Dans tout le problème, $\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, et E est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension $n \geqslant 1$.

On note $\mathscr{L}(E)$ le $\mathbb{K}$-espace vectoriel des endomorphismes de E. On dit qu'un sous-ensemble $\mathscr{A}$ de $\mathscr{L}(E)$ est une pré-algèbre de $\mathscr{L}(E)$ si c'est un sous-espace vectoriel stable pour la composition, c'est-à-dire pour lequel $u \circ v$ appartient à $\mathscr{A}$ quels que soient les éléments u et v de $\mathscr{A}$. (Remarquer qu'on ne demande pas que Id_E appartienne à $\mathscr{A}$.)

On dit que la pré-algèbre $\mathscr{A}$ est commutative si pour tous u et v dans $\mathscr{A}$, $u \circ v = v \circ u$. Une pré-algèbre $\mathscr{A}$ de $\mathscr{L}(E)$ est dite diagonalisable (respectivement trigonalisable) s'il existe une base $\mathscr{B}$ de E telle que les matrices $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(u)$ soient toutes diagonales (respectivement triangulaires supérieures).

On note $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ le $\mathbb{K}$-espace vectoriel des matrices carrées à n lignes et n colonnes et à coefficients dans $\mathbb{K}$. On dit qu'une partie $\mathscr{A}$ de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ est une pré-algèbre de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ si $\mathscr{A}$ est un sous-espace vectoriel stable pour le produit matriciel. Elle est dite commutative si, pour toutes matrices A et B de $\mathscr{A}$, $AB = BA$. Une pré-algèbre $\mathscr{A}$ de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ est diagonalisable (respectivement trigonalisable) s'il existe $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ telle que pour toute matrice M de $\mathscr{A}$, $P^{-1}MP$ soit diagonale (respectivement triangulaire supérieure).

Si $\mathscr{B}$ est une base de E, l'application $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}} : \mathscr{L}(E) \to \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ est une bijection qui envoie une pré-algèbre (respectivement commutative, diagonalisable, trigonalisable) de $\mathscr{L}(E)$ sur une pré-algèbre de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ (respectivement commutative, diagonalisable, trigonalisable).

Un sous-espace vectoriel F de E est strict si F est différent de E.

On désigne par $\mathscr{S}_n(\mathbb{K})$ (respectivement $\mathscr{A}_n(\mathbb{K})$) l'ensemble des matrices symétriques de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ (respectivement antisymétriques). On désigne par $\mathscr{T}_n(\mathbb{K})$ (respectivement $\mathscr{T}_n^+(\mathbb{K})$) le sous-ensemble de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ constitué des matrices triangulaires supérieures (respectivement des matrices triangulaires supérieures à coefficients diagonaux nuls).

Enfin, la matrice transposée de toute matrice M de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ est notée M^T ou ${}^tM$.

1 Exemples de pré-algèbres de $\mathscr{L}(E)$

1.1 Exemples de pré-algèbres de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$

1. Les sous-ensembles $T_n(\mathbb{K})$ et $T_n^+(\mathbb{K})$ sont-ils des pré-algèbres ?
2. Les sous-ensembles $\mathscr{S}_2(\mathbb{K})$ et $\mathscr{A}_2(\mathbb{K})$ sont-ils des pré-algèbres de $\mathscr{M}_2(\mathbb{K})$?
3. On suppose $n \geqslant 3$. Les sous-ensembles $\mathscr{S}_n(\mathbb{K})$ et $\mathscr{A}_n(\mathbb{K})$ sont-ils des pré-algèbres de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$?

1.2 Exemples de pré-algèbres de $\mathscr{L}(E)$

Soit F un sous-espace vectoriel de E de dimension p et $\mathscr{A}_F$ l'ensemble des endomorphismes de E qui stabilisent F, c'est-à-dire $\mathscr{A}_F = \{u \in \mathscr{L}(E) \mid u(F) \subset F\}$.

4. Montrer que $\mathscr{A}_F$ est une pré-algèbre de $\mathscr{L}(E)$.
5. Montrer que $\dim \mathscr{A}_F = n^2 - pn + p^2$.
   Indication : on pourra considérer une base de E dans laquelle la matrice de tout élément de $\mathscr{A}_F$ est triangulaire par blocs.
6. Déterminer $\max\limits_{1 \leqslant p \leqslant n-1} (n^2 - pn + p^2)$.

1.3 Exemples de pré-algèbres de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ diagonalisables et non diagonalisables

Soit $\Gamma(\mathbb{K})$ le sous-ensemble de $\mathscr{M}_2(\mathbb{K})$ constitué des matrices de la forme $\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$ où $(a,b) \in \mathbb{K}^2$.

7. Montrer que $\Gamma(\mathbb{K})$ est une pré-algèbre de $\mathscr{M}_2(\mathbb{K})$.
8. Montrer que $\Gamma(\mathbb{R})$ n'est pas une pré-algèbre diagonalisable de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$.
9. Montrer que $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ est diagonalisable sur $\mathbb{C}$. En déduire que $\Gamma(\mathbb{C})$ est une pré-algèbre diagonalisable de $\mathscr{M}_2(\mathbb{C})$.

2 Une pré-algèbre commutative de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$

Dans cette partie, on suppose $n \geqslant 2$. Pour tout $(a_0,\dots,a_{n-1}) \in \mathbb{R}^n$, on pose

$$J(a_0,\dots,a_{n-1}) = \begin{pmatrix} a_0 & a_{n-1} & \cdots & a_1 \\ a_1 & a_0 & \cdots & a_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n-1} & a_{n-2} & \cdots & a_0 \end{pmatrix}$$

Ainsi, le coefficient d'indice (i,j) de $J(a_0,\dots,a_{n-1})$ est a_{i-j} si $i \geqslant j$ et a_{i-j+n} si $i < j$.

Soit $\mathscr{A}$ l'ensemble des matrices de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ de la forme $J(a_0,\dots,a_{n-1})$ où $(a_0,\dots,a_{n-1}) \in \mathbb{R}^n$.

Soit $J \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ la matrice canoniquement associée à l'endomorphisme $\varphi \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^n)$ défini par $\varphi : e_j \mapsto e_{j+1}$ si $j \in \{1,\dots,n-1\}$ et $\varphi(e_n) = e_1$, où $(e_1,\dots,e_n)$ est la base canonique de $\mathbb{R}^n$.

10. Donner la matrice J et de J^2. (On pourra distinguer les cas $n = 2$ et $n > 2$.)
11. Quelle est la dimension de $\mathrm{Vect}(J^k)_{k\in\mathbb{N}}$? En donner une base.
12. Montrer que $\mathscr{A}$ est une pré-algèbre commutative de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.
13. Montrer que J est diagonalisable dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$. Quel est son polynôme minimal ? Quel est son polynôme caractéristique ?
14. La matrice J est-elle diagonalisable sur $\mathbb{R}$?
15. Déterminer les valeurs propres complexes et les espaces propres associés de J.
16. Montrer que les éléments de $\mathscr{A}$ sont simultanément diagonalisables dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$.
17. Soit $(a_0,\dots,a_{n-1}) \in \mathbb{R}^n$. On note $Q \in \mathbb{R}[X]$ le polynôme $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} a_k X^k$.

    Déterminer les valeurs propres complexes de la matrice

$$M = \begin{pmatrix} a_0 & a_{n-1} & \cdots & a_1 \\ a_1 & a_0 & \cdots & a_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n-1} & a_{n-2} & \cdots & a_0 \end{pmatrix}.$$

3 Pré-algèbres de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ de dimension maximale

On se propose de montrer dans cette partie que la dimension maximale d'une pré-algèbre stricte de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ est égale à $n^2 - n + 1$.

Dans toute cette partie, $\mathscr{A}$ est une pré-algèbre de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ strictement incluse dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ et on note d sa dimension. On a donc $d < n^2$.

Soit $\mathscr{A}$ une pré-algèbre de $\mathscr{L}(E)$ strictement incluse dans $\mathscr{L}(E)$. On veut montrer que $\dim \mathscr{A} \leqslant n^2 - n + 1$. Pour cela, on raisonne par l'absurde et on suppose que $\dim \mathscr{A} = n^2 - r$ où $r \in [\![1, n-2]\!]$.

On désigne par $\mathscr{A}^\perp$ l'ensemble $\{f \in \mathscr{L}(E)^* \mid \mathscr{A} \subset \mathrm{Ker}\, f\}$ où $\mathscr{L}(E)^*$ désigne l'espace dual de $\mathscr{L}(E)$.

18. Montrer que $\mathscr{A}^\perp$ est un espace vectoriel de dimension r.

    Indication : partir d'une base de $\mathscr{A}$, compléter en une base de $\mathscr{L}(E)$ et passer à la base duale.
19. Soit $B \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ telle que pour tout $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$, on ait $\mathrm{Tr}(MB) = 0$. Déterminer $\mathrm{Tr}(E_{ij}B)$ et en déduire que $B = 0$. (E_{ij} désigne la matrice dont tous les termes sont nuls, sauf le coefficient (i,j) qui vaut 1.)
20. Pour tout $v \in \mathscr{L}(E)$, on considère la forme linéaire φ_v sur $\mathscr{L}(E)$ définie par $\phi_v(u) = \mathrm{Tr}(uv)$. Montrer que $\Phi : v \mapsto \phi_v$ est un isomorphisme de $\mathscr{L}(E)$ sur son dual.
21. Montrer qu'il existe une famille libre $(v_1,\dots,v_r)$ de vecteurs de $\mathscr{L}(E)$ telle que pour tout $u \in \mathscr{L}(E)$

$$u \in \mathscr{A} \iff \forall i \in [\![1,r]\!], \mathrm{Tr}(uv_i) = 0.$$

22. On garde la famille $(v_1,\dots,v_r)$ construite à la question précédente. Soit $a \in \mathscr{A}$. Montrer que pour tout $i \in [\![1,r]\!]$, on a $av_i \in \mathrm{Vect}(v_1,\dots,v_r)$.
23. En déduire qu'il existe un sous-espace vectoriel F de E de dimension comprise entre 1 et r stable par tous les éléments de $\mathscr{A}$ et conclure.

4 Réduction d'une pré-algèbre nilpotente de $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$

Soit E un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension finie n. Soit $\mathscr{A}$ une pré-algèbre de $\mathscr{L}(E)$ constituée d'endomorphismes nilpotents. On admet dans cette partie le théorème ci-dessous, qui sera démontré dans la partie 5.

Théorème de Burnside *Soit E un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension $n \geqslant 2$. Soit $\mathscr{A}$ une pré-algèbre de $\mathscr{L}(E)$. Si les seuls sous-espaces vectoriels de E stables par tous les éléments de $\mathscr{A}$ sont $\{0\}$ et E, alors $\mathscr{A} = \mathscr{L}(E)$.*

On se propose de démontrer par récurrence forte sur $n \in \mathbb{N}^*$ que si tous les éléments de $\mathscr{A}$ sont nilpotents, alors $\mathscr{A}$ est trigonalisable.

24. Montrer que le résultat est vrai si $n = 1$.

On suppose désormais que $n \geqslant 2$ et que le résultat est vrai pour tout entier naturel $d \leqslant n-1$. Soit E un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension finie n. Soit $\mathscr{A}$ une pré-algèbre de $\mathscr{L}(E)$ constituée d'endomorphismes nilpotents.

25. Montrer qu'il existe un sous-espace vectoriel V de E distinct de E et $\{0\}$ stable par tous les éléments de $\mathscr{A}$.

On fixe dans la suite un tel sous-espace vectoriel et on note r sa dimension. Soit aussi $s = n - r$.

26. Montrer qu'il existe une base $\mathscr{B}$ de E telle que pour tout $u \in \mathscr{A}$,

$$\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(u) = \begin{pmatrix} A(u) & B(u) \\ 0 & D(u) \end{pmatrix}$$

où $A(u) \in \mathscr{M}_r(\mathbb{C})$, $B(u) \in \mathscr{M}_{r,s}(\mathbb{C})$ et $D(u) \in \mathscr{M}_s(\mathbb{C})$.

27. Montrer que $\{A(u) \mid u \in \mathscr{A}\}$ et $\{D(u) \mid u \in \mathscr{A}\}$ sont des pré-algèbres de $\mathscr{M}_r(\mathbb{C})$ constituées de matrices nilpotentes.

28. Montrer que $\mathscr{A}$ est trigonalisable.

29. Soit $\mathscr{A}$ une pré-algèbre de $\mathscr{L}(E)$ constituée de matrices nilpotentes. Montrer qu'il existe une base de E dans laquelle les matrices des éléments de $\mathscr{A}$ appartiennent à $\mathscr{T}_n^+(\mathbb{C})$.

5 Le théorème de Burnside

On se propose de démontrer dans cette partie le théorème de Burnside énoncé dans la partie 4.

On fixe un $\mathbb{C}$-espace vectoriel E de dimension $n \geqslant 2$

On dira qu'une pré-algèbre $\mathscr{A}$ de $\mathscr{L}(E)$ est irréductible si les seuls sous-espaces vectoriels stables par tous les éléments de $\mathscr{A}$ sont $\{0\}$ et E.

Soit $\mathscr{A}$ une pré-algèbre irréductible de $\mathscr{L}(E)$. Il s'agit donc de montrer que $\mathscr{A} = \mathscr{L}(E)$.

5.1 Recherche d'un élément de rang 1

30. Soient x et y des éléments de E, x étant non nul. Montrer qu'il existe $u \in \mathscr{A}$ tel que $u(x) = y$.
    Indication : on pourra considérer dans E le sous-espace vectoriel $\{u(x) \mid u \in \mathscr{A}\}$.

31. Soit $v \in \mathscr{A}$ de rang supérieur ou égal à 2. Montrer qu'il existe $u \in \mathscr{A}$ et $\lambda \in \mathbb{C}$ tel que $0 < \mathrm{rg}(v \circ u \circ v - \lambda v) < \mathrm{rg}\, v$.
    Indication : considérer x et y dans E tels que la famille $\big(v(x), v(y)\big)$ soit libre, justifier l'existence de $u \in \mathscr{A}$ tel que $u \circ v(x) = y$ et considérer l'endomorphisme induit par $v \circ u$ sur $\mathrm{Im}\, v$.

32. En déduire l'existence d'un élément de rang 1 dans $\mathscr{A}$.

5.2 Conclusion

Soit $u_0 \in \mathscr{A}$ de rang 1. On peut donc choisir une base $\mathscr{B} = (\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n)$ de E telle que $(\varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n)$ soit une base de $\ker u_0$.

33. Soit $\mathscr{M}$ une pré-algèbre irréductible de $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$. Montrer que $\mathscr{M}^T = \{M^T \in \mathscr{M} | M \in \mathscr{M}\}$ est encore une pré-algèbre irréductible.

34. Montrer qu'il existe $u_1, \dots, u_n \in \mathscr{A}$ de rang 1 tels que $u_i(\varepsilon_1) = \varepsilon_i$ pour tout $i \in [\![1, n]\!]$.

35. Conclure.
    Indication : en notant $\mathscr{M} = \{\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}\, u | u \in \mathscr{A}\}$, on pourra montrer que $\mathscr{M}$ contient $E_{1,1}, \dots, E_{n,1}$ et considérer $\mathscr{M}^T$.