Exo 2 : Une caractérisation des endomorphismes symétriques définis positifs

Énoncé Soit $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$. On note $A^{(i)}$ la matrice extraite de A en gardant les i premières lignes et colonnes. Montrer que $A \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ si et seulement si $\det A^{(i)} > 0$ pour tout $i \in [\![1,n]\!]$. En déduire que $\mathcal{S}^{++}(E)$ est un ouvert de $\mathcal{S}^{+}(E)$ et de $\mathcal{S}(E)$.

Solution : Pour le sens direct, on remarque que si X est un vecteur non nul de $\mathcal{M}_{i,1}(\mathbb{R})$, alors en posant $Y = \begin{pmatrix} X \\ 0 \end{pmatrix}$, ${}^tXA^{(i)}X = {}^tYAY$ donc est strictement positif.

Réciproquement. Montrons que $A^{(i)}$ est défini positif. Par l'absurde. Il existe donc $i \in [\![1,n]\!]$ minimal tel que $A^{(i)}$ n'est pas défini positif. De plus $i \geqslant 2$ car $[A]_{1,1} > 0$ (déterminant > 0). Par le théorème spectral, $A^{(i)}$ est diagonalisable. Le produit des valeurs propres comptées avec multiplicités est le déterminant, donc strictement positif. Vu que $A^{(i)}$ n'est pas défini positif, la somme des multiplicités des valeurs propres strictement négatives est paire non nulle. Il existe donc un plan $V = \mathrm{Vect}(u,v)$ où (u,v) est libre et formée de deux vecteurs propres unitaires. On peut même supposer $u \perp v$; c'est automatique si les valeurs propres respectives sont différentes, et on les choisit orthogonaux dans $E_\lambda(A)$ s'ils sont associés à la valeur propre λ.

Soit maintenant f canoniquement associé à A. On considère la fonction $x \mapsto q(x) = \langle f(x)|x\rangle$. Par définition de i, si $x \in \mathrm{Vect}(e_1,\dots,e_{i-1})$ *i.e.* $x = x_1e_1 + \dots + x_{i-1}e_{i-1}$ est non nul, alors $q(x) = {}^tXA^{(i-1)}X$ (où $X = (x_1,\dots,x_{i-1},0)$) est strictement positif, par définition de i. D'autre part, si $x = \alpha u + \beta v$ est non nul, $q(x) = \langle \alpha u + \beta v | \alpha u + \beta v\rangle = \lambda\alpha^2 + \mu\beta^2 < 0$ car les valeurs propres λ et μ sont strictement négatives.

Mais $V \cap \mathrm{Vect}(e_1,\dots,e_{i-1}) \neq \{0\}$ sinon les deux espaces seraient en somme directe et on aurait $\dim V \oplus \mathrm{Vect}(e_1,\dots,e_{i-1}) = i+1 > i = \dim \mathrm{Vect}(e_1,\dots,e_i)$, absurde. Il existe donc $x \in V \cap \mathrm{Vect}(e_1,\dots,e_{i-1})$ non nul, qui vérifie donc $q(x) > 0$ et $q(x) < 0$. Contradiction.

Enfin, l'application $F : \mathcal{S}_n \to \mathbb{R}^n$, $A \mapsto (\det A^{(1)},\dots,\det A^{(n)})$ est continue car ses coordonnées sont polynomiales en les coefficients de A. Mais alors, $\mathcal{S}_n^{++}$ est l'image réciproque par F de l'ouvert $]0,+\infty[^n$. Donc est un ouvert de $\mathcal{S}_n$, et a fortiori de $\mathcal{S}_n^+$.

TD n° 7 – Polynômes orthogonaux

Partie 1 – Polynômes orthogonaux

1. La bilinéarité et la symétrie sont claire, en vertu de la linéarité de l'intégrale. On a $\langle P|P\rangle = \int_a^b P(t)^2w(t)dt \geqslant 0$ car $P(t)^2w(t) \geqslant 0$. Si $\langle P|P\rangle = 0$, alors $P(t)^2w(t) = 0$ (car positive continue d'intégrale nulle), et donc $P(t)^2 = 0$ pour tout $t \in [a,b]$. Donc P a une infinité de racines et $P = 0$.
2. On orthonormalise $(1, X, \dots, X^n)$ par le procédé de Gram-Schmidt pour tout n.
3. Montrons l'existence de $\lambda_k \in \mathbb{R}^*$ par récurrence sur $k \in \mathbb{N}$. Si $k = 0$, alors P_0 et Q_0 sont des polynômes constants non nuls. Donc $\lambda_0 = P_0/Q_0$ convient. Remarquons que $(P_k)_{0\leqslant k\leqslant n}$ et $(Q_k)_{0\leqslant k\leqslant n}$ sont des bases de E_n car échelonnées en degré. Donc P_k est une base de l'orthogonal de E_{k-1} dans E_k. Il en de même pour Q_k et ces deux polynômes sont donc proportionnels, ce qui conclut la récurrence. Enfin il existe un unique λ_k tel que λ_kP_k soit unitaire.

Partie 2 – Étude des zéros

4. On désigne par $r_1,\dots,r_p$ (resp. $s_1,\dots,s_q$) les racines de P_k dans $]a,b[$ de multiplicité impaire (resp. paire). Donc
$$P_k = (X-r_1)^{\alpha_1}\cdots(X-r_p)^{\alpha_p}(X-s_1)^{\beta_1}\cdots(X-s_q)^{\beta_q}Q$$
où α_i est la multiplicité de r_i et β_j la multiplicité de s_j, et Q n'a pas de racines dans $]a,b[$ par construction.
5. Puisque $\deg(X-r_1)\cdots(X-r_p) = p < k$, on a $(X-r_1)\cdots(X-r_p) \in E_{k-1}$ et donc $P_k \perp (X-r_1)\cdots(X-r_p)$.
6. Par l'absurde : avec les notations de la question précédente, cela revient à supposer que $p < k$. On a donc
$$\langle P_k|(X-r_1)\cdots(X-r_p)\rangle = \int_a^b P(t)(t-r_1)\cdots(t-r_p)dt$$
$$= \int_a^b (t-r_1)^{\alpha_1+1}\cdots(t-r_p)^{\alpha_p+1}(t-s_1)^{\beta_1}\cdots(t-s_q)^{\beta_q}Q(t)dt.$$
Or $t \mapsto Q(t)$ est continue positive et ne s'annule pas sur $]a,b[$, donc est de signe constant sur $[a,b]$. De plus $t \mapsto (t-r_1)^{\alpha_1+1}\cdots(t-r_p)^{\alpha_p+1}(t-s_1)^{\beta_1}\cdots(t-s_q)^{\beta_q}$ est positive car les exposants sont pairs. Donc $t \mapsto (t-r_1)^{\alpha_1+1}\cdots(t-r_p)^{\alpha_p+1}(t-s_1)^{\beta_1}\cdots(t-s_q)^{\beta_q}Q(t)$ est une fonction de signe constant continue d'intégrale nulle, donc nulle. Or le polynôme $(X-r_1)^{\alpha_1+1}\cdots(X-r_p)^{\alpha_p+1}(X-s_1)^{\beta_1}\cdots(X-s_q)^{\beta_q}Q$ est de degré $k+p$, donc non nul, ce qui est une contradiction.
7. Les racines de P_k et de λ_kP_k sont les mêmes.

Partie 3 – Relation de récurrence

8. Puisque $\deg XP_n = n+1$, $XP_n \in E_{n+1}$. Donc XP_n est combinaison linéaire de $P_0, \dots, P_{n+1}$. De plus, si $k < n-1$, alors

$$\langle XP_n | P_k \rangle = \int_a^b tP_n(t)P_k(t)dt = \langle P_n | XP_k \rangle = 0$$

car $\deg XP_k < n$. Si $XP_n = \sum_{j=0}^{n+1} \lambda_j P_j$, alors pour $k < n-1$, on a $\langle XP_n | P_k \rangle = \lambda_k$ et donc $\lambda_k = 0$. D'où l'existence de $\alpha_n, \beta_n, \gamma_n$.

9. Si P_n est unitaire, alors XP_n aussi, et par comparaison des termes dominants dans l'égalité précédente, on a $\gamma_{n+1} = 1$. On pose alors $a_n = \beta_{n-1}$ et $b_n = \alpha_{n-1}$.

Partie 4 – Une formule d'intégration

10. Soient $(L_j)_{1 \leqslant j \leqslant n}$ la famille des polynômes de Lagrange associée à la famille $(x_i)_{1 \leqslant i \leqslant N}$. Par définition, $L_j(x_i) = \delta_{i,j}$ pour tous $i, j \in [\![1, n]\!]$. Mais alors $(\psi_{x_j})_{1 \leqslant j \leqslant n}$ est la base duale de $(L_j)_{1 \leqslant j \leqslant n}$, donc est une base de E_{n-1}^*.

11. Soit $P \in E_{2n-1}$. On écrit $P = QP_n + R$ avec $\deg R < n$ (division euclidienne). Alors

$$\phi(P) = \int_a^b P(t)w(t)dt = \int_a^b Q(t)P_n(t)w(t)dt + \int_a^b R(t)w(t)dt.$$

Mais

$$\int_a^b Q(t)P_n(t)w(t)dt = \langle Q | P_n \rangle = 0$$

car $\deg Q < \deg P_n$, et $\int_a^b R(t)w(t)dt = \sum_{1 \leqslant j \leqslant n} \mu_j \psi_{r_{n,j}}(R)$ car $\deg R < n$. Enfin,

$$\sum_{1 \leqslant j \leqslant n} \mu_j \psi_{r_{n,j}}(P) = \sum_{1 \leqslant j \leqslant n} \mu_j \left(Q(r_{n,j})P(r_{n,j}) + R(r_{n,j}) \right) = \sum_{1 \leqslant j \leqslant n} \mu_j R(r_{n,j})$$

car $r_{n,j}$ est une racine de P_n.

Partie 5 – Expression avec des déterminants

12. (On reconnaît une matrice de Gram.) Soit C_j la j^{e} colonne de Δ_n. Soient $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ tels que $\sum_{j=1}^{n} \lambda_j C_j = 0$, ce qui signifie que

$$\langle 1 | \sum_{j=1}^{n} \lambda_j X^{j-1} \rangle = \langle X | \sum_{j=1}^{n} \lambda_j X^{j-1} \rangle = \cdots = \langle X^{n-1} | \sum_{j=1}^{n} \lambda_j X^{j-1} \rangle = 0.$$

Mais alors $\sum_{j=1}^{n} \lambda_j X^{j-1}$ est orthogonal à tout vecteur de E_{n_1}, donc à lui-même, et ainsi il est nul. Donc les λ_j sont tous nuls et les colonnes forment une famille libre. Donc A_n est inversible et donc de déterminant non nul.

13. En développant suivant la dernière ligne, on trouve une expression de la forme $a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n$ avec $a_n = \Delta_{n-1}$, qui est non nul d'après la question précédente. Donc D_n est de degré n.

14. On a $\langle D_n | X^k \rangle = a_0 \langle 1 | X^k \rangle + a_1 \langle X | X^k \rangle + \cdots + a_n \langle X^n | X^k \rangle$. On reconnaît

$$\begin{vmatrix} c_0 & c_1 & \cdots & c_{n-1} & c_n \\ c_1 & c_2 & \cdots & c_n & c_{n+1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ c_{n-1} & c_n & \cdots & c_{2n-2} & c_{2n-1} \\ \langle 1 | X^k \rangle & \langle X | X^k \rangle & \cdots & \langle X^{n-1} | X^k \rangle & \langle X^n | X^k \rangle \end{vmatrix}.$$

Dans ce dernier déterminant, la k^{e} ligne et la dernière sont égales, si $k < n$. Donc la famille $(D_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est un système orthogonal.