n'est pas irréductible. A fortiori, $\mathscr{M}$ n'est pas irréductible, car si $(P^{-1})^T \mathscr{M} P^T$ stabilise F, $\mathscr{M}$ stabilise $P^T(F)$. Contradiction.

34. Soit $x_0 = u_0(\varepsilon_1)$, qui est non-nul car sinon u_0 est nul car nul sur une base de E. D'après la question 30, il existe pour tout $i \in [\![1, n]\!]$ un $u_i \in \mathscr{A}$ tel que $u_i(x_0) = u_i \circ u_0(\varepsilon_1) = \varepsilon_i$. Notons que $u_i \circ u_0$ est encore de rang 1 car non nul et de noyau de contenant $\ker u_0$, qui est de dimension $n-1$. Sa matrice dans la base $\mathscr{B}$ est $E_{i,1}$. Donc $E_{i,1}$ appartient à $\mathscr{M}$ pour tout $i \in [\![1, n]\!]$.

35. Le sous-espace vectoriel $\mathscr{M}^T$ est une pré-algèbre irréductible (question 33). Soit donc $A_i \in \mathscr{M}^T$ qui envoie e_1 sur e_i. Alors $A_i E_{1,j} = E_{i,j}$ (car $E_{1,j}(e_p) = \delta_{j,p} e_1$) et appartient à $\mathscr{M}^T$. Donc $\mathscr{M}^T = \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ et par isomorphisme $\mathscr{M} = \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$. Ainsi, $\mathscr{A} = \mathscr{L}(E)$.